

文章编号: 1001-3806(2016)04-0555-05

基于概率密度最小二乘拟合的叶片后缘轮廓

鲍 鸿¹, 曾海涛¹, 白玉磊¹, 胡 忠¹, 向志聪¹, 周延周¹, 申作春²

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广州 510006; 2. 哈尔滨工业大学 航天学院 光电子技术研究所, 哈尔滨 150001)

摘要: 为了解决燃气轮机叶片后缘轮廓的测量和模型化的难题, 采用了基于概率密度的最小二乘圆拟合方法, 通过对数据重复拟合过程若干次, 求得每组的拟合圆心坐标和半径, 以概率密度分布的最大值作为最优拟合值。通过数据仿真, 对拟合数据误差进行了理论分析和实验验证, 验证了该方法的可行性和鲁棒性。结果表明, 实现了对叶片后缘轮廓的拟合和数据的参量估计, 精度达到 $\pm 0.01\text{mm}$, 求得圆拟合的最优圆心坐标和半径; 对于直线段和短圆弧组合的叶片后缘, 在不知切点和圆弧方程的情况下, 能够对叶片后缘轮廓拟合。此方法对叶片后缘轮廓的高精度测量、加工精度以及参量的设计有着重要的指导意义。

关键词: 测量与计量; 概率密度; 最小二乘法; 叶片后缘; 圆拟合; 参量估计

中图分类号: V232.4; TN247

文献标志码: A

doi: 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2016.04.021

Blade trailing edge contour based on probability density least-square fitting

BAO Hong¹, ZENG Haitao¹, BAI Yulei¹, HU Zhong¹, XIANG Zhicong¹, ZHOU Yanzhou¹, SHEN Zuochun²

(1. Department of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. Opto-electric Institute in School of Astronautics, School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to solve the problems for measurement and modeling of gas turbine blade trailing edge contour, a least-square circle fitting method based on probability density was proposed. After several times of fitting data repeatedly, each fitting center coordinate and radius was obtained. The maximum value of probability density distribution was looked as the optimal value. The errors of fitting data were analyzed by data simulation after theoretical analysis and experimental verification. The feasibility and robustness of the method were verified. The results show that the fitting of blade trailing edge contour and the estimation of parameter data are realized. The fitting error is $\pm 0.01\text{mm}$. The optimal center coordinates and radius of circle fitting is obtained. For the blade trailing edge composed of straight line segments and short arcs, the fitting result is effective and accurate in the case of unknowing the point of tangent and arc equation. The method has an important guiding significance to precision measurement, machining accuracy and parameter design of blade trailing edge contour.

Key words: measurement and metrology; probability density; least-square method; blade trailing edge; circle fitting; parameter estimation

引 言

燃气轮机叶片是发动机系统的重要部件之一, 其中叶片的后缘半径是影响叶片质量的关键因素, 对叶片疲劳强度、气动性能有着直接影响, 关系到燃气轮机的安全、可靠性能, 所以开展燃气轮机叶片后缘的相关研究有很大实用价值。从 2009 年起, 作者所在课题组一直在进行燃气轮机叶片 3 维轮廓高精度测量研究^[1-2]; 2015 年, 专门研制了 3 维曲面轮廓测量机, 实

现了燃气轮机叶片后缘 3 维轮廓的高精度测量。然而在研究中发现, 即使叶片后缘轮廓是线和圆的组合, 从测量数据中还原叶片后缘参量也是非常复杂。有关文献相互矛盾, 比如参考文献[3]中认为圆或椭圆的参量估计有闭式解法, 解决问题难度不大。而多篇参考文献^[4-8]中数学证明圆或椭圆的参量估计没有闭式解法, 仍然是计算机图形学难题。目前有关叶片前、后缘轮廓参量估计和模型识别的相关研究文献仍是空白。针对这个问题, 本文中提出对线和圆组合的叶片后缘轮廓进行参量估计。

