

文章编号: 1001-3806(2017)03-0406-05

## 数字全息波前准确重建的实验研究

向东, 桂进斌\*, 刘超, 郑立婷, 楼宇丽, 宋庆和  
(昆明理工大学 理学院 激光研究所, 昆明 650500)

**摘要:** 为了得到数字全息图波前的准确重建场, 采用常见的波前重建算法进行实验研究和理论分析, 得到了物光波通过非单一介质传播时的等效距离, 并利用该等效距离修改常用波面重建公式中的相关参量, 与柯林斯公式对数字全息图进行重建的结果进行比较分析, 发现当物光波通过非单一介质时, 采用等效距离修正的重建公式或者柯林斯公式均能得到准确的数字全息再现像。结果表明, 采用等效距离对数字全息图进行波前重建的结果与采用柯林斯公式重建的结果一致, 此方法能够简化光波通过非单一介质时对数字全息图的波前准确重建。该研究结果可为显微数字全息及数字全息检测应用提供有益的参考。

**关键词:** 全息; 等效重建距离; 柯林斯公式; 衍射计算

**中图分类号:** O438.1      **文献标志码:** A      **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2017.03.020

### Experiment research of accurate wavefront reconstruction of digital holography

XIANG Dong, GUI Jinbin, LIU Chao, ZHENG Liting, LOU Yuli, SONG Qinghe  
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** In order to obtain accurate wavefront reconstruction field of digital holography, theoretical analysis and experiments of common wavefront reconstruction algorithms were made. Equivalent distance of light wave propagating through single medium was obtained. The related parameters commonly used in wavefront reconstruction formula were modified by using equivalent distance. The results of reconstruction of digital hologram with Collins formula and with equivalent distance were compared and analyzed. It was found that when light passing through non single medium, accurate digital holographic image could be obtained by reconstruction formula using Collins formula or equivalent distance correction. The results show that the results of wavefront reconstruction using equivalent distance of digital hologram are consistent with the results obtained by Collins formula reconstruction. This method can be used to simplify wavefront reconstruction of digital hologram when light wave passes through single medium. The results provide useful reference for microscopic digital holography and application of digital holography detection.

**Key words:** holography; equivalent reconstruction distance; Collins formula; diffraction calculation

## 引言

随着计算机处理速度的提高以及电荷耦合器件(charge-coupled device, CCD)的问世, 数字全息已经成为一个十分活跃的研究领域<sup>[1-10]</sup>。数字全息技术使用CCD记录数字全息图, 通过衍射的数值计算在计算机

的虚拟空间重建物光场的波前。常用的两种波前重建算法是基于菲涅耳衍射的一次傅里叶变换法和基于角谱衍射理论的两次傅里叶变换法<sup>[11-12]</sup>。在通常的实验验证过程中, 在使用这两种方法进行波前重建时, 再现距离通常取物平面到全息面的测量距离, 并未考虑物光波在不同介质中传播时对测量距离的影响。一般情况下, 这种计算是基本准确的, 但在一些特殊的应用场合, 如要求高分辨成像, 或物光波通过其它介质距离较长时, 其影响将不能被忽略。如在显微数字全息中, 3维洋葱细胞通常放置在液体介质中进行检测, 显然, 倘若还是采用测量距离值作为再现距离进行波前重建, 并不能得到正确的重建结果。

通过对数字全息系统焦深<sup>[13]</sup>的分析得知, 只要在系统焦深范围内进行数字全息波前重建, 都可得到准

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61565011; 61540075; 61465005); 云南省自然科学基金资助项目(2014FB132); 昆明理工大学人才培养资助项目(kksy201307134)

作者简介: 向东(1992-), 男, 硕士研究生, 从事全息3维显示的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: jinbingui@163.com

