

文章编号: 1001-3806(2015)01-0109-05

非线性囚禁离子振动模式互关联函数的研究

王中结, 方 旭

(安徽师范大学 物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

摘要: 为了研究非线性对囚禁离子沿两个正交方向的振动模式之间的互相关函数的影响, 采用理论分析和数值计算相结合的方法, 对单个 2 维三能级囚禁离子与两个经典驻波激光相互作用的非线性双光子 Jaynes-Cummings 模型进行了严格求解, 并对囚禁离子沿两个正交方向的振动模式之间的互相关函数进行了数值分析。结果表明, 当初始平均量子数较小时, 反关联效应随 Lamb-Dicke 参量的增大先是增强然后减弱, 但是关联效应却随 Lamb-Dicke 参量的增大一直增强。随着初始平均量子数的增大, 反关联效应会减弱直至消失; 表征非线性效应的 Lamb-Dicke 参量和初始振动运动平均量子数对交叉关联有明显的影

关键词: 量子光学; 交叉关联函数; 囚禁离子; 非线性 Jaynes-Cummings 模型

中图分类号: O431.2 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2015.01.022

Study on cross correlation function of vibrational modes of nonlinear trapped ions

WANG Zhongjie, FANG Xu

(College of Physics and Electric Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: In order to study the influence of nonlinear parameters on the cross-correlation function of two vibrational modes of the trapped ions along mutually orthogonal directions, the exact solution of the nonlinear double-photon Jaynes-Cummings model which describes the interaction between a single two-dimension three-level trapped ion and two classical standing wave lasers was obtained by theoretical analysis and numerical computation. The cross-correlation function of two vibrational modes of the trapped ion was analyzed numerically. The results show that the anticorrelation effect is strengthened at first and then weakened with the increasing of the Lamb-Dicke parameters when initial average quantum number is small. But the correlated effect is always strengthened with the increase of the Lamb-Dicke parameters. The anticorrelation effect will be weakened and then disappear with the increasing of initial average quantum number. The initial average quantum number and Lamb-Dicke parameters characterized by nonlinear effects have obvious influence on cross correlation.

Key words: quantum optics; cross-correlated function; trapped ion; nonlinear Jaynes-Cummings model

引 言

近年来, 激光束操控囚禁离子的研究已成为非常活跃的研究领域。囚禁离子系统不仅在工程的量子态方面是非常重要的^[1-2], 而且在诸如量子隐形传态和量子计算中有重要的应用价值^[3-5]。在 Lamb-Dicke 极限下, 囚禁离子与经典驻波光场的相互作用

通常是由类似于腔量子电动力学的 Jaynes-Cummings (J-C) 模型描述。在 J-C 模型基础上, 为制备各种非经典状态, 人们提出了许多方案, 例如 Fock 态的制备^[6]、纠缠态的制备^[7]、压缩相干态的制备^[8]、纠缠态的制备^[9]、激发薛定谔猫态的制备^[10]、簇态的制备^[11]等。但是, 在远离 Lamb-Dicke 极限下, 囚禁离子与经典驻波光场的相互作用必须由非线性 J-C 模型来描述。近来, 在非线性 J-C 模型基础上, 人们提出了制备非线性相干态的方法^[12], 并对二能级囚禁离子的量子动力学进行了研究^[13-15], 如参考文献[13]中, 作者研究了二能级囚禁离子的非线性 J-C 模型, 分析了非线性对离子布居数的影

基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目(090412060)

作者简介: 王中结(1962-), 男, 博士, 教授, 主要从事量子光学等领域的研究。

E-mail: wuliwzj@mail.ahnu.edu.cn

收稿日期: 2014-01-12; 收到修改稿日期: 2014-02-20

响。然而,在关于囚禁离子的非线性 J-C 模型的研究中,人们大多集中考虑二能级囚禁离子与驻波激光束的相互作用。

本文中研究了单个三能级 2 维囚禁离子与经典驻波激光场的相互作用,得到了这个非线性 J-C 模型的严格解,数值分析了 2 维囚禁离子的振动运动之间的交叉关联效应。结果表明,非线性参量对交叉关联效应有明显地影响。

1 模型及其演化算符

考虑囚禁在一个 2 维简谐势阱中单个三能级离子,与两束分别沿 x 和 y 方向的驻波激光场相互作用,一束激光场的频率为 $\omega_{\text{laser},1}$,另一束频率为 $\omega_{\text{laser},2}$ 。囚禁离子由两个基态和一个激发态组成,基态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的能量分别为 $\hbar\omega_1$ 和 $\hbar\omega_2$,激发态 $|3\rangle$ 的能量为 $\hbar\omega_3$,如图 1 所示。