叶片后缘轮廓参量估计主要是圆的圆心坐标和半径判读。常用的圆拟合方法主要有 Hough 变换和最小二乘法^[4-12]。其中基于最小二乘的方法精度高、适用范围广、最为常用。AHN 等人提出基于正交几何距离的最小二乘拟合方法, 并对算法进行了分析^[7]; KA-

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(2014A030313519); 广州市科技计划资助项目(2014J4100203)

作者简介: 鲍 鸿(1962-), 女, 博士, 教授, 现主要从事激光检测、航空发动机叶片 3 维轮廓及物体变形测量。

E-mail: bhong@gdut.edu.cn

收稿日期: 2015-05-08; 收到修改稿日期: 2015-07-10

NATANI 和 RANGARAJAN 提出了一种 hyper 最小二乘圆和椭圆拟合方法^[8], 该方法优点在于收敛速度快, 不需要大量的迭代和准确的初始值; QIN 等人在圆拟合算法的基础上提出了新的多圆拟合算法^[13], 在不同的噪声水平下比较了曲面拟合算法和多圆拟合算法所能够达到的精度; LIU 等人提出了基于半径约束最小二乘圆拟合方法^[14], 分析了样本特征数据噪声对圆心定位精度的影响。由于叶片后缘含有直线段和圆弧段, 在不确定切线和切点的情况下, 本文中提出基于概率密度的最小二乘圆拟合方法, 求得圆拟合参量的最优值, 实现了对圆弧型叶片后缘轮廓测量的点云数据的参量估计和误差分析。

1 测量系统和方法

本文中所使用的线激光实验系统构成如下^[4]: 3 维相机、线结构激光器、x-y 直线电机高精度运动平台(行程 0mm ~ 450mm)、计算机、运动控制器组成。实验测量系统如图 1 所示, x, y 采样点阵密度为 15μm, x, y 方向采样精度为 ±5μm, z 方向测量精度为 ±5μm。

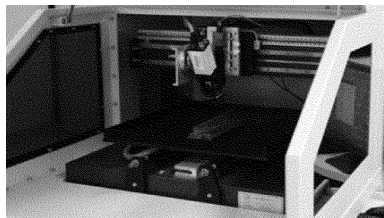


Fig. 1 Measurement system of linear laser experiment

实验中测量得到燃气轮机叶片后缘轮廓大量点云数据, 叶身每隔 15μm 截取后缘剖面数据, 总共 14689 个剖面, 由于物体受测量角度的影响, 则在每个圆弧拟合时使用 157 个点云数据。叶片后缘 3 维轮廓全部采样点的点云数据通过 IMAGEWARE 图像处理软件, 如图 2 所示。



Fig. 2 Cloud data of 3-D profile point of blade trailing edge

2 基于概率密度的最小二乘圆拟合法

最小二乘法是通过最小化误差的平方和找到 1 组数据的最佳函数匹配。利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据, 并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。

在 2 维平面坐标系中, 圆方程一般可表示为:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

式中, (x_0, y_0) 为圆心坐标, r 为圆的半径。

对于最小二乘法的圆拟合, 其误差平方的优化目标函数为:

$$S = \sum_{i=1}^N [\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - r]^2 \quad (2)$$

式中, (x_i, y_i) 为圆弧上特征点坐标, $i = 1, 2, \dots, N$, N 为参与拟合的特征点总数。

在保持这优化目标函数特征的前提上, 对其用一种稍微不同的改进方法来定义误差平方, 且其避免了平方根, 同时可得到一个最小化问题的直接解, 定义如下:

$$E = \sum_{i=1}^N [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - r^2]^2 \quad (3)$$

对(3)式展开整理, 令 $a = -2x_0, b = -2y_0, c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, 则可改写为:

$$E = \sum_{i=0}^N (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)^2 \quad (4)$$