收稿日期: 2016-08-09; 收到修改稿日期: 2016-11-14

确的像面结果,当重建距离超出数字全息系统的焦深范围时,需要分析影响系统准确重建距离的因素。本文中通过对物光波通过非单一介质后对重建距离的影响进行了实验研究。研究表明,物光波通过常用分束镜时引起了重建距离的变化,使得重建距离超出了数字全息重建图像的焦深范围。因而,直接采用测量距离作为再现距离进行波前重建通常都不能得到清晰的再现像。本文将光波在介质中传播时的波长转换为等效波长,进而计算出等效的重建距离,采用等效距离对全息图波前重建公式进行修正,得到准确的计算结果,并与傍轴近似的柯林斯公式计算结果<sup>[14-17]</sup>进行比较。结果表明:使用等效距离修正的重建公式,能简便地实现数字全息波面的准确重建计算。研究结果可为显微数字全息及数字全息检测应用提供有益的参考。

### 1 数字全息波面重建的实验研究

数字全息记录的简图如图 1 所示。 $x_0y_0$  为物平面,激光自左向右被分束镜  $S_1$  分为两束光,其中由  $S_1$  透射的光经过全反射镜  $M_1$  反射,由准直扩束后投向分束镜  $S_2$ ,经过  $S_2$  反射的光波到形成参考光。通过  $S_1$  反射的光波经过反射及扩束以后形成照明光投射向物体,从物体表面散射的光波通过半反半透镜  $S_2$  到达 CCD 形成物光。两束光干涉后由 CCD 记录得到全息图,计算机上进行实时采集存储,然后在计算机上对数字全息图进行重建。重建时可使用下面两种算法进行。

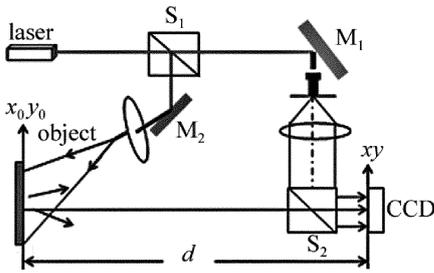


Fig. 1 Experiment configuration for digital holography recording

#### 1.1 基于菲涅耳衍射的一次傅里叶变换法

设到达 CCD 的物光波和参考光波的复振幅分别为  $O$  和  $R$ ,则记录的光强  $I_h$  可以表示为:

$$I_h = |O|^2 + |R|^2 + O^*R + OR^* \quad (1)$$

物体到 CCD 的距离为  $d$ ,重建光波为单位振幅的平面波,使用重建光波照明全息图后的透射光波经过距离为  $d$  的衍射后,在满足傍轴近似的条件下,再现光场复振幅分布为:

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_h(x, y) \times \exp\left\{ \frac{jk}{\lambda d} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy \quad (2)$$

式中,  $\lambda$  为波长,波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $xy$  和  $x_0y_0$  分别为全息面坐标系和重建像面坐标系。设 CCD 的尺寸为  $L_x \times L_y$ ,像素数为  $M \times N$ ,则取样间距  $\Delta x = L_x/M$ ,  $\Delta y = L_y/N$ 。(2) 式可用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 表示为:

$$U(p\Delta x_0, q\Delta y_0) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d} \times \exp\left[ \frac{jk}{2d} (p\Delta x_0)^2 + (q\Delta y_0)^2 \right] \times \mathcal{F} \left\{ I_h(m\Delta x, n\Delta y) \times \exp\left[ \frac{jk}{2d} ((m\Delta x)^2 + (n\Delta y)^2) \right] \right\}_{\substack{p\Delta x_0, q\Delta y_0 \\ \lambda d, \lambda d}}, \quad (p, m = -\frac{M}{2} \sim \frac{M}{2} - 1; q, n = -\frac{N}{2} \sim \frac{N}{2} - 1) \quad (3)$$

式中,  $I_h(m\Delta x, n\Delta y)$  为全息面  $I_h(x, y)$  的离散形式,  $m$  和  $n$  为取样点对应的序号;  $\Delta x_0$  和  $\Delta y_0$  为离散傅里叶变换后空域的取样间隔,  $p$  和  $q$  为取样点对应的序号,根据 Shannon 采样定理,其取样间隔分别为  $\Delta x_0 = \frac{\lambda d}{M\Delta x}$ ,  $\Delta y_0 = \frac{\lambda d}{N\Delta y}$ 。

