

文章编号: 1001-3806(2015)05-0669-05

利用 HSSIM 和残差比阈值的 3 维激光扫描图像去噪

崔 治, 邓曙光, 肖卫初

(湖南城市学院 通信与工程学院, 益阳 413000)

摘要: 为了更好地实现 3 维激光扫描图像的去噪, 提出一种融合直方图结构相似度(HSSIM)和残差比阈值的改进稀疏去噪算法。利用初始化过完备字典进行稀疏分解, 以相似因子代替重构误差作为保真项, 利用残差比阈值作为正交匹配追踪算法的迭代终止条件对图像进行去噪, 获得了去噪后图像的峰值信噪比及 HSSIM 指标。结果表明, 与基于 db2 小波变换、多尺度曲波变换和离散余弦变换的去噪方法相比, 该算法能获得更好的峰值信噪比和 HSSIM 数据。在有效去除图像噪声的同时还能更有效地保留图像的细节特征。

关键词: 图像处理; 去噪; 直方图结构相似度; 残差比; 稀疏表示

中图分类号: TP391.41 **文献标志码:** A **doi:**10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2015.05.018

3-D laser scanning image denoising based on HSSIM and residual ratio threshold

CUI Zhi, DENG Shuguang, XIAO Weichu

(School of Communication and Electronic Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, China)

Abstract: In order to get better results of 3-D laser scanning image denoising, an improved sparse representation denoising algorithm was proposed by combining histogram structural similarity (HSSIM) and residual ratio threshold. The initial over-complete dictionary was applied in the sparse decomposition. The reconstruction error was replaced by similarity factor as fidelity factor. Then the residual ratio threshold was used as the iteration termination of the orthogonal matching pursuit algorithm to reconstruct the denoised image. Finally, the performance data of denoised image, such as peak signal-to-noise ratio(PSNR) and HSSIM, were obtained. The experimental results show that the proposed method could provide better PSNR and HSSIM results compared with the image denoising methods using db2 wavelet transform, multiscale curve wave transform and discrete cosine transform. Meanwhile, the structural features can be reserved effectively by the proposed method.

Key words: image processing; de-noising; histogram structural similarity (HSSIM); residual ratio; sparse representation

引 言

3 维激光扫描是以获取被测物体轮廓数据为目的的一种成像技术, 与一般 CCD 成像相比, 利用 3 维激光扫描获取的图像纹理丰富、分辨率高、具有更好的强度和范围信息, 在目标探测、遥感和医学等方面潜力巨大^[1]。然而在实际工作中, 3 维激光扫描图像不可避免地受到环境噪声、仪器噪声和信号传输过程中的随机噪声等的影响引起图像质量下降, 进而影响到信息的正确表达。因此, 对获取的扫描图像进行噪声分析、评估和去噪一直是相关领域的研究热点。

目前, 针对激光扫描图像的去噪, 常用的方法是基

于变换域的处理方法, 这种方法认为图像中噪声的能量主要集中在高频部分, 而内容等细节特征分布在低频部分, 通过寻找图像中频谱分布的规律, 从频域上将图像的内容等细节特征和噪声分开, 可以达到去噪的目的^[2]。但是, 大量的实验表明, 在现实条件下采集到的图像, 其频谱中的高频部分也含有与内容相关的细节, 在低频部分也能检测到噪声的存在, 当按照上述变换域方法进行去噪时, 图像的一部分内容细节会随着噪声的滤除而丢失, 而位于低频部分的噪声却无法被很好地去除^[3]。

稀疏表示理论作为一种新兴的信号分析与处理理论, 近年来受到广泛的关注。该方法的基本思想是采用过完备字典中的冗余基系统来取代变换域方法中的正交基系统, 对信号的稀疏分解就是从过完备字典中选择具有最佳组合的若干个原子来表示信号, 通过判断数据在字典上是否具有稀疏表示来区分有用信息与噪声, 实现去噪的目的^[4]。参考文献[5]中提出一种基于核模糊聚类的去噪方法, 该方法通过将图像分成

基金项目: 湖南省教育厅科研资助项目(13C122); 湖南省自然科学基金资助项目(13JJ6072)

