

文章编号: 1001-3806(2015)02-0266-04

## 基于希尔伯特变换的数字全息位相重构技术

高亚飞<sup>1</sup>, 郭海军<sup>2</sup>, 宋修法<sup>2</sup>, 于梦杰<sup>1</sup>, 王华英<sup>2\*</sup>

(1. 河北工程大学 信电学院, 邯郸 056038; 2. 河北工程大学 理学院, 邯郸 056038)

**摘要:** 为了提高数字全息重构的精度, 采用希尔伯特变换的方法对数字全息位相重构进行了理论分析和实验验证。首先利用傅里叶变换滤除全息图中的0级项, 然后运用希尔伯特变换对已经滤除0级项的全息图实现90°相移, 并构造出解析信号, 从而可以求出物体的包裹位相, 最后利用最小二乘法进行位相解包裹得到物体的真实位相; 并将希尔伯特变换法与常规傅里叶变换法重构的实验结果进行了对比和分析, 获得了标准偏差的对比数据。结果表明, 该方法比常规傅里叶变换法重构精度要高。这一结果对提高位相重构的精度是有帮助的。

**关键词:** 全息; 位相重构; 希尔伯特变换; 傅里叶变换; 解析信号; 最小二乘

**中图分类号:** O438 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2015.02.025

## Digital holographic phase reconstruction technology based on Hilbert transform

GAO Yafei<sup>1</sup>, GUO Haijun<sup>2</sup>, SONG Xiufa<sup>2</sup>, YU Mengjie<sup>1</sup>, WANG Huaying<sup>2</sup>

(1. School of Information &amp; Electronic Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China; 2. College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

**Abstract:** In order to improve the accuracy of digital holographic reconstruction, theoretical analysis and experimental verification of digital holographic reconstruction phase were made by using Hilbert transform. Firstly, the zero order item of the hologram was filtered through Fourier transform. Secondly, the hologram without zero order item was shifted 90° through the Hilbert transform so that the analytic signal was constructed and the object's wrapped phase was found. Finally, the object's real phase was obtained by using the least square method to unwrap the phase. The experimental results of Hilbert transform reconstruction and conventional Fourier transform reconstruction were compared. The data of the standard deviation was obtained and compared. The results indicate that the reconstruct precision of this method is higher than the conventional Fourier transform method. The research results are helpful to improve the precision of the phase reconstruction.

**Key words:** holography; phase reconstruction; Hilbert transform; Fourier transform; analytical signal; least squares

## 引言

数字全息技术是利用干涉和衍射原理记录并再现物体真实的3维图像的技术, 与光电转换技术、数字计算机技术高度融合, 由于数字全息记录包含物体表面3维的位相信息, 因此通过对数字再现像的位相提取与计算, 可得到3维物体的形貌信息<sup>[1-2]</sup>。

数字全息的位相再现是重构物体真实图像的一个重要环节。

目前, 位相重构的方法很多, 主要有相移法<sup>[3]</sup>和常规傅里叶变换法<sup>[4]</sup>。虽然相移法有较高的重构精度, 并且受0级项干扰小, 但至少需要2幅以上的全息图, 采集时间长且成本高。本文中利用希尔伯特变换进行位相重构<sup>[5-9]</sup>, 采用1幅全息图, 与常规傅里叶变换相比, 只滤除了全息图中的0级项, 保留了-1级的位相信息, 减小了重构误差。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61077001); 河北省自然科学基金资助项目(F2008000750; F2010001038); 河北省科技计划资助项目(09277101D); 河北省教育厅高等学校科学技术研究重点资助项目(ZH2011241)

作者简介: 高亚飞(1986-), 男, 硕士研究生, 现主要从事数字全息技术方面的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: pbxsiyingzi@126.com