#### 1.2 基于角谱衍射理论的波前重建

当采用照明光波  $C(x, y)$  照射全息图  $I_h(x, y)$ , 出射光波的傅里叶变换可以表示为:

$$G_0(f_x, f_y) = \mathcal{F} \{ C(x, y) I_h(x, y) \} \quad (4)$$

根据角谱衍射理论,在离全息面距离为  $d$  的观察面,再现光场复振幅的离散形式为:

$$U(p\Delta x_0, q\Delta y_0) = \mathcal{F}^{-1} \{ G_0(m\Delta f_x, n\Delta f_y) \times \exp[jkd \sqrt{1 - (\lambda m\Delta f_x)^2 - (\lambda n\Delta f_y)^2}] \}, \quad (p, m = -\frac{M}{2} \sim \frac{M}{2} - 1; q, n = -\frac{N}{2} \sim \frac{N}{2} - 1) \quad (5)$$

式中,  $\mathcal{F}^{-1}$  表示快速傅里叶逆变换,频率的取样间隔  $\Delta f_x = L_x^{-1}$ ,  $\Delta f_y = L_y^{-1}$ 。

#### 1.3 波前重建距离误差的实验研究

在实际实验系统中,重建距离通常取记录时物体到 CCD 的测量距离,下面给出常用系统的实验结果。实验物体为美国空军 (United States Air Force, USAF) 分辨率测试板,采用图 1 的数字全息记录系统。实验研究中,照明光波波长  $\lambda = 632\text{nm}$ , CCD 的像元宽度为  $0.00465\text{mm}$ ,总像素数  $N \times N = 1024 \times 1024$ ,对应尺寸为  $L_x \times L_y = 4.76\text{mm} \times 4.76\text{mm}$ 。在通常的数字全息实验系统中,分束镜是必需的光学元件,故以分束镜为例研究介质空间对波面传播的影响,使用两种不同尺寸的分束镜进行实验研究。采用的分束镜光轴方向的厚度为  $75\text{mm}$  时,测得物体到 CCD 的距离  $d = 200\text{mm}$  及

$d = 150\text{mm}$  两组数据;当分束镜光轴方向的厚度为  $25.4\text{mm}$  时,测得物体到 CCD 的距离  $d = 65\text{mm}$ ,分束镜的折射率  $n = 1.5$ 。采用一次 FFT 和基于角谱衍射理论两次傅里叶变换法对数字全息图进行重建,图 2 和图 3 中分别给出再现距离为  $200\text{mm}$ ,  $150\text{mm}$  和  $65\text{mm}$  时的重建图像。观察可知,当光波在不同介质中传播时,对于不同记录距离的数字全息图,采用两种同波前重建算法对其进行再现时,均不能得到清晰的再现像。

