

文章编号: 1001-3806(2016)06-0871-05

## 一种优化超稳光学腔的数值方法

叶森<sup>1</sup>, 龙云<sup>2</sup>, 王如泉<sup>2</sup>, 曹强<sup>1\*</sup>, 肖三强<sup>1</sup>, 赵宏鸣<sup>3</sup>, 杜渐<sup>3</sup>

(1. 北京理工大学机械与车辆学院, 北京 100081; 2. 中国科学院物理研究所, 北京 100190; 3. 北京仿真中心 航天系统仿真国家重点实验室, 北京 100854)

**摘要:** 为了降低超稳光学腔的振动敏感度, 在综合考虑振动所导致的腔镜位移及转动后, 定义了一个新的表征腔体振动敏感度的参量。采用有限元数值分析方法, 用所定义的单一参量优化了一个典型的立式超稳光学腔。优化过程考虑了腔体端面直径、支撑孔位置和深度等关键几何参量。结果表明, 优化后的腔体结构和支撑方式可以明显降低超稳腔对振动的敏感度, 腔体稳定性比优化前提高 1.5 倍。该优化方法操作性强, 能够有效提升超稳腔仿真和设计的效率。

**关键词:** 激光光学; 超稳光学腔; 有限元分析; 超精密测量

**中图分类号:** TN243

**文献标志码:** A

**doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2016.06.020

### A numerical optimization method for ultra-stable optical cavities

YE Sen<sup>1</sup>, LONG Yun<sup>2</sup>, WANG Ruquan<sup>2</sup>, CAO Qiang<sup>1</sup>, XIAO Sanqiang<sup>1</sup>, ZHAO Hongming<sup>3</sup>, DU Jian<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 2. Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 3. Science and Technology on Special Simulation Laboratory, Beijing Simulation Center, Beijing 100854, China)

**Abstract:** In order to reduce the vibration sensitivity of ultra-stable optical cavity, a new parameter was defined to characterize the vibration sensitivity of optical cavity by considering the displacement and rotation of mirrors. Based on the finite element analysis method, a typical vertical ultra-stable optical cavity was optimized by using the defined single parameter. In the optimization process, the key geometric parameters, including the cavity diameter, position and depth of supporting hole were taken into account. The results show that the optimized cavity structure and support method could obviously reduce the vibration sensitivity of ultra-stable cavity. The stability of cavity was 1.5 times higher than that before optimization. The optimization method with good feasibility could improve the efficiency of simulation and design of ultra-stable cavities.

**Key words:** laser optics; ultra-stable optical cavity; finite element analysis; ultra-precision measurement

## 引言

超稳腔在光频原子钟<sup>[1]</sup>、重力波测量仪<sup>[2]</sup>、碳同位素丰度测量仪<sup>[3]</sup>、原子的激光冷却<sup>[4]</sup>实验以及物理常数测定<sup>[5-6]</sup>等领域具有重要的作用。顾名思义, 稳定性是超稳腔最重要的指标之一。现代的超稳腔通常采用具有极低温度系数的材料制作, 并放置于严格控温的真空系统中进一步减小温度和气流的影响。而对振动的隔离主要依赖被动或主动隔振平台。虽然这类平台一般对于 1Hz ~ 100Hz 范围的振动具有良好的减震效果, 然而振动仍然是制约超稳腔稳定性最主要的因

素之一, 因此, 从腔体和支撑结构设计上尽量降低振动敏感性成为目前研究的焦点<sup>[7-16]</sup>, 特别是近年来发展可搬运的超稳腔系统的趋势, 使得优化振动敏感度的需求变得更加迫切。

