

文章编号: 1001-3806(2017)05-0749-05

基于 IGG III 方案的加权总体最小二乘点云球面拟合

欧江霞, 刘伟诚

(广州市地质调查院, 广州 510440)

摘要: 为了减少测量粗差对球标靶拟合精度的影响, 在加权总体最小二乘法基础上, 针对地面 3 维激光扫描球标靶数据特点, 采用了权函数 IGG III 方案, 自适应地修正拟合权阵, 构建了新的点云球面拟合方法。利用新方法分别拟合了模拟球面数据、实际扫描球面数据。结果表明, 该方法在同时考虑拟合模型系数矩阵误差与观测向量误差基础上, 通过合理定义及优化拟合权阵, 获得了更为精确的球面参量。其拟合评价指标均优于常规方法。

关键词: 测量与计量; 点云球面拟合; 加权总体最小二乘; IGG III 方案; 球标靶

中图分类号: TN247; O241.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2017.05.026

Fitting of sphere point clouds by weighted total least squares based on IGG III scheme

OU Jiangxia, LIU Weicheng

(Geological Survey of Guangzhou, Guangzhou 510440, China)

Abstract: In order to decrease the influence of observational gross error on the fitting precision of sphere target, aiming at data characteristics of sphere target by terrestrial 3-D laser scanning and based on weighted total least squares, weight function IGG III scheme was adopted to adaptively modify the fitting weight matrix and a new fitting method of sphere point clouds was proposed. Simulated spherical datas and scanning spherical data were fitted separately with the new method. The results show that, based on the consideration of both observation vector error and coefficient matrix error, more accurate sphere parameters are obtained by means of reasonable definition and optimization of fitting weight matrix. The fitting evaluation index of the new method is better than the conventional method's.

Key words: measurement and metrology; fitting of sphere point clouds; weighted total least squares; IGG III scheme; sphere target

引言

利用地面 3 维激光扫描仪进行扫描作业时, 若遇扫描范围过大或扫描视角被其它物体遮挡等情况, 应增加测站来完成全部扫描。即在扫描之前将 3 个或 3 个以上的球标靶(白球)合理布设至被扫描物体周围, 之后利用球标靶的球心坐标通过刚体变换公式实现坐标转换, 将所有扫描数据统一至同一坐标系下, 为后期数据处理提供完整的研究对象点云坐标数据。其中, 球标靶球心坐标通过球面拟合得到, 因此, 球面拟合精度直接影响到球心坐标精度, 进而对整个坐标转换精度及之后数据处理、数据分析、数据建模的精度产生极大影响。

传统最小二乘(least squares, LS)法^[1]、总体最小

二乘(total least squares, TLS)法^[2-3]等球面拟合方法在拟合过程中, 均将点云各点当做等独立精度观测值处理, 由于受观测环境、系统误差等因素影响, 地面 3 维激光扫描获取的空间 3 维坐标 x, y, z 这 3 个方向上均含有误差且各点点位精度均不相同, 若采用上述方法对球面点云数据进行拟合, 所得参量解并非球面参量的最或然值。作者在总体最小二乘法的基础上引入加权总体最小二乘(weighted total least squares, WTLS)模型^[4-11], 结合权函数中国科学院大地测量与地球物理研究所(Institute of Geodesy and Geophysics, IGG) III 方案^[12-13], 新的加权总体最小二乘点云球面拟合算法(weighted total least squares combined with IGG III scheme, IGG III-WTLS), 其通过对系数矩阵及观测向量的权阵进行合理定义及设计, 在参量迭代解算过程中根据 IGG III 方案确定的点位精度, 自适应地对拟合权阵进行修正, 提高拟合精度。