收稿日期: 2014-03-12; 收到修改稿日期: 2014-04-12

## 1 位相重构原理

对时域信号  $x(t)$ , 其希尔伯特变换可表示为:

$$y(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (1)$$

即函数  $x(t)$  的希尔伯特变换是它与  $\frac{1}{\pi t}$  的卷积。

式中,  $t$  是时间, 在频域内, 希尔伯特变换关系可表示为:

$$Y(f) = \begin{cases} -jX(f), & (f > 0) \\ jX(f), & (f < 0) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $Y(f)$  和  $X(f)$  分别为  $y(t)$  和  $x(t)$  的傅里叶变换,  $j$  是虚数单位。由(2)式可知, 求一个实函数  $x(t)$  的希尔伯特变换, 就是将  $x(t)$  的所有正频率成分相位旋转  $-\frac{\pi}{2}$ , 对所有负频率成分相位旋转  $+\frac{\pi}{2}$ 。

因此,  $\cos(\omega t)$  做希尔伯特变换得到了  $\sin(\omega t)$ ,  $\omega$  是频率。

傅里叶变换在生产生活中的重要性非常突出, 它将原来难以处理的时域信号相对比较容易地转换成了易于分析的频域信号, 可以利用一些工具对这些频域信号进行处理、加工, 把信号转化为可以对其进行各种数学变化的数学公式, 对其进行处理。最后利用傅里叶逆变换将这些频域信号转换成时域信号, 它是一种特殊的积分变换。

CCD 所记录的全息图的表达式为:

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \times \cos[\phi(x, y) + \varphi(x, y)] \quad (3)$$

式中,  $a(x, y)$  为 0 级项,  $b(x, y)$  是振幅,  $\phi(x, y)$  是物体的位相, 是重构物体位相的重要信息,  $\varphi(x, y)$  为参考光位相。首先对(3)式进行傅里叶变换得到其频谱, 然后滤除 0 级谱。通过逆傅里叶变换得到下式:

$$I_1(x, y) = b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \varphi(x, y)] \quad (4)$$

由此可见, (4)式相对于(3)式已经滤除了 0 级项  $a(x, y)$ 。

对(4)式进行希尔伯特变换得到下式:

$$I_2(x, y) = b(x, y) \sin[\phi(x, y) + \varphi(x, y)] \quad (5)$$

然后由(4)式和(5)式构造解析信号:

$$Z(x, y) = I_1(x, y) + jI_2(x, y) = b(x, y) \{ \cos[\phi(x, y) + \varphi(x, y)] + j\sin[\phi(x, y) + \varphi(x, y)] \} \quad (6)$$

解析信号: 在能量不变的前提下, 利用希尔伯特变换构造一个虚部, 使之只有正频谱。因此, 对于(6)式利用虚部除以实部, 可求出包裹位相:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) + \varphi(x, y) = \\ \tan^{-1} \frac{\sin[\phi(x, y) + \varphi(x, y)]}{\cos[\phi(x, y) + \varphi(x, y)]} \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $\varphi(x, y)$  为参考光相位, 可以由计算得出, 所以得到  $\varphi(x, y)$  后就能求出包裹相位  $\phi(x, y)$ 。最后对

包裹位相  $\phi(x, y)$  进行畸变补偿, 并利用最小二乘法解包裹处理<sup>[10-11]</sup>, 就会得到物体的真实位相。

## 2 实验结果及分析

对球面参考光像面数字全息<sup>[12]</sup>人体血细胞进行了实验验证。首先, 分别利用希尔伯特变换重构法和常规傅里叶变换法对人体血细胞全息图进行位相重构; 其次, 对两种实验结果进行比较验证。

在球面参考光像面数字全息中, 由物光路中显微物镜引入的二次位相畸变和参考光路中的显微物镜引入的二次位相畸变相抵消<sup>[13]</sup>, 只剩下由于离轴记录所引入的一次位相畸变, 所以在位相重构后得到了含有一次畸变的 3 维位相图, 本文中利用自动位相补偿的方法消除一次位相畸变<sup>[13-14]</sup>, 从而得到物体的真实 3 维位相。