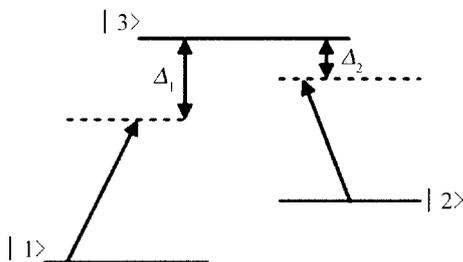


Fig. 1 Level scheme of the trapped ion interacting with two standing wave laser fields

随着应用的旋转波近似,系统的哈密顿量为 (令 $\hbar=1$):

$$\begin{cases} H = H_0 + H_i \\ H_0 = \nu_1 a_1^\dagger a_1 + \nu_2 a_2^\dagger a_2 + \sum_{i=1}^3 \omega_i |i\rangle\langle i| \\ H_i = \frac{g_1}{2} \cos[\eta_1(a_1 + a_1^\dagger) + \varphi_1] \times \\ \quad [\exp(-i\omega_{\text{laser},1}t) |3\rangle\langle 1| + \exp(i\omega_{\text{laser},1}t) |1\rangle\langle 3|] + \\ \quad \frac{g_2}{2} \cos[\eta_2(a_2 + a_2^\dagger) + \varphi_2] \times \\ \quad [\exp(-i\omega_{\text{laser},2}t) |3\rangle\langle 2| + \exp(i\omega_{\text{laser},2}t) |2\rangle\langle 3|] \end{cases} \quad (1)$$

式中, a_i (a_i^\dagger) ($i=1,2$) 表示囚禁离子沿 x 和 y 方向的质心振动运动的湮灭 (产生) 算符, ν_i 是囚禁频率, φ_i ($i=1,2$) 是驻波激光场的相位 (沿 x 和 y 方向), g_i 是耦合常数, $\eta_i = k_i \sqrt{\hbar/(2m\nu_i)}$ 是 Lamb-Dick 参量, m 是囚禁离子的质量, k_i 是驻波激光场的波数。

在下面的计算中,假定 $g_1 = g_2 = g, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ 。在相互作用图像中,相互作用哈密顿可表示为:

$$\begin{aligned} H_i = & \frac{g}{2} \cos[\eta_1(a_1 \exp(-i\nu_1 t) + a_1^\dagger \exp(i\nu_1 t)) + \\ & \varphi] [\exp(-i\Delta_1 t) |3\rangle\langle 1| + \exp(i\Delta_1 t) |1\rangle\langle 3|] + \\ & \frac{g}{2} \cos[\eta_2(a_2 \exp(-i\nu_2 t) + a_2^\dagger \exp(i\nu_2 t)) + \varphi] \times \\ & (\exp(-i\Delta_2 t) |3\rangle\langle 2| + \exp(i\Delta_2 t) |2\rangle\langle 3|) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\Delta_1 = \omega_3 - \omega_1 - \omega_{\text{laser},1}$, $\Delta_2 = \omega_3 - \omega_2 - \omega_{\text{laser},2}$ 。为计算方便起见,令 $\Delta_1 = \nu_1, \Delta_2 = \nu_2$ 。应用下列公式:

$$\begin{aligned} & \exp[i\eta_j(a_j \exp(-i\nu_j t) + a_j^\dagger \exp(i\nu_j t))] = \\ & \sum_{l,m} \frac{(i\eta_j)^{2m+l}}{m!(m+l)!} \times [(a_j^\dagger)^m a_j^{m+l} \exp(-i\nu_j t) + \\ & (a_j^\dagger)^{l+m} a_j^m \exp(i\nu_j t)], \quad (j=1,2) \end{aligned} \quad (3)$$

并忽略快速时变项,可以得到:

$$H_i = g [(A_1 |3\rangle\langle 1| + A_1^\dagger |1\rangle\langle 3|) + (A_2 |3\rangle\langle 2| + A_2^\dagger |2\rangle\langle 3|)] \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} A_j = f_j(a_j^\dagger a_j) a_j, \quad (j=1,2) \\ f_j(a_j^\dagger a_j) = \sin\varphi \sum_m \frac{(-\eta_j)^{2m}}{m!(m+1)!} (a_j^\dagger)^m a_j^m \end{cases} \quad (5)$$

容易证明 A_j 和 A_j^\dagger 算符满足下列的对易关系:

$$[A_j, A_j^\dagger] = [a_j a_j^\dagger f_j^2(a_j^\dagger a_j) - a_j^\dagger a_j f_j^2(a_j^\dagger a_j - 1)] \delta_{ij} \quad (6)$$