目前有关优化超稳腔稳定性的研究已经取得很多进展, 研究对象包括立式腔体<sup>[7-12]</sup>、水平放置的圆柱形腔体<sup>[13]</sup>和球形腔体<sup>[14-16]</sup>等。美国国家标准与技术研究院 (National Institute of Standards and Technology, NIST) 的 CHEN 等人<sup>[8]</sup>和法国国家科学研究院 (Centre National de la Recherche Scientifique, CNRS) 的 MILLO 等人<sup>[9]</sup>研究了立式腔体在振动作用下两侧腔镜的形变与腔镜位置变化的关系。上海工程技术大学的 CAO 等人<sup>[13]</sup>通过改变相关参量, 对两 U 型片支撑和双横梁支撑这两种圆柱体腔的支撑方式进行了数值模拟, 得到了腔体的形变图, 发现通过改进腔的支撑方式和调整支撑位置, 可以降低腔长对振动的敏感度。NIST 的 LEIBRANDT<sup>[14]</sup>等人以球形腔为例, 描述了腔

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51375051); 国家九七三重点基础研究计划资助项目 (2013CB922002)

作者简介: 叶森 (1993-), 男, 硕士研究生, 现主要从事激光技术应用方面的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: caoqiang@bit.edu.cn

收稿日期: 2015-11-09; 收到修改稿日期: 2015-12-18

镜在振动中由于平移和旋转导致的腔体长度的变化,并特别强调镜面转动这个2阶小量对于高精度的超稳腔仍然是重要的。然而这些研究均采用多个指标去全面的表征腔体的振动敏感性,在优化设计中需要根据经验在各种指标间做权衡取舍,其具体的优化步骤很少见于报道。如果可以仅用一个指标集中体现腔的稳定性,将极大地提高优化工作的可操作性。本文中从这个思想出发,根据经验选取了一个评价参量对超稳腔进行优化,并取得了较好的效果。

### 1 有限元分析模型

图1是1个立式腔体的几何结构图<sup>[8]</sup>,以此作为优化的基准腔体。腔体的长度、最大直径均为100mm,腔镜直径为25.4mm,厚度为6mm,腔体端面直径 $d_e=40\text{mm}$ ;距腔体上端20mm处,设置一个直径为3mm的通孔,作为抽真空孔;腔体中部有一支撑环,其厚度 $l_r=12.7\text{mm}$ ,宽10mm;支撑环上均匀布置3个阶梯孔,阶梯孔的大孔作为支撑孔,直径为5.6mm,深度 $l_h=4\text{mm}$ ,底面与支撑结构连接,支撑孔的相对位置 $l_o=45\text{mm}$ , $l_e=5\text{mm}$ ;阶梯孔的小孔用于穿过悬挂腔体的细线,直径为2mm。

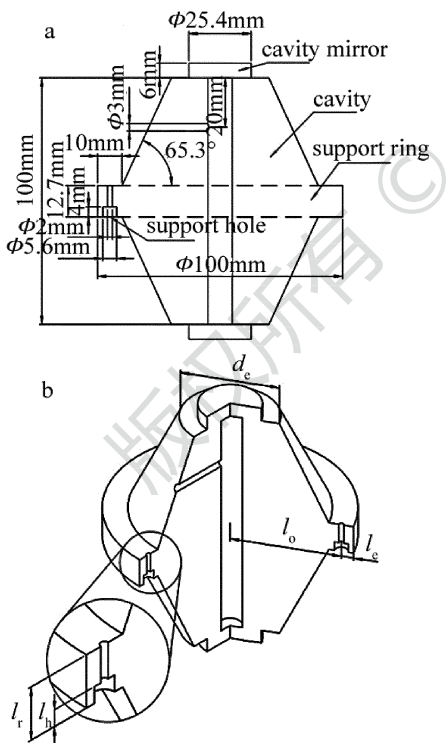


Fig. 1 a—geometry and size of reference cavity b—key geometric parameters of the cavity

腔体与腔镜都采用ULE材料制造。ULE材料的典型参量如下:质量密度 $\rho=2.21 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ,弹性模量 $E=6.67 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ,泊松比 $\nu=0.17$ 。由于在实际应用中超稳腔被放置在一个能有效消除高频环境振动