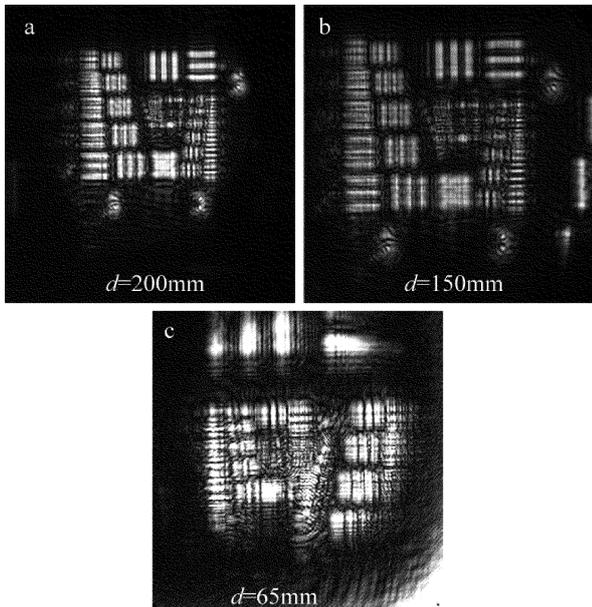


Fig. 2 Wavefront reconstruction based on fast Fourier transform

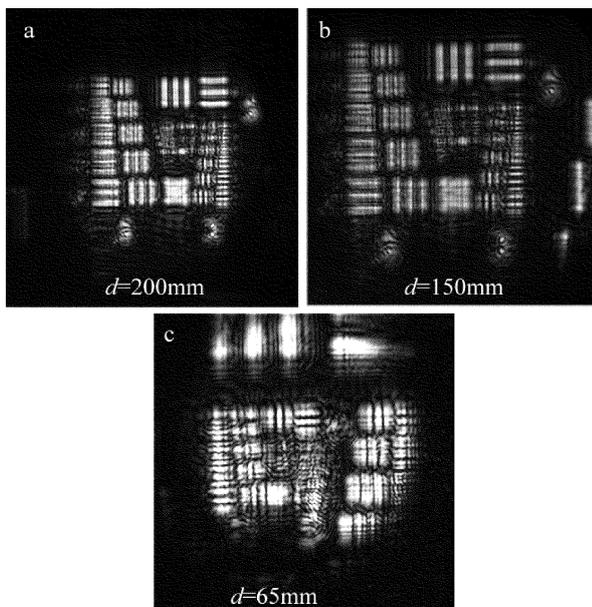


Fig. 3 Wavefront reconstruction based on angular spectrum diffraction theory

## 2 等效距离的计算

当光在不同的介质中传播时,其改变的是光波的波长。当物光波在厚度为  $d_b$  分束镜中传播,相较于光

在真空中传播,其相当于在距离为  $d_b$  的长度内填充折射率为  $n$  的介质。设光在真空、介质中传播的波长分别为  $\lambda$  和  $\lambda_0$ ,传播速率分别为  $c$  和  $v$ ,则在介质中波长为:

$$\lambda_0 = \frac{c}{nv} = \frac{\lambda}{n} \quad (6)$$

对于菲涅耳积分表达式,将(6)式带入(2)式中,令物光波传播到分束镜入射面的复振幅为  $U_b(x_b, y_b)$ ,出射面复振幅为  $U(x_{o,b}, y_{o,b})$ ,则光波介质中传播时的菲涅耳衍射积分为:

$$U(x_{o,b}, y_{o,b}) = \frac{\exp(j2\pi d_b n/\lambda)}{j\lambda d_b/n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_b(x_b, y_b) \times \exp\left\{-\frac{j\pi}{\lambda d_b/n} [(x_{o,b} - x_b)^2 + (y_{o,b} - y_b)^2]\right\} dx_b dy_b \quad (7)$$

对于图 1 中数字全息记录系统,考虑到光波在折射率为  $n$  中传播时,将(7)式与(2)式对比可以知道,在分束镜中光波实际走过的距离为  $d_b/n$ ,因而实际的距离  $d_e$  可以等效为:

$$d_e = d - d_b + \frac{d_b}{n} \quad (8)$$

即物光波在实际的介质中传播时的等效距离可以通过(8)式计算得到,当采用厚度为  $75\text{mm}$  和  $25.4\text{mm}$  的分束镜时,其计算得到对应的等效记录距离分别为  $d_e = 175\text{mm}$ ,  $d_e = 125\text{mm}$  和  $d_e = 56\text{mm}$ 。采用一次 FFT 和基于角谱衍射理论的两次傅里叶变换法对数字全息图进行重建,结果如图 4 和图 5 所示。观察可知,采用等效距离重建数字全息图时,得到了比较清晰的再现像。与第 1.3 节中的重建结果比较知,由于分束镜厚度对重建距离的影响,使得实际的记录距离的光线的光程发生了变化,因而直接采用测量距离作为再现距