下面是两种算法的实验结果, 图 1 为人体血细胞的全息图; 图 2 为希尔伯特变换重构法所得到的实验结果, 其中图 2a 为人体血细胞的包裹位相图, 图 2b 为解包裹后的 2 维位相图, 图 2c 为图 2b 的 3 维显示; 图 3 为常规傅里叶变换法得到的实验结果, 其中图 3a 为人体血细胞的包裹位相图, 图 3b 为解包裹后的 2 维位相图, 图 3c 为图 3b 的 3 维显示。

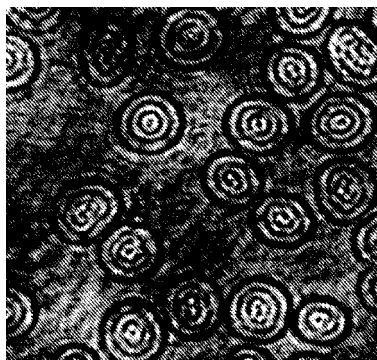


Fig. 1 Hologram of human blood cells

为了检验希尔伯特变换重构算法的精度, 与常规傅里叶变换法做了比较来进行验证。标准偏差是描述各数据偏离平均数的距离(离均差)的平均数, 它是离差平方和平均后的方根。

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (8)$$

式中,  $\bar{X}$  代表所采用的样本  $x$  的均值, 标准偏差是方差的算术平方根。标准偏差能反映一个数据集的离散程度, 标准偏差越小, 这些值偏离平均值就越多, 反之亦然。标准偏差的大小可通过标准偏差与平均

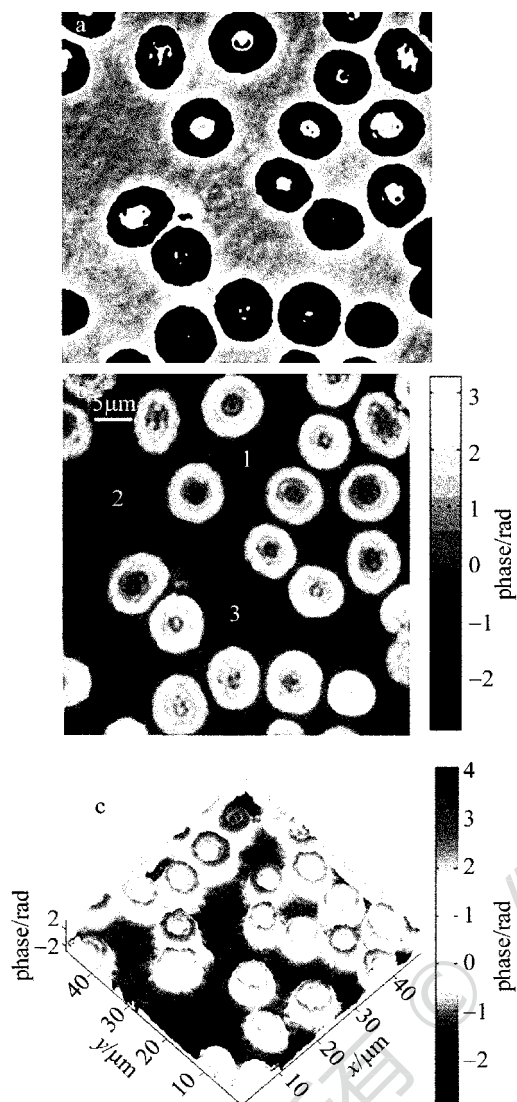


Fig. 2 The reconstruction results based on Hilbert transform  
a—wrapped phase diagram b—2-D phase diagram of human body blood  
c—3-D phase diagram of human body blood  
值的倍率关系来衡量。

利用 MATLAB 编程,分别对希尔伯特变换重构算法和常规傅里叶变换算法得出的 2 维位相图选取 3 个不同的区域,求出它们的标准偏差做对比。其中图 2b 是希尔伯特变换重构算法求出的 2 维位相图选择的 3 个区域,图 3b 是常规傅里叶变换算法求出的 2 维位相图选取的对应的 3 个区域。所求出的