作者简介: 崔 治(1982-), 男, 讲师, 硕士, 主要从事图像及信号处理方面的研究工作。

E-mail: zhicui@yeah.net

收稿日期: 2014-07-24; 收到修改稿日期: 2014-08-29

大小相同的若干块并对相似的图像块进行 C 均值聚类,使同类图像块能共享相同的稀疏去噪模型从而实现去噪的目的。参考文献[6]利用 K-means 和主成分分析构造了一种贝叶斯去噪模型,利用正则化条件计算原始图像与学习字典的差,以达到优化噪声的效果。文献[7]提出基于自适应聚类的去噪算法,采用 K-means 算法训练过完备字典,利用训练中的每一步迭代自适应的更新字典原子,最后利用正交匹配追踪算法(orthogonal matching pursuit,OMP)对图像进行稀疏表示以实现图像去噪。这些研究极大地丰富了稀疏表示应用,取得了较好的效果。

但是,现有基于稀疏表示的图像去噪方法大多以去噪前后两幅图像的重构误差作为保真项,以硬阈值作为迭代的终止条件,将其应用于 3 维激光图像去噪时,在去噪的同时有可能丢失图像的结构特征等重要信息。鉴于此,本文将直方图结构相似度(histogram structural similarity,HSSIM)和信号分解残差比概念引入稀疏表示应用,提出一种基于融合直方图结构相似度和残差比阈值的改进算法,并对不同噪声水准下不同图像的峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio,PSNR)和 HSSIM 数据及视觉主观效果进行对比,以此评估算法的性能。

1 3 维激光扫描图像稀疏去噪原理

1.1 去噪模型

一般情况下,一幅位移不变的 3 维激光扫描图像可用下面的方程表示:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \quad (1)$$

式中,矩阵 \mathbf{X} , \mathbf{Y} 和 \mathbf{Z} 分别表示观测图像、原始清晰图像(理想图像)和降质过程中引入的噪声。对图像进行去噪的目的就是上面模型中去除噪声或者降低噪声 \mathbf{Z} 带来的影响,使观测图像 \mathbf{X} 与原始清晰图像 \mathbf{Y} 之间的差别最小。

见任意一副理想图像都可以表示为 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}_{n \times n}$ 的模型(\mathbf{R} 代表向量空间,下同),在此模型中,图像被分为大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的许多图像块,根据稀疏表示的思想,可以定义一个 2 维空间的字典向量 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}_{n \times m}$ ($n < m$),所有的图像块 \mathbf{Y} 都可以用这个字典稀疏的表示为^[8]:

$$\hat{\mathbf{a}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{a}\|_0 \text{ s.t. } \|\mathbf{D}\mathbf{a} - \mathbf{Y}\|_2^2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

式中, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}_m$ 为稀疏表示系数; $\|\mathbf{a}\|_0$ 为 \mathbf{a} 的非零项的个数,表示 \mathbf{a} 的稀疏度; \mathbf{D} 为字典; ε 为微小正常数。

假定图像 \mathbf{X} 是通过加入标准差为 σ 的高斯白噪声而降质得到,则对 \mathbf{X} 进行去噪的结果为下方方程的解^[9]:

$$\hat{\mathbf{a}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{a}\|_0 \text{ s.t. } \|\mathbf{D}\mathbf{a} - \mathbf{X}\|_2^2 \leq T \quad (3)$$

式中, T 为硬阈值,其它参量的释义与上面一致。去噪后的图像可表示为 $\mathbf{Y} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{a}}$ 。

将(3)式中的约束条件转化为惩罚项,根据正则化优化的思想可以将(3)式改写为^[10]:

$$\hat{\mathbf{a}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{D}\mathbf{a} - \mathbf{X}\|_2^2 + u \|\mathbf{a}\|_0 \quad (4)$$

式中, u 是正则化参量。求解上式是一个 NP-hard 问题,当 u 取合适值时,(3)式和(4)式可以相互等价的转换。

1.2 对去噪模型的求解

假设存在一幅大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的理想图像 \mathbf{Y} ,其去噪模型可以扩展为^[11]:

$$\{\hat{\mathbf{a}}_{ij}, \hat{\mathbf{Y}}\} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{Y}} \lambda \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_2^2 + \sum_{i,j} u_{ij} \|\mathbf{a}_{ij}\|_0 + \sum_{i,j} \|\mathbf{D}\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Y}\|_2^2 \quad (5)$$