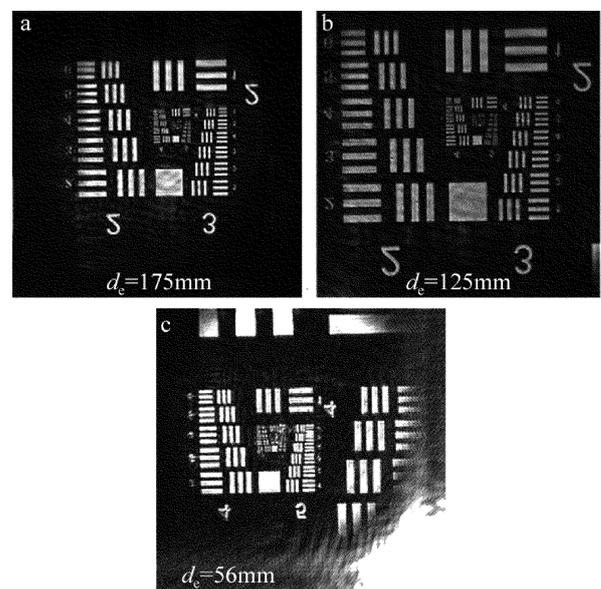


Fig. 4 Wavefront reconstruction based on fast Fourier transform

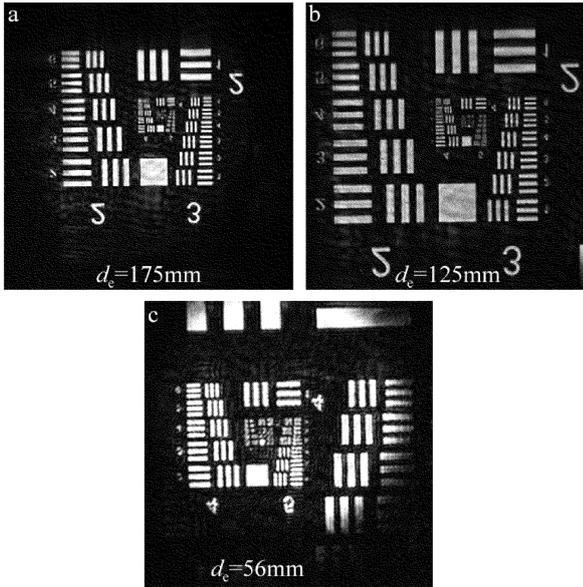


Fig. 5 Wavefront reconstruction based on angular spectrum diffraction theory

离进行重建,并不能获得准确的重建像。

### 3 重建图像的焦深分析

对于一次傅里叶变换系统的焦深范围,参考文献 [13] 中给出了详细的推导证明。根据文献中的研究,数字全息重建图像的系统焦深定义如下:

$$2|z_a - z_i| \approx 3 \frac{\lambda z_i^2}{L^2} \quad (9)$$

式中,  $z_a$  和  $z_i$  分别是实际的再现距离和理想的成像距离。不难看出,随着理想像重建距离  $z_i$  的增加,重建图像的系统焦深会增加;而随着全息图宽度的增加,系统焦深会随之下降。根据第 2 节中的结论,当再现距离为  $d_e = 175\text{mm}$ ,  $L$  取 CCD 的面尺寸,代入 (9) 式,  $|z_a - z_i| = 1.3\text{mm}$ , 即重建时实际能成清晰像的系统焦深范围为  $(175 \pm 1.3)\text{mm}$ , 显然,若采用  $200\text{mm}$  进行数字全息波前重建,已经超出了焦深范围,因而不能得到清晰的再现像。

### 4 波前重建结果讨论

#### 4.1 重建像面准确位置的确定

对于采用等效距离计算得到的重建图像,如图 6 所示。在一系列对图像清晰度的评价方法中,有一种方法是通过图像的高频与低频部分的比值来衡量重建像的清晰度,比值的最大值为图像最清晰处<sup>[18]</sup>。采用等效距离修改后的公式对图像进行重建,对重建图像做傅里叶变换,将零级视为低频,其余部分视为高频,在系统的焦深范围内,采用自动聚焦的方式,对于不同记录距离的重建图像,其高频与低频的比值曲线如图 7 所示。由分析可知,重建图像在  $175.3\text{mm}$  处有