的隔震平台上,因而可只考虑低频(小于100Hz)振动的的影响。此时振动引起的形变可以等效于在该方向上恒定加速度所引起的形变<sup>[8]</sup>。因此,本文中通过在腔体上施加竖直向下的1g加速度( $g$ 为当地的重力加速度),研究振动竖直分量引起的腔体形变。在腔体支撑结构上,限制支撑面在竖直方向上的移动,设定支撑面在水平方向上可自由移动<sup>[9]</sup>。对于立式腔体,有 $\Delta L/L = -\rho g L / (2E)$ ,其中 $L$ 为腔长, $\Delta L$ 为腔长变化量,该公式为有限元分析的计算公式<sup>[8]</sup>。在有限元分析中的网格划分上,将腔体划分为若干个边长小于2mm的六面体,并在腔体的关键位置,如支撑平面及上下腔镜表面,将边长控制在1mm及0.5mm以下,这是目前可达到的最小的网格尺寸<sup>[17]</sup>,从而得到更高的仿真分辨率。

### 2 数值仿真方法

CHEN等人<sup>[8]</sup>和MILLO等人<sup>[9]</sup>采用有限元分析方法,利用腔镜中心的光程 $D_{\text{mid}}$ 及腔镜倾斜率 $k_{\text{mid}}$ 这两个特征参量的变化来描述腔镜的形变情况,如图2a所示。为了更好地表征腔镜的形变对共振频率的影响,采用如下方法:采用对称面将腔体对称剖开,对称面与上下两腔镜的交线分别为顶线及底线,取腔体顶、底线上与中心点距离相同的两监测点设为一组。每组两监测点的数据相减,得到该监测点本地的位移变化量,以适当的权重函数将这些本地位移变化量求和,就可以

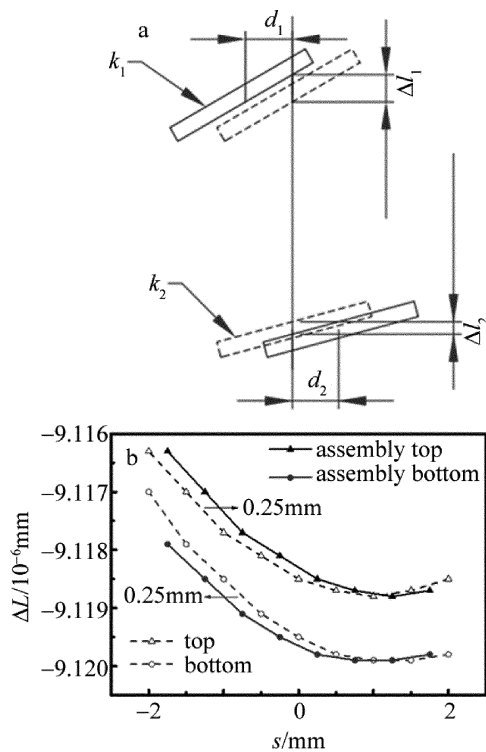


Fig. 2 a—cavity length with the change of tilt b—displacements  $\Delta L$  at various distances  $s$

得到描述腔镜整体形变的参量,如图 2b 所示。图中虚线为顶部监测点和底部监测点;沿着使  $\Delta L$  增大的方向将顶线和底线平移 0.25mm,得到装配误差曲线(见图中实线)。因为激光束一般集中于腔镜中心区域,因此监测点据腔镜中心越近,该处的位移变化量所占权重应该越高。为体现监测点位置的重要性,作者以无量纲化的半径作为权重对各组监测点位移变化量做加权平均,其表达式为:

$$D_{in} = \frac{\sum [\sqrt{(\Delta L_{t,i} - \Delta L_{b,i})^2} \times w_i]}{\sum w_i} \quad (1)$$

式中,  $\Delta L_{t,i}, \Delta L_{b,i}$  为第  $i$  组监测点的位移量;  $w_i$  为该组数据所占的权重,  $w_i = \frac{1}{1+s^2}$ ,  $s$  为监测点归一化的中心距离。  $D_{in}$  应该比  $D_{mid}$  更能体现超稳腔共振频率变化。权重系数可能有更优化的取值方法,然而仿真实验表明,这种基于物理经验的取法已经有很好的效果。考虑到有限元分析的网格密度,选取监测点间隔为 0.5mm。