式中, \mathbf{X} 为观测图像, λ 为 Lagrange 乘子, \mathbf{a}_{ij} 为每个图像块的稀疏表示系数, u_{ij} 为对应的系数,等号右边的第 1 项表示含噪图像和原始图像之间的整体相似程度,它必须小于 $C * \sigma^2$ (C 为常数)的卷积值,第 2 项是稀疏性约束, \mathbf{R}_{ij} 是一个 $n \times n$ 的矩阵,其作用是从大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的图像中提取 (i,j) 位置上的图像块, \mathbf{D} 为过完备字典。对于每一个图像块,采用正交匹配追踪算法求解对应的下述模型,可得最优的 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}$:

$$\hat{\mathbf{a}}_{ij} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a}_{ij}} u_{ij} \|\mathbf{a}_{ij}\|_0 + \|\mathbf{D}\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Y}\|_2^2 \quad (6)$$

在对每个图像块进行计算时,设定迭代终止条件为 $\|\mathbf{D}\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Y}\|_2^2 < T$ (T 为硬阈值),可得到该图像块对应的最优系数 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}$,当所有图像块的稀疏表示系数 $\hat{\mathbf{a}}_{ij}$ 计算完毕时,更新 \mathbf{Y} ,得到理想图像的近似解如下:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{Y}} \lambda \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_2^2 + \sum_{i,j} \|\mathbf{D}\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{R}_{ij}\mathbf{Y}\|_2^2 \quad (7)$$

2 基于 HSSIM 和残差比的去噪算法

2.1 HSSIM 和残差比的概念

首先定义两组指标。

(1) HSSIM

直方图结构相似度(HSSIM)是在对人眼视觉系统的特性进行分析时提出的一种新的图像质量评价指标。若用 x,y 代表观测图像和原始图像,用 $H(x,y)$ 表示求两者的直方图结构相似度,其计算式如下^[12]:

$$H(x,y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_x\sigma_y + c_2)(2s_x s_y + c_3)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)(s_x^2 + s_y^2 + c_3)} \quad (8)$$

式中, μ_x 和 μ_y 是两幅图像的均值; σ_x 和 σ_y 是两幅图像的方差; c_1, c_2, c_3 是和图像中像素值取值范围有关的极小正常数; s_x 和 s_y 是两幅图像的模糊度。

HSSIM 是一个大于 0 而小于 1 的数, 越接近 1 表明两幅图像在结构上的相似度越高, 反之则表明相似度越低。

(2) 残差比

对(1)式进行如下修改:

$$X_i = Y_i + \hat{Z}_{\Delta\omega} + Z_{\Delta\omega} \quad (9)$$

式中, X_i 表示观测图像矩阵的列向量, Y_i 表示清晰图像转化后的列向量, $\Delta\omega$ 表示 Y_i 的带宽, $\hat{Z}_{\Delta\omega}$ 和 $Z_{\Delta\omega}$ 分别表示位于频带 $\Delta\omega$ 之内和之外的噪声。参考文献 [13] 中认为, $Z_{\Delta\omega}$ 与字典中的所有原子均正交, 因此对图像进行第 m 步和第 $m+1$ 步稀疏分解的残差可以由下式表示:

$$\|R_m(X_i)\|_2^2 = \|R_m(Y_i + \hat{Z}_{\Delta\omega} + Z_{\Delta\omega})\|_2^2 = \|R_m(Y_i + \hat{Z}_{\Delta\omega})\|_2^2 + \|Z_{\Delta\omega}\|_2^2 \quad (10)$$

$$\|R_{m+1}(X_i)\|_2^2 = \|R_{m+1}(Y_i + \hat{Z}_{\Delta\omega} + Z_{\Delta\omega})\|_2^2 = \|R_{m+1}(Y_i + \hat{Z}_{\Delta\omega})\|_2^2 + \|Z_{\Delta\omega}\|_2^2 \quad (11)$$

式中, $R_k(\cdot)$ 表示第 k 步分解的残差。

则残差比为:

$$\eta = \frac{\|R_{m+1}X_i - \beta R_m X_i\|_2^2}{\|\beta R_m X_i\|_2^2} \quad (12)$$