1 基于 IGG III 方案的加权总体最小二乘方法

作者简介: 欧江霞(1989-), 男, 硕士, 工程师, 主要从事地面 3 维激光扫描数据处理方法的研究。

E-mail: oujiangxia666@163.com

收稿日期: 2016-02-01; 收到修改稿日期: 2016-09-13

1.1 加权总体最小二乘基本原理

加权总体最小二乘球面拟合的变量误差 (error-in-variables, EIV) 模型为:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 2z_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ r^2 - a^2 - b^2 - c^2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{E}_A &= \begin{bmatrix} v_{x_1} & v_{y_1} & v_{z_1} & 1 \\ v_{x_2} & v_{y_2} & v_{z_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{x_n} & v_{y_n} & v_{z_n} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_Y = \begin{bmatrix} 2(x_1 v_{x_1} + y_1 v_{y_1} + z_1 v_{z_1}) \\ 2(x_2 v_{x_2} + y_2 v_{y_2} + z_2 v_{z_2}) \\ \vdots \\ 2(x_n v_{x_n} + y_n v_{y_n} + z_n v_{z_n}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

式中, \mathbf{e}_Y 舍去了 $(v_{x_i}^2, v_{y_i}^2, v_{z_i}^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 等极小的二次项。

随机误差 \mathbf{e}_Y 与 \mathbf{E}_A 的统计性质如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_Y \\ \text{vec}(\mathbf{E}_A) \end{bmatrix} \tag{3}$$

(3) 式服从 $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_Y & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_A \end{bmatrix} \right)$ 的正态分布。式中,

$\text{vec}(\cdot)$ 为矩阵拉直变换, σ_0^2 为未知方差分量; \mathbf{Q}_Y , \mathbf{Q}_A 为 \mathbf{e}_Y 与 \mathbf{e}_A 的对称、非奇异协因数阵, 且有:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_Y = \mathbf{P}_Y^{-1} \\ \mathbf{Q}_X = \mathbf{P}_X^{-1} \\ \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0^{-1} \\ \mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_0 \otimes \mathbf{Q}_X = \mathbf{P}_A^{-1} \end{cases} \tag{4}$$

式中, \mathbf{P}_Y 为观测值权阵, \mathbf{P}_A 为系数矩阵 \mathbf{A} 的权阵, \mathbf{P}_X 和 \mathbf{P}_0 分别为系数矩阵 \mathbf{A} 的行向量权阵及列向量矩阵, “ \otimes ” 为 Kronecker 积。

加权总体最小二乘的参量估计准则为:

$$\mathbf{e}_Y^T \mathbf{P}_Y \mathbf{e}_Y + \mathbf{e}_A^T \mathbf{P}_A \mathbf{e}_A = \min \tag{5}$$

1.2 权阵定义

根据加权总体最小二乘球面拟合 EIV 模型, 令:

$$\begin{cases} u = 2x \\ w = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \tag{6}$$

由于 x, y, z 独立等精度, 则有:

$$\begin{cases} \sigma_u = \sigma_{2x} = \sigma_{2y} = \sigma_{2z} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \\ \sigma_w = \sigma_{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \tag{7}$$

式中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_u, \sigma_w$ 分别为 x, y, z, u, w 的方差。

由协因素传播定律得:

$$\sigma_u^2 = 4\sigma_x^2 = 4\sigma_y^2 = 4\sigma_z^2 \tag{8}$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 =$$

$$\mathbf{Y} - \mathbf{e}_Y = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A) \cdot \mathbf{X} \tag{1}$$

式中, \mathbf{Y} 为含偶然误差 \mathbf{e}_Y 的 $n \times 1$ 维观测向量, \mathbf{A} 为含偶然误差 \mathbf{E}_A 的 $n \times 4$ 维系数矩阵, \mathbf{X} 为待求球面参量:

$$\begin{aligned}
 4x^2\sigma_x^2 + 4y^2\sigma_y^2 + 4z^2\sigma_z^2 &= \\
 4(x^2 + y^2 + z^2)\sigma_x^2 &=
 \end{aligned} \tag{9}$$

令单位权方差 $\sigma_0^2 = 1$, 则有:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_u = \sigma_u^2 / \sigma_0^2 = 4\sigma_x^2 \\ \mathbf{Q}_w = \sigma_w^2 / \sigma_0^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2)\sigma_x^2 \end{cases} \tag{10}$$

式中, $\mathbf{Q}_u, \mathbf{Q}_w$ 分别为 u, w 的协方差阵。

由 (10) 式可得:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_w = (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{Q}_u = w\mathbf{Q}_u \\ \mathbf{P}_w = \mathbf{P}_u / w \end{cases} \tag{11}$$