仿真实验从理想的腔体(腔镜平行且腔镜中心连线与腔体对称轴重合)出发考虑振动引起的位移和形变。而实际装置必然存在装配公差。因为腔镜粘合在腔体端面,而腔体端面在加工时经过仔细研磨平整并校验过平行度,因此装配误差主要由光轴与腔镜中心轴线的不重合造成,如图 2a 所示。所以作者人为地将两腔镜沿着垂直于光轴的方向分别平移  $d_1, d_2$ , 将腔镜发生偏移后监测点处的位移变化量代入(1)式中,可得到一个新的参量  $D_{in,m}$ , 该参量可以用于评估腔体对装配误差的敏感度。由于中心点腔长变化  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = k_1 d_1 + k_2 d_2$ 。若将  $d_1, d_2$  看成常量,  $D_{in,m}$  其实也反映腔镜的倾斜状况。考虑有限元分析的网格划分,  $d_1$  和  $d_2$  取值为半个网格长度。

假设腔体各几何参量相互关联很小(适用于已经初步优化的腔体)。固定其它参量不变,用有限元方法计算待优化参量在一定区间内的  $D_{in}$  值。选取令  $D_{in}$  值最小的一段区间,在此区间计算  $D_{in,m}$  值。令  $D_{in,m}$  取值最小的值即为该参量的最优值。逐个优化所有重要的腔体参量,则可以得到一个优化的腔体几何构型。若各个腔体参量间有一定关联,可以多次循环上述过程至优化值收敛。

### 3 几何参量优化及讨论

已有的研究表明,对于一个立式超稳腔以下几何参量对振动敏感性影响最为重要,包括支撑孔深度  $l_h$ 、支撑孔的相对位置  $l_o$  和  $l_e$ 、支撑环的厚度  $l_r$  和腔体端

面直径  $d_e$ (如图 1b 所示)。

#### 3.1 支撑孔的深度 $l_h$

本文中取  $l_h \in [3.55\text{mm}, 3.69\text{mm}]$ , 在该区间内等间隔选择 13 个孔深点进行有限元分析,并计算出  $D_{in}$  和  $D_{mid}$  随孔深的变化曲线,如图 3a 所示。在  $l_h \in [3.59\text{mm}, 3.62\text{mm}]$  区间,  $D_{in}$  取值较小。进一步计算出  $D_{in,m}$  与斜率平均值  $|k_{mid}|$  随孔深的变化曲线,如图 3b 所示,当  $l_h = 3.61\text{mm}$  时,  $D_{in}$  在最小值区间,此时  $D_{in,m}$  有最小值。故选取  $l_h = 3.61\text{mm}$  作为支撑孔深度最优值。

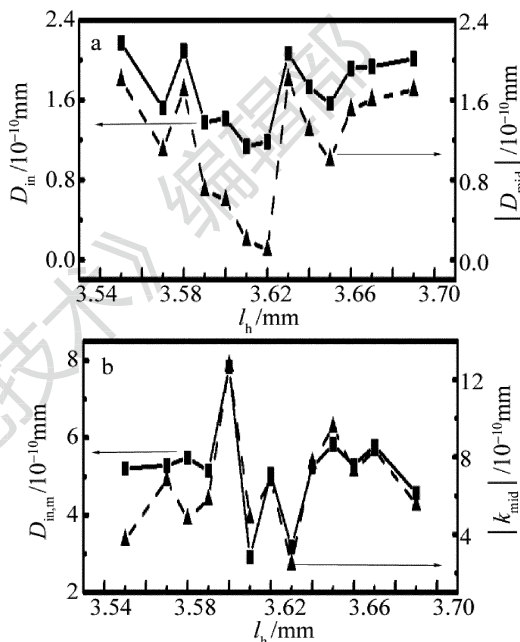


Fig. 3 a— $D_{in}$  and  $|D_{mid}|$  at various  $l_h$  b— $D_{in,m}$  and  $|k_{mid}|$  at various  $l_h$