由最小二乘法原理, 参量 a, b 和 c 应使 E 取得极小值。根据极小值的求法, a, b 和 c 应满足:

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2 \sum_{i=0}^N (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)x_i = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 2 \sum_{i=0}^N (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)y_i = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial C} = 2 \sum_{i=0}^N (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c) = 0 \quad (7)$$

对上述表达式做 $\frac{\partial E}{\partial a} \times N - \frac{\partial E}{\partial c} \times \sum_{i=0}^N x_i = 0, \frac{\partial E}{\partial b} \times N -$

$\frac{\partial E}{\partial c} \times \sum_{i=0}^N y_i = 0$ 等相关化简整理, 求得参量 a, b, c 表达式, 从而求得拟合圆心坐标 (x_0, y_0) , 半径 r 的拟合值:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{a}{2} \\ y_0 = -\frac{b}{2} \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases} \quad (8)$$

利用最小二乘圆拟合算法, 对叶片后缘的大量 3 维点云数据进行轮廓拟合和数学模型化。在大量数据样本中, 为了提高圆拟合的精度, 利用概率密度统计方法对该算法进行改进, 并通过使用更直观、更易于掌握拟合数据分布情况的直方图来表示。在此拟合中根据系统经验分组, 重复拟合过程若干次, 利用最小二乘圆拟合算法求得每组的圆心坐标和半径, 对其在概率密度分布的最大值作为拟合的最优圆心坐标和半径值。

3 仿真数据分析

在实际中得到的测量数据都不可避免地带有一定

的噪声,为了验证本文中方法的鲁棒性与准确性,在尽可能接近实验测量数据分布下使得有效控制噪声点的分布,在切线段和圆弧段上按采样间隔 $15\mu\text{m}$ 均匀离散取点,总共 157 个点。其圆弧段的圆方程如下式:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (9)$$

并与这段圆弧相切的直线,其切线方程如下式:

$$y = 2.076x - 12.136 \quad (10)$$

式中, $x_0 = 8.116\text{mm}$, $y_0 = 2.695\text{mm}$, $r = 0.875\text{mm}$, 即切点坐标为 $(7.332\text{mm}, 3.085\text{mm})$ 。

在每个点添加服从高斯分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机数作为噪声,其中 σ^2 为高斯分布的方差(单位为 mm^2), 分别在不同噪声标准差 σ 下各产生 500 组随机噪声数据。

然后对含噪声数据进行概率密度的最小二乘圆拟合,同时在不同噪声标准差下,与实际已知圆心坐标 $(8.116\text{mm}, 2.695\text{mm})$, 半径 0.875mm 做比较,对其圆拟合参量进行参量估计和误差分析。结果如表 1 所示。

在一定噪声标准差下产生 500 组随机噪声数据,并通过概率密度的最小二乘圆拟合,500 组拟合参量的误差分布如图 3 所示,图 3 是 σ 为 0.0005mm , 0.010mm , 0.035mm 3 组标准差下的误差分布。图 3a、图 3c 和图 3e 对应分布的半径误差均值分别为 $1.521 \times 10^{-4}\text{mm}$, -0.005mm 和 -0.040mm , 标准差分别为 $7.814 \times 10^{-4}\text{mm}$, 0.006mm 和 0.030mm ; 图 3b、图 3d 和图 3f 对应分布的圆心距离误差均值分别

Table 1 Circle fitting parameters of noise data under different standard deviations