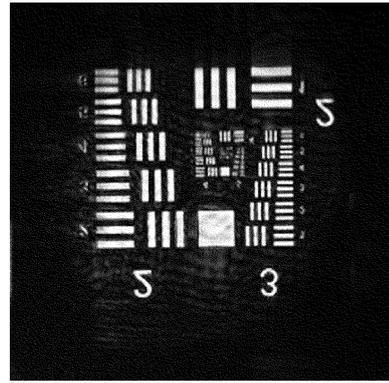


Fig. 6 Wavefront reconstruction based on equivalent distance

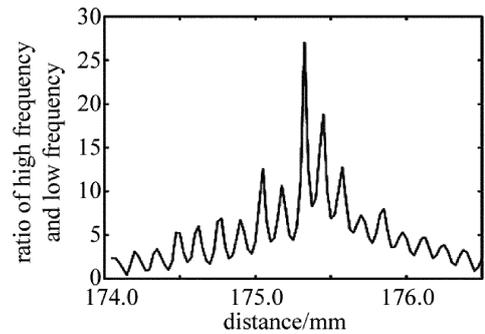


Fig. 7 Ratio of high frequency and low frequency

最大值,即此处成像是清晰的位置,这与之前计算得到等效距离的值是基本一致的,因而采用等效距离修正后的公式能较好地成像。

#### 4.2 重建图像与柯林斯公式比较

物光波通过实际的光学系统时,通常采用柯林斯公式进行研究。光波通过介质时,轴对称傍轴光学系统可以由  $2 \times 2$  的矩阵  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  描述<sup>[14]</sup>。设入射平面为全息面,出射平面为观察面,坐标分别由  $xy$  和  $x_o y_o$  表示。根据柯林斯建立的入射平面光波场  $I_h(x, y)$  与出射平面光波场  $U(x_o, y_o)$  的关系<sup>[15]</sup>, 观察面复振幅的离散形式可以表示为:

$$U(p\Delta x_o, q\Delta y_o) = \frac{\exp(jkL_{\text{axis}})}{j\lambda B} \times \exp\left\{\frac{jkD}{2B}[(p\Delta x_o)^2 + (q\Delta y_o)^2]\right\} \times \mathcal{F}\left\{I_h(m\Delta x, n\Delta y) \times \exp\left[\frac{jkA}{2B}((m\Delta x)^2 + (n\Delta y)^2)\right]\right\}_{f_x = \frac{p\Delta x_o}{\lambda B}, f_y = \frac{q\Delta y_o}{\lambda B}}, \quad (p, q, m, n = -N/2, -N/2 - 1, \dots, N/2 - 1) \quad (10)$$

光传输矩阵中元素  $ABCD$  的值分别是  $A = 1, -B = d - d_b + \frac{d_b}{n}, C = 0, D = 1, L_{\text{axis}}$  为  $ABCD$  光学系统的轴上光程,  $N$  为 CCD 的像素数,  $L$  为 CCD 面尺寸,  $L_o$  为出射面光波场的空域宽度(即出射平面的尺寸),  $L_o$  可以表

示为:

$$L_0 = \frac{N\lambda B}{L} \quad (11)$$

为便于讨论,选取记录距离  $d = 200\text{mm}$  时的数字全息图进行重建,图像如图 8 所示。采用柯林斯公式重建像与采用等效距离修正后的公式进行波前重建像,取第 30 行的复振幅的值做差,如图 9 所示。从图 9 中可知,光波通过不同尺寸的分束镜时,采用柯林斯公式和采用基于等效距离对数字全息图重建时有基本一致的结果。

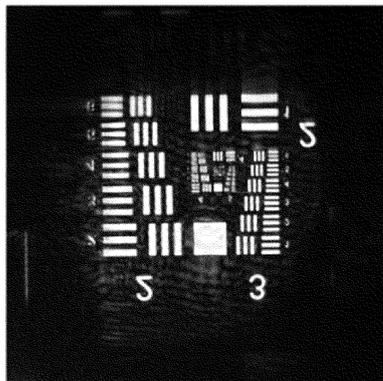


Fig. 8 Reconstruction based on Collins formula

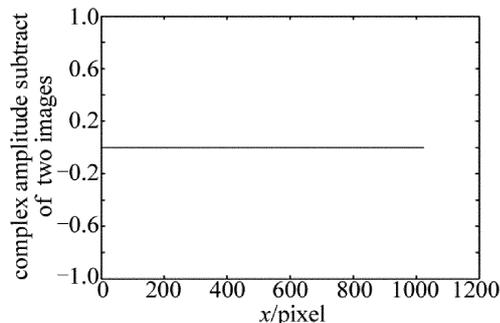


Fig. 9 Complex amplitude subtract of two reconstruction images in different method