Table 1 Standard deviation contrast data

	standard deviation/rad	
	Hilbert transform method	conventional Fourier transform method
area 1	0.2481	0.2827
area 2	0.1689	0.1816
area 3	0.2252	0.2914

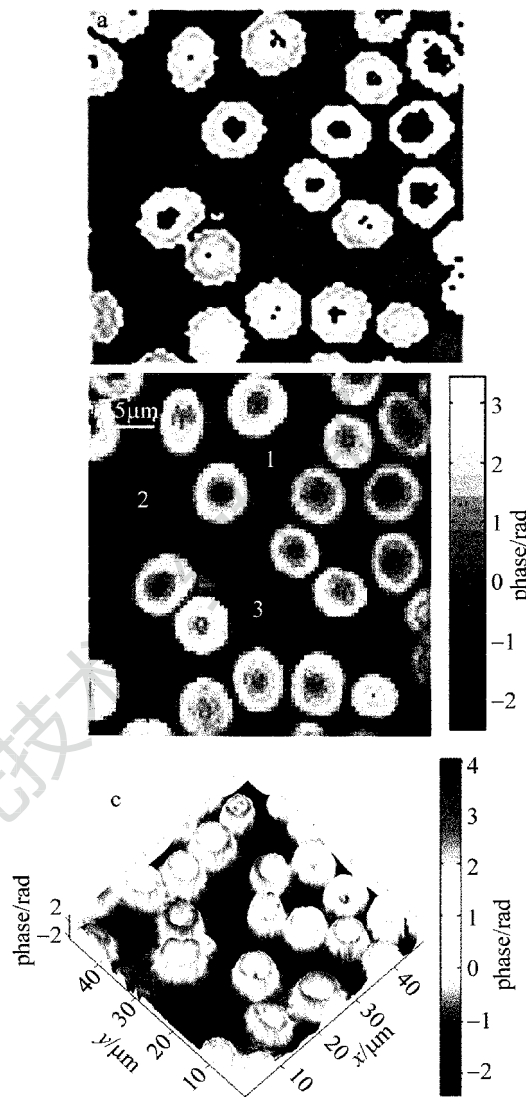


Fig. 3 Experimental results based on the conventional Fourier transform reconstruction method  
a—wrapped phase diagram b—2-D phase diagram of human body blood  
c—3-D phase diagram of human body blood

标准偏差值如表 1 所示。

由表 1 可以明显看出,希尔伯特变换重构算法选取的 3 个区域求出的标准偏差均比常规傅里叶变换算法求出的标准偏差要小。因此,希尔伯特变换重构算法比常规傅里叶变换算法精度高。

对希尔伯特变换重构算法和常规傅里叶变换算法得出的 2 维位相图选取同一个细胞绘制 1 维位相图,细胞选取的区域分别如图 4a 和图 4b 所示,以图中细胞白线为中心,在 MATLAB 中绘制的曲线图如图 4c 所示。图 4c 中两条曲线分别为希尔伯特变换重构算法选取的区域绘制出的曲线和常规傅里叶变换算法选取的区域绘制的曲线。由图 4 可知,两种算法的位相分布基本一致。