式中, \mathbf{P}_w 为 EIV 模型的观测向量权阵, 即 $\mathbf{P}_Y; \mathbf{P}_u$ 为系数矩阵的行向量矩阵, 即 \mathbf{P}_X 。

根据 (11) 式定义系数矩阵 \mathbf{A} 的列向量权阵 \mathbf{P}_0 、行向量矩阵初始权阵 \mathbf{P}_X 、观测向量 \mathbf{Y} 的初始权阵 \mathbf{P}_Y 如下:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_0 = \text{diag}(1, 1, 1, 0) \\ \mathbf{P}_X = \text{diag}(\mathbf{P}_{X_1}, \mathbf{P}_{X_2}, \dots, \mathbf{P}_{X_n}) \\ \mathbf{P}_Y = \text{diag}(\mathbf{P}_{Y_1}, \mathbf{P}_{Y_2}, \dots, \mathbf{P}_{Y_n}) \end{cases} \tag{12}$$

式中, $\mathbf{P}_{Y_i} = \mathbf{P}_{X_i} / (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

1.3 权函数选取

由于点云数据受环境影响大, 粗差点较多, 顾及 IGG III 方案在测绘领域较好的适用性^[14-15], 选取 IGG III 方案对点云参量迭代解算过程中的拟合权阵 (\mathbf{A} 的行向量矩阵的初始权阵 \mathbf{P}_X 、观测向量 \mathbf{Y} 的初始权阵 \mathbf{P}_Y , 且有 $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\omega$ ^[13], \mathbf{P} 为 $\mathbf{P}_X, \mathbf{P}_Y$ 总称, $\bar{\mathbf{P}}$ 为修正后权值, ω 为权因子) 进行修正, 其权因子计算公式为:

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & (|V_i/\sigma| < k_0) \\ \frac{k_0}{|V_i/\sigma|} \left(\frac{k_1 - |V_i/\sigma|}{k_1 - k_0} \right), & (k_0 \leq |V_i/\sigma| < k_1) \\ 0, & (|V_i/\sigma| > k_1) \end{cases} \tag{13}$$

式中, V_i 为残差, σ 为中误差, k_0 和 k_1 为调节权因子的

阈值。根据中误差分布概率理论^[13], 一般有: $k_0 = 1.0 \sim 1.5, k_1 = 2.5 \sim 3.0$ 。本文中令 $V_i = d_i, d_i$ 为点 $M(x_i, y_i, z_i)$ 到拟合模型表面的距离 (见 (14) 式), 根据 IGG III 方案在测绘领域的适用性研究^[12-13, 16], 令 $k_0 = 1.5, k_1 = 2.5$, 即认为当观测值 $V_i < 1.5\sigma$ 时, 则可认为该点不含误差, 其权因子 ω_i 不变; 当 $V_i > 2.5\sigma$ 时, 则可认为该观测值为粗差, 予以剔除。

$$d_i = \left| \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2} - r \right| \quad (14)$$

式中, a, b, c, r 为球面参量。

1.4 参量解算

在加权总体最小二乘模型的基础上, 通过合理定义权阵, 结合 1.3 节中所定义的权函数 IGG III 方案提出了新的加权总体最小二乘点云球面拟合算法 (IGG III-WTLS 法), 根据 (5) 式所示的参量估计准则, 定义算法的具体思路及模型解算步骤如下。

(1) 利用 LS 法求得拟合模型参量估值, 之后根据 1.2 节中所述方法定义系数矩阵 A 的列向量权阵 P_0 及其行向量初始权阵 $P_X^{(1)}$ 、观测向量初始权阵 $P_Y^{(1)}$ (上标加括号表示迭代)。

(2) 求取参量 $X = [a, b, c, r^2 - a^2 - b^2 - c^2]^T$ 的迭代初始值:

$$\begin{cases} \hat{v}^{(0)} = 0 \\ \hat{X}^{(0)} = (A^T Q_Y^{(1)} A)^{-1} A^T Q_Y^{(1)} Y \\ \hat{\mu}^{(0)} = \{ Q_Y^{(1)} + [(\hat{X}^{(0)})^T Q_0 \hat{X}^{(0)}] Q_X^{(1)} \}^{-1} \\ \hat{X}^{(1)} = [(\hat{\mu}^{(0)} A)^{-1} A^T \hat{\mu}^{(0)}] Y \end{cases} \quad (15)$$