## 5 结论

当光波在非单一介质中传播时,给出了将记录距离等效为介质中传播距离的方法。结果表明,计算光波在介质中传播的等效距离,并采用等效距离对数字全息图进行波前重建的结果与采用柯林斯公式重建的结果是一致的。此方法相较于采用柯林斯公式对数字全息图进行波前重建更简单方便,期望此方法能对数字全息图的波前重建提供有益的参考。

### 参 考 文 献

[1] PICART P, LEVAL J, MOUNIER D, *et al.* Some opportunities for

- vibration analysis with time averaging in digital Fresnel holography [J]. *Applied Optics*, 2005, 44(3):337-343.
- [2] LI J Ch, CHEN Zh Y, ZHAO Sh, *et al.* Anti-calculation and its application of collins formula in wavefront reconstruction [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2005, 32(11): 1489-1494 (in Chinese).
- [3] KEMPER B, GERT B B. Digital holographic microscopy for live cell applications and technical inspection [J]. *Applied Optics*, 2008, 47(4): A52-A61.
- [4] WANG H Y, ZHAO B Q, SONG X F. Focal depth of Fresnel digital holography imaging system [J]. *Acta Optical Sinica*, 2009, 29(2): 374-377 (in Chinese).
- [5] HU H F, WANG X L, ZHAI H Ch, *et al.* Time resolved optical diagnosis of intense femtosecond laser ablation of silica glass [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(1): 01709 (in Chinese).
- [6] QIAN X F. Holography wavefront reconstruction adjustable magnification phase distortion [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(5): 48-57 (in Chinese).
- [7] ZHOU W J, HU W T, GUO L, *et al.* Experimental study of digital holographic tomography by a few projections [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(12): 8499-8511 (in Chinese).
- [8] PASCAL P, LEVAL J. General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 2008, A25(7): 1744-1761.
- [9] GUI J B, SONG Q H, LI J Ch, *et al.* Realization and comparison of wave front reconstruction algorithms commonly used in colour digital holography [J]. *Laser Technology*, 2015, 39(2): 176-181 (in Chinese).
- [10] SONG X F, YU M J, WANG H Y, *et al.* Effect of reference intensity ratio to object on reconstructed image quality in digital holography [J]. *Laser Technology*, 2014, 38(6): 859-862 (in Chinese).
- [11] LI J Ch. Diffraction computing and digital holography [M]. Beijing: Science Press, 2014: 240-249 (in Chinese).
- [12] POON T C. Digital holography and three-dimensional display: principles and applications [M]. New York, USA: Springer, 2006: 110-118.
- [13] LI J Ch. Focal depth research of digital holographic reconstructed image [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(13): 1342023 (in Chinese).
- [14] COLLINS S A. Lens-systems diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1970, 60(9): 1168-1177.
- [15] LI J Ch, LI Ch G. Algorithm study of collins formula and inverse collins formula [J]. *Applied Optics*, 2008, 47(4): A97-A102.
- [16] LÜ B D. Laser optics-beam description, transformation and transmission optical cavity of technical physics [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2003: 33-43 (in Chinese).
- [17] LI J Ch, LOU Y L, GUI J B, *et al.* Digital holographic detection of optical matrix elements in optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(2): 0209001 (in Chinese).
- [18] JIANG H Zh, ZHAO J L, DI J L, *et al.* Numerically correcting the joint misplacement of the sub-holograms in spatial synthetic aperture digital Fresnel holography [J]. *Optics Express*, 2009, 19(21): 18836-18842.