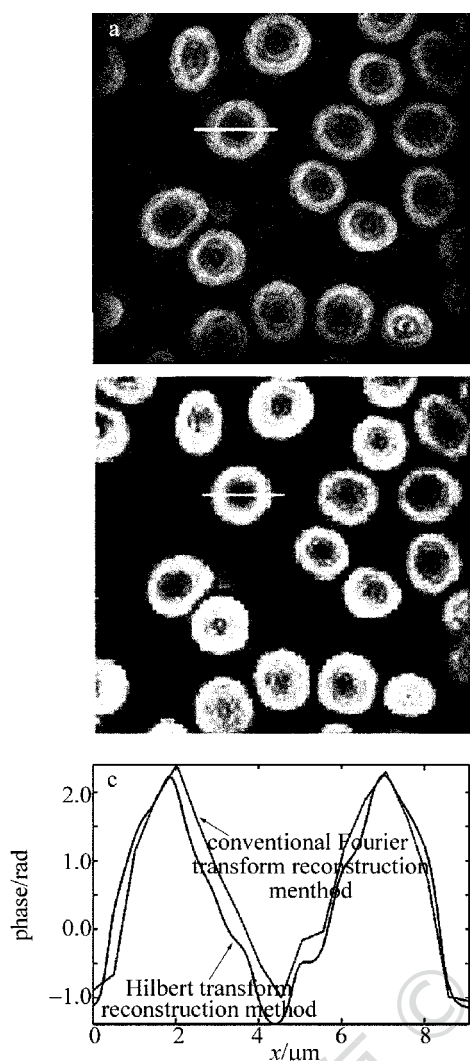


Fig. 4 Phase distribution of individual cells

a—2-D phase diagram of Hilbert transform reconstruction method b—2-D phase diagram of conventional Fourier transform reconstruction method c—phase distribution of individual cells

### 3 结论

利用所提出的希尔伯特变换法,保留了-1级项的位相信息,并构造解析信号,提高了位相重构的精度。对希尔伯特变换法和常规傅里叶变换法进行了标准偏差对比和位相分析,实验结果表明,希尔伯特变换法具有较高的精度。

#### 参 考 文 献

[1] WANG H Y, ZHAO B Q, LIAO W, *et al.* Reconstruction of three-

dimensional information in digital micro-holography[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2010, 22(10):2263-2266 (in Chinese).

[2] LÜ Q N, GE B Zh, ZHANG Y M. Digital microscopic image plane holography[J]. Optoelectronics Letters, 2006, 17(4):475-478 (in Chinese).

[3] JIAO G H, LI Y L, HU B W. Mirau phase-shifting interferometer for profile measurement of icrolensesarray[J]. Acta Photonica Sinica, 2007, 36(10):1924-1927 (in Chinese).

[4] LIU Y K, SU X Y, WU Q Y. Multicameracalibration by FTP technique[J]. Acta Photonica Sinica, 2007, 36(9):1734-1737 (in Chinese).

[5] GABRIEL P. Hilbert phase microscopy for investigating fast dynamics intransparent systems [J]. Applied Optics, 2005, 30(10):1165-1168.

[6] GAO Ch Y, ZHOU C L. A kind of calibration algorithm of phase-shifting based on Hilbert transform [J]. Optical Technique, 2004, 30(4):508-512 (in Chinese).

[7] XIONG L D, JIA Sh H. A novel Hilbert transform algorithm for phaseevaluation form fringe patter[J]. Acta Photonica Sinica, 2009, 39(9):1678-1681 (in Chinese).

[8] HOU R N. Application of Hilbert transform in reconstruction of in-line digital holography[J]. Laser Technology, 2013, 37(3):362-364 (in Chinese).

[9] HUANG D Sh, LU N Y, TONG Zh F. Applying Hilbert transform to extract phase signal[J]. Vibration, Test and Diagnosis, 1988, 9(2):13-16 (in Chinese).

[10] QIAN X F, WANG Zh L, HU T, *et al.* Reconstructing the phase of wavefront using digital hologram and the principle of shearing interferometry[J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(7):1821-1826 (in Chinese).

[11] ZENG X, DING J P, LIANG P Y, *et al.* Wave front reconstruction from shearing interferograms using least square fitting[J]. Acta Optica Sinica, 2005, 25(3):35-40 (in Chinese).

[12] ZHONG L Y, ZANG Y M, LÜ X X, *et al.* Analysis of the characteristic about the digital holography of the spherical reference wave[J]. Acta Optica Sinica, 2004, 24(9):1209-1213 (in Chinese).

[13] DI J L, ZHAO J L, FAN Q, *et al.* Phase correction of wavefront reconstruction in digital holographic microscopy[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(1):56-61 (in Chinese).

[14] COLOMB T, CUCHE E. Automatic procedure for aberration compensation in digital holographic microscopy and applications to specimen shape compensation[J]. Applied Optics, 2006, 45(5):851-863.