式中, Q_0 为 P_0 的广义逆。

(3) 计算 $\hat{\mu}^{(i)}, \hat{\lambda}^{(i)}$ 及 $\hat{v}^{(i)}$:

$$\begin{cases} \hat{\mu}^{(i)} = \{ Q_Y^{(i)} + [(\hat{X}^{(i)})^T Q_0 \hat{X}^{(i)}] Q_X^{(i)} \}^{-1} \\ \hat{\lambda}^{(i)} = \hat{\mu}^{(i)} \cdot (Y - A \hat{X}^{(i)}) \\ \hat{v}^{(i)} = (\hat{\lambda}^{(i)})^T Q_X^{(i)} \hat{\lambda}^{(i)} \end{cases} \quad (16)$$

(4) 计算 $\hat{X}^{(i+1)}$:

$$\hat{X}^{(i+1)} = (A^T \hat{\mu}^{(i)} A - \hat{v}^{(i)} \cdot Q_0)^{-1} \cdot (A^T \hat{\mu}^{(i)} Y) \quad (17)$$

(5) 利用 (14) 式各点到拟合模型表面的距离。

(6) 根据 (13) 式计算权因子 $\omega^{(i)}$, 令 $P^{(i+1)} = P^{(i)} \omega^{(i)}$,

之后根据权阵定义准则重新设定权阵 $P_X^{(i+1)}, P_Y^{(i+1)}$ 。

(7) 重复步骤 (3) ~ 步骤 (6), 直到 $\|\hat{X}^{(i+1)} - \hat{X}^{(i)}\| < \delta_0$ (δ_0 为给定阈值, 本文中取为 10^{-6})。

(8) 计算单位权重中误差 $\hat{\sigma}_0$ 及球面拟合精度 $\hat{\sigma}_s$, 进行精度评定:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{(\lambda^{(i)})^T (Y - A\hat{X})}{n - t}} \\ \hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2} \end{cases} \quad (18)$$

2 算例分析

为了对本文中所构建球面拟合方法的适用性及优越性进行验证, 分别利用其对模拟球面数据、实际扫描球面数据进行拟合。

2.1 模拟数据

对于球面方程:

$$(x - 10)^2 + (y - 10)^2 + (z - 1)^2 = 200 \quad (19)$$

其坐标球心为 (10, 10, 1), 半径为 $10\sqrt{2}$ m, 利用 MATLAB 在 $x, y \in [0, 20]$ 范围内随机生成 500 个点, 并将第 12, 第 15, 第 53, 第 67 和第 465 号点替换成粗差点, 如图 1 所示。

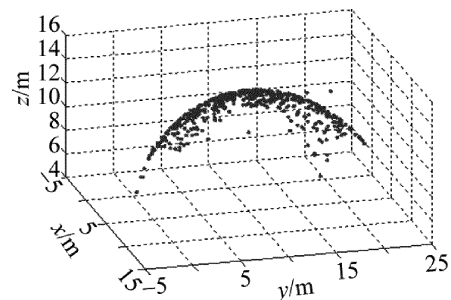


Fig. 1 Simulation of sphere point clouds

分别利用 LS 法、TLS 法、IGG III-WTLS 法对不含粗差、加入随机粗差的两组球面点云数据进行拟合, 结果如表 1 和表 2 所示。

表 1 中, 由于数据取位的原因, 各方法所得参量与实际参量之间可能存在一定偏差, 但各参量值非常接近实际参量值, 单位拟合权重中误差与球面拟合精度较小, 各方法拟合效果均比较好。其中, LS 法忽视了系数矩阵误差, TLS 法虽同时考虑了观测向量与系数矩阵误

Table 1 Fitting precision without gross errors

methods	$\Delta a /m$	$\Delta b /m$	$\Delta c /m$	$\Delta r /m$	$\hat{\sigma}_0/m$	$\hat{\sigma}_s/m$
LS method	0.0002	0	0.0016	0.0014	0.08004	0.00282
TLS method	0.0002	0	0.0015	0.0014	0.08004	0.00282
IGG III-WTLS method	0.0005	0	0	0.0008	0.00112	0.00285