No.	σ/mm	average of the radius relative error/%	the maximum relative error of radius/%	average of the center distance relative error/%	the maximum relative error of the center distance/%
1	0.0005	1.739×10^{-2}	0.2416	0.7597	0.8254
2	0.001	1.685×10^{-2}	0.3266	0.7611	0.9059
3	0.002	-3.445×10^{-2}	0.5352	0.7506	1.837
4	0.004	-5.071×10^{-2}	-0.8972	0.7705	2.003
5	0.006	-0.1598	-1.561	0.7106	2.167
6	0.008	-0.3224	-2.168	0.6648	2.795
7	0.010	-0.5247	-3.219	0.6678	2.498
8	0.012	-0.7522	-3.820	0.6435	3.389
9	0.014	-1.014	-4.474	0.8220	3.995
10	0.016	-1.207	-4.904	0.9299	4.351
11	0.018	-1.725	-5.392	1.364	5.166
12	0.020	-1.982	-7.060	1.626	6.956
13	0.025	-2.982	-7.712	2.686	8.212
14	0.030	-3.844	9.533	3.988	11.49
15	0.035	-4.538	13.85	5.475	16.16

为 0.007mm , 0.006mm 和 0.048mm , 标准差分别为 $2.041 \times 10^{-4}\text{mm}$, 0.004mm 和 0.020mm 。以图 3 中半径误差 Δr 表示为最优拟合半径与实际半径值之差,圆心距离误差 E_1 表示为最优拟合圆心坐标与实际圆心坐标间的距离,单位均为 mm ; n 为拟合值误差分布个数。根据仿真结果分析可知,在一定范围的噪声标准差下,圆拟合的结果和真实值基本一致,并可以满足实

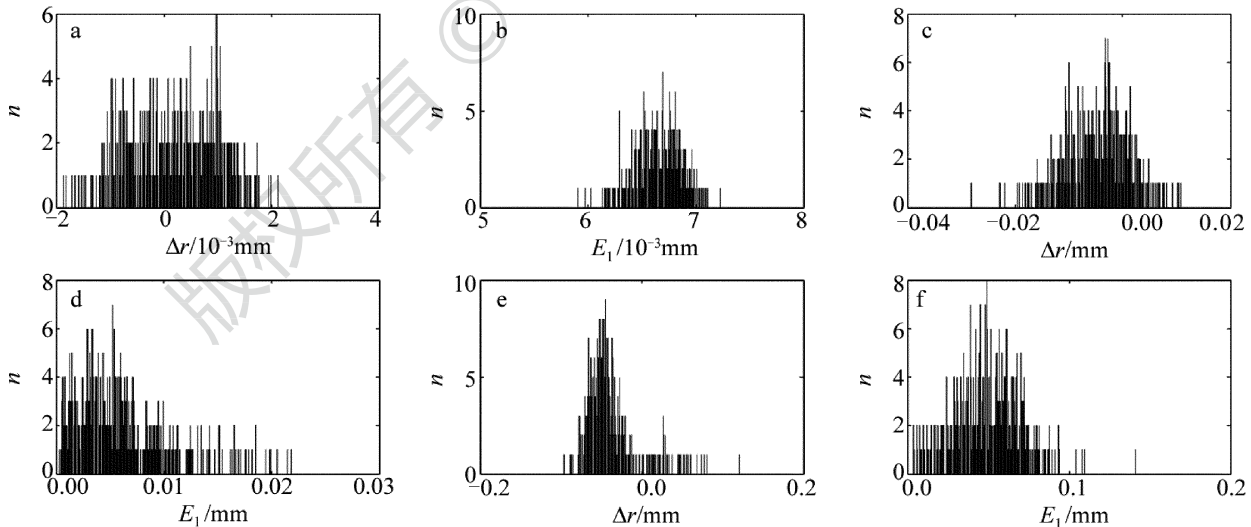


Fig. 3 Error distributions of 500 groups of data

a—radius error distributions under $\sigma = 0.0005\text{mm}$ b—center distance error distributions under $\sigma = 0.0005\text{mm}$ c—radius error distributions under $\sigma = 0.010\text{mm}$ d—center distance error distributions under $\sigma = 0.010\text{mm}$ e—radius error distributions under $\sigma = 0.035\text{mm}$ f—center distance error distributions under $\sigma = 0.035\text{mm}$