#### 3.2 支撑孔的位置 $l_o$ 和 $l_e$

支撑孔的位置由  $l_o$  和  $l_e$  定义,计算  $D_{in}$  和  $D_{in,m}$  随  $l_o$  的变化,如图 4a 所示。当  $l_o \in [42.5\text{mm}, 45.5\text{mm}]$  时,  $D_{in}$  较小;当  $l_o = 44\text{mm}$  时  $D_{in,m}$  最小;当  $l_o > 47\text{mm}$  时,  $D_{in}$  与  $D_{in,m}$  迅速增大。致使  $D_{in}$  值迅速增大的原因可能是  $l_o$  过大及(或)伴随而来的  $l_e$  过小,特别是当  $l_e$  小于支撑孔半径时,支撑孔与支撑基底的接触面积减小,单位面积上受到的支撑力增大,导致腔长变化非线性增加。选取  $l_o = 44\text{mm}$  作为最优化值。

$D_{in}$  和  $D_{in,m}$  随  $l_e$  的变化如图 4b 所示,图中  $D_{in}$  较小(小于  $2 \times 10^{10} \text{mm}$ ),  $l_e$  对腔长变化量影响不大,说明  $l_o > 47\text{mm}$  时,腔长的非线性变化是  $l_o$  较大作用的结果。进一步观察  $D_{in,m}$  随  $l_e$  变化情况,  $l_e$  在  $0.5\text{mm} \sim 2.5\text{mm}$  时,  $D_{in,m}$  随  $l_e$  增大而减小,而此时支撑孔底面面积随  $l_e$  增大而增大,这表明支撑孔的底面面积增大会降低腔体对装配误差敏感度。  $4.5\text{mm} > l_e > 2.5\text{mm}$



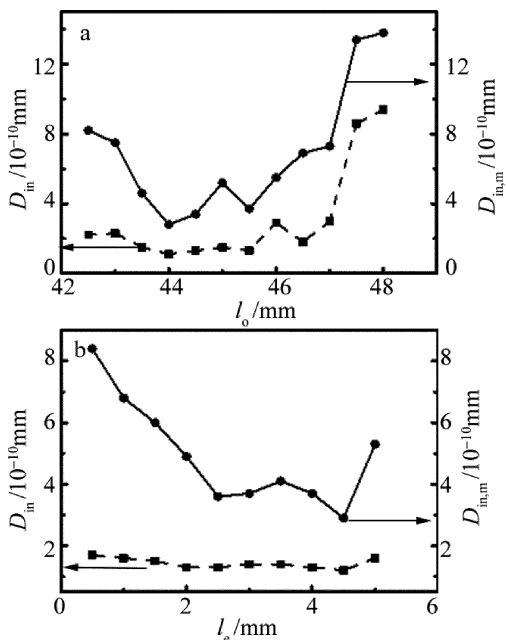


Fig. 4 a— $D_{in}$  and  $D_{in,m}$  at various  $l_o$ . b— $D_{in}$  and  $D_{in,m}$  at various  $l_e$ .  
 时,  $D_{in,m}$  基本不变, 此时支撑孔面积保持恒定,  $l_e$  对装配误差没有太大影响。考虑到  $l_e = 3\text{mm}$  时,  $D_{in,m}$  起伏最小, 因而选取  $l_e = 3\text{mm}$  作为腔体的最优化加工参量。

3.3 腔体支撑环厚度  $l_r$  及腔体端面直径  $d_e$

$D_{in}$  及  $D_{in,m}$  随  $l_r$  的变化曲线如图 5a 所示。  $D_{in} < 2 \times 10^{-10}\text{mm}$ ,  $D_{in,m}$  曲线呈 V 型, 说明支撑环的厚度过薄或过厚都会使腔体对装配误差的敏感度增加。 仅当  $l_r = 25\text{mm}$  时,  $D_{in,m}$  有最小值  $3.0 \times 10^{-10}\text{mm}$ , 选取  $l_r = 25\text{mm}$  作为最优化的加工参量。