Table 2 Fitting precision with gross errors

methods	$\Delta a /m$	$\Delta b /m$	$\Delta c /m$	$\Delta r /m$	$\hat{\sigma}_0/m$	$\hat{\sigma}_s/m$
LS method	0.0670	0.0285	0.1754	0.2409	5.21910	0.20223
TLS method	3.5674	0.9320	11.1511	7.7432	34.33430	2.39240
IGG III-WTLS method	0.0026	0.0008	0.0035	0.0717	0.00530	0.20114

差,但未考虑各观测值的点位精度,以上两种算法的单位权重中误差 $\hat{\sigma}_0$ 均大于 IGG III-WTLS 法,拟合效果相对较差。

由表 2 可得,LS 法受粗差影响,拟合效果明显下降;TLS 法过多考虑到系数矩阵不含误差部分,拟合效果最差;IGG III-WTLS 法考虑了系数矩阵误差与观测向量误差的同时,根据点与拟合球面的相关关系,成功进行了粗差探测与合理权值替换,较好抵抗了粗差干扰,各项拟合指标均优于其它算法,拟合效果最好。

2.2 实际扫描数据

利用徕卡 Scanstation C10 地面 3 维激光扫描仪对真实场景进行扫描,获取实际球面点云数据(半径为 0.0725m),如图 2 所示。分别利用 LS 法、TLS 法、IGG III-WTLS 法对两组球面点云数据进行拟合,拟合结果如表 3 所示(表中, $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{r}$ 为球面参量 a, b, c, r 的最或然值)。

由于实验中所用球面点云数据经过粗差剔除等处理,因此所含误差较少,由表 3 可知,各算法所求参量

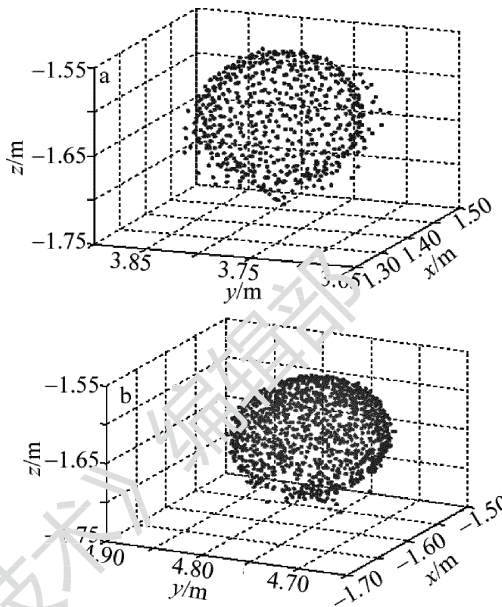


Fig. 2 Real scanning datas of sphere point clouds
a—spherical I b—spherical II

较为接近,单位权重中误差、球面拟合精度较小,拟合效果较为理想。其中,由于数据纯度较高,因此 LS 法

Table 3 Real spherical parameters and fitting precision

samples	methods	\hat{a}/m	\hat{b}/m	\hat{c}/m	\hat{r}/m	$\Delta r /m$	$\hat{\sigma}_0/m$	$\hat{\sigma}_s/m$
spherical I	LS method	0.0099	5.3443	-1.6388	0.0735	0.0010	7.7080×10^{-5}	5.0800×10^{-3}
	TLS method	0.0099	5.8443	-1.6388	0.0735	0.0010	7.7080×10^{-5}	5.0800×10^{-3}
	IGG III-WTLS method	0.0063	5.8454	-1.6357	0.0724	0.0001	1.0440×10^{-6}	9.4506×10^{-4}
spherical II	LS method	1.3982	3.7690	-1.6291	0.0736	0.0011	8.2813×10^{-4}	5.4274×10^{-3}
	TLS method	1.3982	3.7691	-1.6291	0.0736	0.0011	8.2813×10^{-4}	5.4278×10^{-3}
	IGG III-WTLS method	1.3963	3.7694	-1.6247	0.0717	0.0008	1.0084×10^{-5}	7.0619×10^{-4}