式中, β 为规格化系数:

$$\beta = \sqrt{\frac{E(R_{m+1}X_i)^2}{E(R_m X_i)^2}} \quad (13)$$

式中, E 表示求期望值。

2.2 本文中算法设计

综合上述分析, 本文中提出一种改进的 3 维激光扫描图像去噪模型:

$$\{\hat{a}_{ij}, \hat{Y}\} = \underset{a_{ij}, Y}{\operatorname{argmin}} \lambda \|Y - X\|_2^2 + \sum_{i,j} u_{ij} \|a_{ij}\|_0 + \sum_{i,j} [1 - H(Da_{ij}, R_{ij}Y)] \quad (14)$$

式中, 等号右边的第 1 项和第 2 项为约束项, 第 3 项是相似因子, 用来取代重构误差作为新的保真项进行迭代计算, $H(\cdot)$ 表示求取直方图结构相似度。

对本文中模型进行求解, 先假定 D 为已知过完备字典, 代入初始条件为 $Y = X$, 可得每个图像块的最优解:

$$\hat{a}_{ij} = \underset{a_{ij}}{\operatorname{argmin}} u_{ij} \|a_{ij}\|_0 + [1 - H(Da_{ij}, R_{ij}Y)] \quad (15)$$

令 $1 - H(Da_{ij}, R_{ij}Y) < \eta$ (η 为残差比阈值), 通过求取偏导数求解(16)式得到去噪图像的求解结果:

$$\hat{Y} = (\lambda I + \sum_{i,j} R_{ij}^T R_{ij})^{-1} (\lambda X + \sum_{i,j} R_{ij}^T D \hat{a}_{ij}) \quad (16)$$

式中, I 为单位矩阵。

由此可以归纳本文中算法的步骤如下。

(1) 采用过完备的离散余弦变换 (discrete cosine transform, DCT) 字典为初始字典 D , 代入初始条件 $Y = X$ 。

(2) 根据(9)式, 将直方图结构相似度加入到正交匹配追踪算法中, 对每个图像块进行稀疏编码。在此过程中, 将迭代终止条件修改为 $1 - H(Da_{ij}, R_{ij}Y) < \eta$ 。综合考虑去噪效果和算法效率, 经多次对比后确定残差比阈值取值为 0.005。

(3) 定义误差矩阵为 $E_k = Y - \sum_{j \neq k} d_j a_j^T$ (其中 a_j 是稀疏分解系数矩阵的列向量), 稀疏分解时用到的字典 D 中所有原子 d_j 的样本索引集合为 $\omega_i = \{i \mid 1 \leq i \leq k\}, a_j^T(i) \neq 0$, 将字典更新问题转化为求解如下方程:

$$\min_{d_j, a_j} [1 - H(Y, \sum_{j \neq k} d_j a_j^T)] \text{ s. t. } a_j^T \subseteq \omega_i \quad (17)$$

上面方程可以通过对 E_k 进行奇异值分解并求取 1 秩逼近来求解:

$$E_k = U \Delta V^T \quad (18)$$

式中, U, V 是 $m \times m$ 和 $n \times n$ 的正交矩阵, Δ 是 $m \times n$ 的半正定对角阵。更新后的字典原子的第 1 列就是 U 的第 1 列, 而稀疏系数矩阵更新后的第 1 列是 $\Delta(1, 1)$ 和 V^T 相乘后的第 1 列。

重复步骤(3), 直到全部迭代结束, 得到稀疏字典。

(4) 求解 \hat{Y} , 得到去噪后的图像。

3 实验结果与分析

为了测试本文中算法的性能, 选取 3 维激光扫描图像测试库中的岛屿、丘陵和雕刻版扫描图进行实验, 如图 1a、图 2a 和图 3a 所示。3 幅图像的大小均为 256 像素 \times 256 像素, 位深均为 8, 由图可见, 它们具有丰富的细节特征。

给 3 幅图像分别添加方差 σ 为 10, 15, 20 的高斯白噪声, 再分别采用 db2 小波硬阈值去噪法、多尺度曲波变换 (curvelet)、DCT 和本文中算法进行对比性去噪实验。实验所用软件为 MATLAB 7.0, 从评价的客观性方面考虑, 除了从视觉感受上来评价去噪图像, 还采用 PSNR 和 HSSIM 作为客观指标来衡量不同算法的去噪效果。这两项数据越大, 表明算法的去噪效果越好, 图像特征保留的程度越高。对图 1a、图 2a 和图 3a 这 3 幅图像采用上述 4 种方法去噪后的 PSNR 和 HSSIM 数据如表 1 和表 2 所示。从表中可以看到, 对