际精度要求,也体现了本文中方法的可行性。

4 实验数据分析

根据系统测得的叶片后缘轮廓点云数据,即从中

截取任意 3 个剖面数据,设剖面分别为 A, B, C 。对这 3 个剖面数据分别进行基于概率密度的最小二乘圆拟合,求得圆拟合的最优圆心坐标和最优半径如图 4 所示。图 4a 中剖面 A 拟合圆心坐标为 $(8.229\text{mm},$

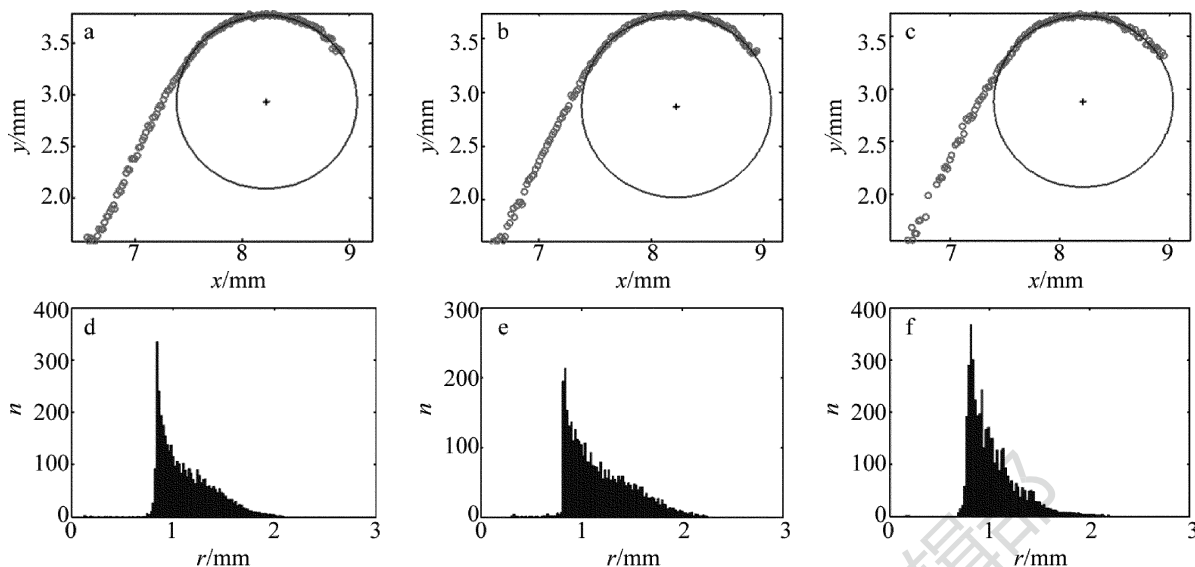


Fig. 4 Profiles of blade trailing edge

a—circle fitting diagrams of point cloud data of profile A of blade trailing edge b—probability density distribution histograms of radius fitting in profile A c—circle fitting diagrams of point cloud data of profile B of blade trailing edge d—probability density distribution histograms of radius fitting in profile B e—circle fitting diagrams of point cloud data of profile C of blade trailing edge f—probability density distribution histograms of radius fitting in profile C

2.931mm), 半径为 0.841mm; 图 4c 中剖面 B 拟合圆心坐标为(8.219mm, 2.869mm), 半径为 0.844mm; 图 4e 中剖面 C 拟合圆心坐标为(8.217mm, 2.879mm), 半径为 0.816mm。求得拟合半径的概率密度分布直方图, 即概率密度分布最大值作为最优拟合半径值, 其剖面 A, B, C 拟合半径的概率密度最大值分别为 0.841mm, 0.844mm, 0.816mm, 如图 4b、图 4d、图 4f 所示。为了检验整个实验系统的测量精度^[4], 分别测量了 3 枚直径为 (6 ± 0.01) mm 和 3 枚直径为 (0.5 ± 0.01) mm 的轴承滚珠。实验中得到轴承滚珠 3 维点云数据, 利用 IMAGEWARE 软件进行去噪处理, 并以公差为 0.01mm 拟合球体, 拟合使用点 99.9%, 结果表明, 实验测量误差为 ± 0.01 mm。