与 TLS 法计算结果基本一致,仅球 2 参量 b 相差了 0.0001m;LS 法、TLS 法、IGG III-WTLS 法所得球标靶 1 半径 r 相对误差分别为 1.38%, 1.38%, 0.14%, LS 法、TLS 法、IGG III-WTLS 法所得球标靶 2 半径 r 相对误差分别为 1.52%, 1.52%, 1.10%, 同时 IGG III-WTLS 法两项精度评定指标均小于 LS 法及 TLS 法,因此,IGG III-WTLS 法拟合效果优于其它两种算法,所得参量解更可靠。

3 结论

(1) 由于地面 3 维激光扫描点云各点精度不等,依据广义极大似然估计各权函数特点及其适用范围,选用 IGG III 方案对加权总体最小二乘球面拟合算法进行改进,提出了 IGG III-WTLS 点云拟合算法。该算法

同时考虑了拟合模型系数矩阵误差与观测向量误差,并可在模型参量解算过程中,通过计算点与模型的相关关系,自适应地调整各点拟合权值,优化拟合权阵。模拟球面数据及实际扫描球面数据的拟合实例表明,该算法具备较好的可行性及优越性,利用该算法拟合得到的球心坐标可靠性更高。

(2) 基于 IGG III 方案的加权总体最小二乘点云拟合算法较最小二乘法、总体最小二乘法更为稳健,但在解算过程中,当数据量过大时,由于权值的自适应修正过程较为复杂,迭代计算较为繁琐,解算所需时间较多,如何提高解算效率值得进一步深入研究。

参考文献

[1] LU T D, ZHOU Sh J. Sphere target fixing of point cloud data based on TLS [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2009, 29(4):

- 102-105 (in Chinese).
- [2] YUAN B, YUE D J, ZHAO Y Y. Spherical target positioning of terrestrial 3-D laser scanning based on robust weighted total least squares method [J]. Site Investigation Science and Technology, 2013(1): 19-22 (in Chinese).
- [3] LU T D, ZHOU Sh J. An iterative algorithm for total least squares estimation [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(11): 1351-1354 (in Chinese).
- [4] OU J X, LI M F, WANG Y M. Plane fitting of point clouds based on robust weighted total least squares [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2014, 34(3): 160-163 (in Chinese).
- [5] LI M F, OU J X, TAN D. Study on fixed weight methods in plane fitting of point clouds based on weighted total least squares [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2015, 35(3): 428-432 (in Chinese).
- [6] CANG G H, YUE J P. Plane fitting of point clouds based on weighted total least squares adjustment [J]. Laser Technology, 2014, 38(3): 307-310 (in Chinese).
- [7] YUAN Q, LOU L Zh, CHEN W X. Applying weighted total least-squares to the plane point cloud fitting of terrestrial laser scanning [J]. Bulletin of Surveying & Mapping, 2011, 30(3): 1-3 (in Chinese).
- [8] SHEN Y Zh, LI B F, CHEN Y. An iterative solution of weighted total least-squares adjustment [J]. Journal of Geodesy, 2010, 85(4): 229-238.
- [9] CHEN W X, CHEN Y, YUAN Q. Application of weighted total least-squares to target fitting of three-dimensional laser scanning [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2010, 30(5): 90-96 (in Chinese).
- [10] BURKHARD S, YARON A F. On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations [J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(6): 373-383.
- [11] BURKHARD S, ANDREAS W. On weighted total least-square adjustment for linear regression [J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7): 415-421.
- [12] GONG X Q, LI Zh L. A robust weighted total least squares method [J]. Acta Geodaetica Et Cartographica Sinica, 2014, 43(9): 888-894 (in Chinese).
- [13] WANG X Zh, TAO B Z, QIU W N. Advanced surveying adjustment [M]. Beijing: Survey and Mapping Press, 2006: 73-89 (in Chinese).
- [14] WANG H Y, ZHANG Y. Data processing of laser rangefinder based on robust estimation [J]. Journal of Atmospheric and Environmental Optics, 2007, 2(3): 228-231 (in Chinese).
- [15] WU J F, YANG Y X. Robust estimation for correlated GPS baseline vector network [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2001, 30(3): 247-251 (in Chinese).
- [16] GONG X Q, LI Zh L. A robust mixed LS-TLS based on IGG II scheme [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2011, 36(4): 462-466 (in Chinese).