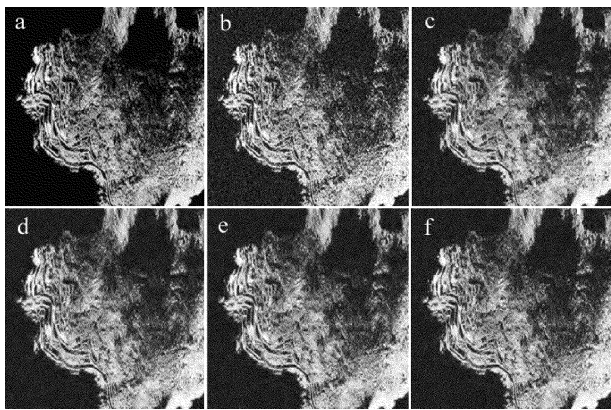


Fig. 1 Laser-1 image with the denoised results of four methods
a—laser-1 original image b—noisy image($\sigma=20$) c—wavelet d—curvelet e—DCT f—the proposed method

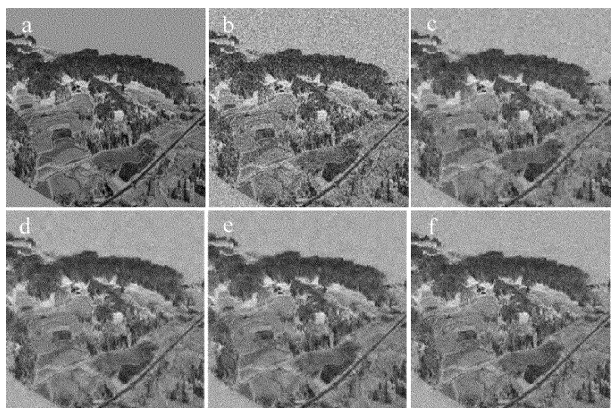


Fig. 2 Laser-2 image with the denoised results of four methods
a—laser-2 original image b—noisy image($\sigma=20$) c—wavelet d—curvelet e—DCT f—the proposed method

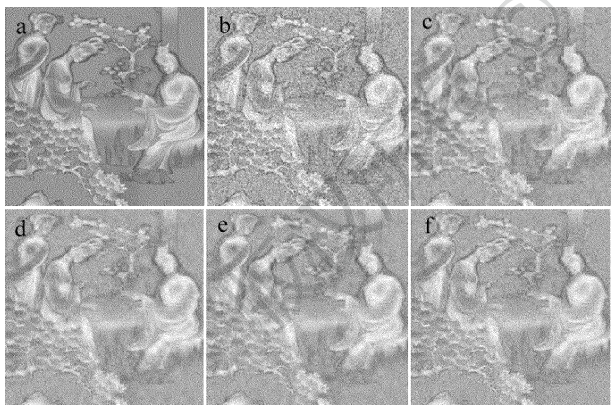


Fig. 3 Laser-3 image with the denoised results of four methods
a—laser-3 original image b—noisy image($\sigma=20$) c—wavelet d—curvelet e—DCT f—the proposed method

于相同的图像,在添加的噪声方差相同的情况下,采用本文中算法获得的 PSNR 和 HSSIM 数据要优于其它 3 种方法。如对 laser-2(丘陵)图像加入 $\sigma=10$ 的白噪声后,采用本文中算法去噪后的 PSNR 值为 36.17dB, 相比 db2 小波变换,curvelet 变换和离散余弦变换分别高出 6.24dB,0.35dB 和 0.06dB;采用本文中算法获得的 HSSIM 值为 0.9764,相比 db2 小波变换、curvelet 变

换和离散余弦变换则提高了 0.1113,0.0296 和 0.0162。对不同的图像加入不同水平的噪声,采用本文中算法的结果依然优于其它 3 种方法。分析原因如下:(1)多尺度变换存在选择最优基函数和最佳分解层数的问题,在基函数和分解尺度未进行最优匹配的情况下,处理结果不尽如人意;(2)多尺度变换在分解与重构的过程中有可能将图像边缘等结构特征当成高频噪声去除,导致去噪结果不理想。而稀疏表示将可用信息与噪声进行确定性的区分,全面地从带噪图像中提取有用信息,实现对图像的高质量重构,因此基于稀疏表示的方法处理效果较好。同时,本文中算法利用结构相似性因子作为保真项,利用残差比阈值作为迭代终止条件,在保留图像特征信息方面更具优势,更符合人眼视觉系统的特性,去噪效果更好。