5 结论

本文中以燃气轮机叶片后缘作为研究对象, 基于概率密度的最小二乘圆拟合, 对圆弧型叶片后缘轮廓的参量进行了估计和误差分析。常规的最小二乘法拟合圆, 拟合出的圆参量误差较大, 不能满足实际精度需求。实践证明, 基于概率密度的最小二乘圆拟合的算法, 在求得圆拟合最优值过程中剔除了不符合要求的拟合值, 算法的准确、实用性都得到增强。在直线段和短圆弧组合的叶片后缘中, 在不知切点, 圆弧方程的情况下, 本文中方法能有效、精确的对叶片后缘轮廓拟合, 叶片后缘参量估计的精度为 ± 0.01 mm, 与单点测量的精度相当, 证明本文中提出的方法鲁棒、实用和可行。同时为叶片制造时的参量设计和修正等后续工作奠定了良好的基础。

本文中方法需对所有数据点都进行运算, 且迭代次数多, 所以求得拟合圆各参量的耗时较长。在 CPU 参量为 1.83GHz 的计算机上, 应用 MATLAB 7.0 运行拟合圆程序, 对一个剖面数据进行拟合, 总运行时间为 1.26s, 因此在运行效率上, 本文中方法还有待于优化。因为本文中方法对数据采样点密度要求比较高, 对较低采样密度的抗噪性还有待于提高, 这是下一步研究中需要解决的问题。

参考文献

- [1] LI H W, SHEN Z Ch, QIN Y H, *et al.* Application of phase-measurement-profilometry in blade measurement [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(2):275-281 (in Chinese).
- [2] LAI W J, BAO H, BAI Y L, *et al.* High precision and multiple view point cloud data fusion in the blade three-dimensional profile measurement [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2015, 30(3):665-671 (in Chinese).
- [3] HUANG W Y. Evaluation and research for roundness error computing with three methods of least square circle [J]. *Acta Metrologica Sinica*, 1991, 12(1): 22-28 (in Chinese).
- [4] CHERNOV N, LESORT C. Least squares fitting of circles [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2005, 23(3):239-252.
- [5] SPATH H. Least-squares fitting by circles [J]. *Computing*, 1995, 57(2): 179-185.
- [6] GANDER W, GOLUB G H, STREBEL R. Least-squares fitting of circles and ellipses [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1994, 34(4): 558-578.
- [7] AHN S J, RAUH W, WARNECKE H J. Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola [J]. *Pattern Recognition*, 2001, 34(12):2283-2303.
- [8] KANATANI K, RANGARAJAN P. Hyper least squares fitting of circles and ellipses [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2011, 55(6):2197-2208.
- [9] KASA I. A circle fitting procedure and its error analysis [J]. *IEEE*

- Transactions on Instrumentation and Measurement, 1976, 25(3):8-14.
- [10] MOURA L, KITNEY R. A direct method for least-squares circle fitting [J]. Computer Physics Communications. 1991, 64(1):57-63.
- [11] WATSON G A. Least squares fitting of circles and ellipses to measured data [J]. BIT Numerical Mathematics, 1999, 39(1):176-191.
- [12] CANG G H, YUE J P. Plane fitting of point clouds based on weighted total least square [J]. Laser Technology, 2014, 38(3):307-310(in Chinese).
- [13] QIN Y, FU X N, HUANG F. Multi-circle fitting algorithms for laser-spot location [J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2006, 26(4):519-523(in Chinese).
- [14] LIU K, ZHOU F Q, ZHANG G J. Radius constraint least-square circle fitting method and error analysis [J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2006, 17(5):604-607(in Chinese).

版权所有 © 《激光技术》编辑部

版权所有 ©