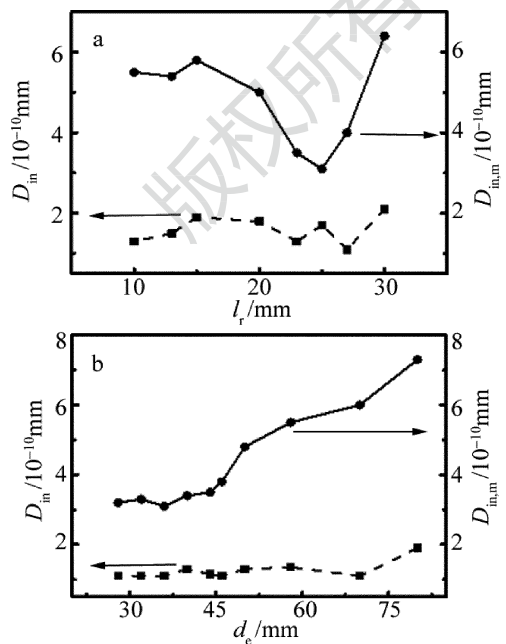


Fig. 5 a— $D_{in}$  and  $D_{in,m}$  at various  $l_r$ . b— $D_{in}$  and  $D_{in,m}$  at various  $d_e$ .  
 $D_{in}$  及  $D_{in,m}$  随  $d_e$  的变化曲线如图 5b 所示。 整个

区间内,  $D_{in}$  基本不随  $d_e$  变化, 说明腔体的腔长变化量受腔体端面直径影响较小。 当  $d_e \in [28\text{mm}, 45\text{mm}]$  时,  $D_{in,m}$  较小且基本不变; 当  $d_e > 45\text{mm}$  时,  $D_{in,m}$  随  $d_e$  的增大而增大, 说明腔体的装配误差敏感度对腔体端面直径有一个阈值效应。  $d_e = 35\text{mm}$  时,  $D_{in}$  及  $D_{in,m}$  都是最小区间, 故选作最优化的加工参量。

3.4 数值模拟结果

得到最优参量组合为  $l_i = 3.61\text{mm}$ ,  $l_o = 44\text{mm}$ ,  $l_e = 3\text{mm}$ ,  $l_r = 25\text{mm}$  及  $d_e = 35\text{mm}$ 。 为了观察优化的效果, 计算得到上下腔镜优化前的形变曲线如图 6a 所示, 优化后的形变曲线如图 6b 所示。 经过优化, 两形变曲线在腔镜中心的斜率近似为 0, 且非常平缓, 说明在腔体中心区域腔镜的形变较小。 优化后腔体稳定性达  $1.1 \times 10^{-12} g^{-1}$ , 比优化前提高了 1.5 倍。

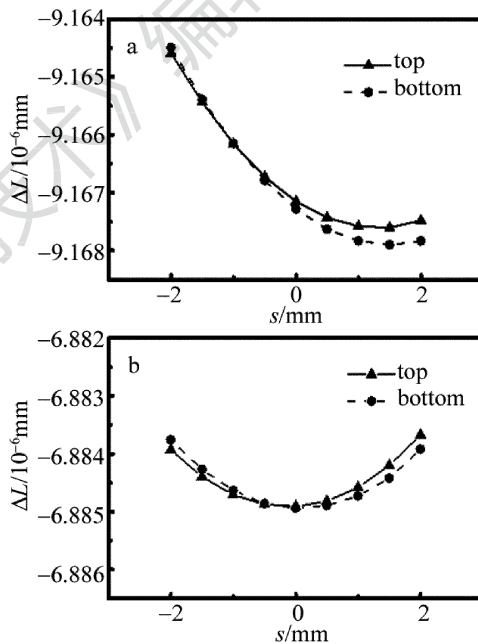


Fig. 6 Deformation curves of top and bottom  
 a—before optimization b—after optimization