Table 1 Comparison of PSNR of four de-noising methods

image	noise σ	PSNR/dB			
		db2	curvelet	DCT	proposed
laser-1	10	31.74	35.41	35.79	35.81
	15	30.35	34.24	34.61	34.69
	20	27.67	32.78	33.07	33.23
laser-2	10	29.93	35.82	36.11	36.17
	15	27.67	34.51	34.83	34.95
	20	26.80	33.96	34.02	34.33
laser-3	10	31.52	37.67	37.43	37.57
	15	28.37	36.16	36.92	37.11
	20	26.43	34.85	35.58	35.64

Table 2 Comparison of HSSIM of four de-noising methods

image	noise σ	HSSIM			
		db2	curvelet	DCT	proposed
laser-1	10	0.9273	0.9437	0.9686	0.9741
	15	0.8736	0.9324	0.9451	0.9497
	20	0.8255	0.9029	0.9185	0.9228
laser-2	10	0.8651	0.9468	0.9602	0.9764
	15	0.7034	0.9280	0.9524	0.9639
	20	0.6842	0.9033	0.9383	0.9477
laser-3	10	0.8685	0.9446	0.9571	0.9633
	15	0.7767	0.9237	0.9427	0.9547
	20	0.7154	0.9074	0.9245	0.9392

对实验图像添加 $\sigma=20$ 的白噪声,分别采用上述 4 种方法处理后的效果如图 1~图 3 所示。由图可见,从主观视觉效果上来看,本文中算法要优于其它 3 种方法。由上述分析可知,在不同的噪声条件下,针对不同的图像,本文中算法均具有较好的去噪能力和较强的鲁棒性。

4 结论

基于稀疏表示理论,提出了一种以相似因子取代

重构误差平方和,以残差比阈值替代硬阈值来实现稀疏分解的算法。实验结果表明,从 PSNR, HSSIM 等客观评价标准和主观视觉效果两个方面来看,本文中算法均具有较好的去噪能力和较强的鲁棒性。对字典进行优化设计和对阈值条件进行改进将是下一步的研究方向。

参 考 文 献

- [1] ZHANG H X. Study on building modeling based on 3-D laser scanning technology[J]. *Laser Technology*, 2014, 38(3): 431-434 (in Chinese).
- [2] XU Y F, XU J, ZHAO F L, *et al.* Laser active image denoising method based on wavelet transform[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2009, 21(12): 1786-1790 (in Chinese).
- [3] CAI Z M, LAI J H. An over-complete learned dictionary-based image de-noising method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(2): 347-350 (in Chinese).
- [4] ELAD M, AHARON M. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 12(15): 3736-3745.
- [5] WU U Q, LI L. Image denoising using kernel fuzzy clustering and regularization on sparse model[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, 43(3): 1-7 (in Chinese).
- [6] WANG C, SU W M, GU H, *et al.* SAR image despeckling based on morphological component analysis[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2013, 28(3): 448-454 (in Chinese).
- [7] WEI Y L, WEN X B, ZHOU Y L, *et al.* New self-adaptive method for image denoising based on sparse decomposition and clustering[J]. *Journal of Computer Applications*, 2013, 33(2): 476-479 (in Chinese).
- [8] MA L, DENG C Z, WANG S Q, *et al.* Feature-retained image denoising via sparse representation[J]. *Journal of Computer Applications*, 2013, 33(5): 1416-1419 (in Chinese).
- [9] DABOV K, FOI A, KATAKOVIC V, *et al.* Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [10] FANG L Y, LI S T, MCNABB R, *et al.* Fast acquisition and reconstruction of optical coherence tomography images via sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2013, 32(11): 2034-2049.
- [11] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(11): 4311-4322.
- [12] ZHU L, LI Q L, ZHANG T, *et al.* Metric of image quality based on structural similarity[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2007, 34(11): 108-113 (in Chinese).
- [13] LIANG W, QUE P W, CHEN L, *et al.* Residual ratio iteration termination condition for MP method[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2010, 44(2): 171-175 (in Chinese).