4 结论

针对超稳光学腔的优化, 定义了一个新的评价参量, 在参量表达式中考虑了统计特性和计算权重, 能够集中体现腔体振动和装配误差对于超稳腔稳定性的影响。 利用有限元分析方法, 采用新定义的评价参量对一个立式超稳腔进行了系统优化, 优化后基准腔体稳定性比优化前提高 1.5 倍, 同时两侧腔镜在腔体中心区域形变量明显减小, 说明腔体对装配误差敏感程度大大降低。 该优化方法能够提高超稳光学腔的设计效率, 推动其在激光超精密测量中的应用。

参考文献

[1] NICHOLSON T L, MARTIN M J, WILLIAMS J R, et al. Comparison

- of two independent Sr optical clocks with  $1 \times 10^{-17}$  stability at  $10^3$  s [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(23): 230801.
- [2] HARTMAN M T, QUETSCHKE V, TANNER D B, *et al.* Parallel phase modulation scheme for interferometric gravitational-wave detectors[J]. *Optics Express*, 2014, 22(23): 28327-28337.
- [3] LI Q L, FAN F Y, XIONG W J, *et al.* Laser frequency scale system in carbon isotopic abundance measurement[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(24): 242801 (in Chinese).
- [4] DU Zh J, ZHANG Y Ch, WANG X Y, *et al.* Locking multiple wavelength lasers to the transition of Cesium atoms by using a Fabry-Perot transfer cavity[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26(3): 452-457 (in Chinese).
- [5] TAN Zh Q, LONG X W. Influence of cavity length change on measurement of CW cavity ring-down[J]. *Laser Technology*, 2007, 31(4): 438-441 (in Chinese).
- [6] HU Ch X, WU Zh M, DENG T, *et al.* Influence of air gap on the lasing wavelength of the fiber grating external cavity semiconductor laser [J]. *Laser Technology*, 2008, 32(2): 177-179 (in Chinese).
- [7] NOTCUTT M, MA L S, YE J, *et al.* Simple and compact 1Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity [J]. *Optics Letters*, 2005, 30(14): 1815-1817.
- [8] CHEN L Sh, HALL J, YE J, *et al.* Vibration-induced elastic deformation of Fabry-Perot cavities[J]. *Physical Review*, 2006, A74(5): 053801.
- [9] MILLO J, MAGALHAES D V, MANDACHE C, *et al.* Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities [J]. *Physical Review*, 2009, A79(5): 053829.
- [10] MIAO J, JIANG Y Y, FANG S, *et al.* Vibration insensitive optical ring cavity[J]. *Chinese Physics*, 2009, B18(6): 2334-2339.
- [11] YANG T, LI W B, ZANG E J, *et al.* Decreased vibrational susceptibility of Fabry-Perot cavities via designs of geometry and structural support[J]. *Chinese Physics*, 2007, 16(5): 1374-1384.
- [12] WEBSTER S A, OXBORROW M, GILL P. Vibration insensitive optical cavity[J]. *Physical Review*, 2007, A75(1): 011801.
- [13] CAO Y J, LIU Y, CHEN G L, *et al.* Study on vibrational stabilization of cylindrical cavities[J]. *Laser Technology*, 2012, 36(2): 262-264 (in Chinese).
- [14] LEIBRANDT D R, THORPE M J, NOTCUTT M, *et al.* Spherical reference cavities for frequency stabilization of lasers in non-laboratory environments[J]. *Optics Express*, 2011, 19(4): 3471-3482.
- [15] REN L Q, ZHU S, XU G J, *et al.* Study of a spherical vibration-insensitive optical reference cavity [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(9): 090601 (in Chinese).
- [16] LIAO H Q, CHEN H, LIU G W, *et al.* Design of the ultra stable spherical optical cavity [J]. *Physics and Engineering*, 2015, 25(1): 55-58 (in Chinese).
- [17] GUO H F, LÜ Sh Sh, LIU F, *et al.* Analysis of the vibration sensitivity of Fabry-Perot cavities[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2012, 39(12): 15-22 (in Chinese).