式中, $\delta_{ij} = 1$ ($i=j$), $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$)。应当指出哈密顿量(4)式描述了一个三能级 2 维囚禁离子与两束经典驻波激光场相互作用的非线性模型,并对任意值的 Lamb-Dicke 参量 η_1 和 η_2 都有效。

在原子态表象中,推导由哈密顿(4)式确定的演化算符 $U_I = e^{-iH_I t}$ 的矩阵元,结果如下:

$$\begin{aligned} U_{i,11} &= 1 + A_1^\dagger \frac{\cos(gt\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger}) - 1}{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger} A_1, \\ U_{i,12} &= A_1^\dagger \frac{\cos(gt\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger}) - 1}{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger} A_2, \\ U_{i,13} &= -i A_1^\dagger \frac{\sin(gt\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger})}{\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger}}, \\ U_{i,21} &= A_2^\dagger \frac{\cos(gt\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger}) - 1}{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger} A_1, \\ U_{i,22} &= 1 + A_2^\dagger \frac{\cos(gt\sqrt{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger}) - 1}{A_1 A_1^\dagger + A_2 A_2^\dagger} A_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{i,23} &= -iA_2^+ \frac{\sin(gt\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+})}{\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+}}, \\
 U_{i,31} &= -i \frac{\sin(gt\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+})}{\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+}} A_1, \\
 U_{i,32} &= -i \frac{\sin(gt\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+})}{\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+}} A_2, \\
 U_{i,33} &= \cos(gt\sqrt{A_1A_1^+ + A_2A_2^+}) \quad (7)
 \end{aligned}$$

2 二模交叉关联效应

在这一节中,研究囚禁离子的沿 x 和 y 方向的振动运动之间的交叉关联效应。归一化的二模交叉关联函数定义如下:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \sum_{n,m} F_n F_m \left\{ -i \frac{\sin(gt u_{nm})}{u_{nm}} f_1(n) \sqrt{n+1} |n+1\rangle_1 |m\rangle_2 |1\rangle - \right. \\
 &\quad \left. i \frac{\sin(gt u_{nm})}{u_{nm}} f_2(m) \sqrt{m+1} |n\rangle_1 |m+1\rangle_2 |2\rangle + \cos(gt u_{nm}) |n\rangle_1 |m\rangle_2 |3\rangle \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

式中, $u_{nm} = \sqrt{f_1^2(n)(n+1) + f_2^2(m)(m+1)}$ 。

应用(10)式,可以计算(8)式各力学量的期望值为:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle a_1^+ a_1 \rangle &= \sum_{n,m} F_n^2 F_m^2 \left\{ \frac{\sin^2(gt u_{nm})}{u_{nm}^2} [f_1^2(n)(n+1)^2 + f_2^2(m)n(m+1)] + \right. \\
 &\quad \left. \cos^2(gt u_{nm}) n \right\} \\
 \langle a_2^+ a_2 \rangle &= \sum_{n,m} F_n^2 F_m^2 \left\{ \frac{\sin^2(gt u_{nm})}{u_{nm}^2} [f_1^2(n)n(m+1) + f_2^2(m)(m+1)^2] + \right. \\
 &\quad \left. \cos^2(gt u_{nm}) m \right\} \\
 \langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle &= \sum_{n,m} F_n^2 F_m^2 \left\{ \frac{\sin^2(gt u_{nm})}{u_{nm}^2} [f_1^2(n)(n+1)^2 m + f_2^2(m)n(m+1)^2] + \right. \\
 &\quad \left. \cos^2(gt u_{nm}) nm \right\}
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

将(11)式代入(8)式,可得交叉关联函数 $G_{a_1 a_2}$ 随着时间的变化。定义无量纲时间 $\tau = gt$, 画出 $G_{a_1 a_2}$ 在不同的 Lamb-Dicke 参量条件下随无量纲时间的变化曲线,如图 2 所示。从图 2 中可以看出,在初始平均量子数 $|\alpha|^2 = 1.0$ 情形下,交叉关联函数 $G_{a_1 a_2}$ 在某些时段对于任意的 Lamb-Dicke 参量都小于 1, 这表明模式 a_1 和 a_2 之间存在反关联。这种反关联效应容易受 Lamb-Dicke 参量 η_1 和 η_2 的影响。随着 η_1 和 η_2 的增大,反关联效应得到增强。然而,进一步增大 η_1 和 η_2 ,反关联效应反而减弱。这说明

$$G_{a_1 a_2} = \langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2 \rangle / (\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle) \quad (8)$$

如果 $G_{a_1 a_2} < 1$,就说模式 a_1 和模式 a_2 是反关联的,如果 $G_{a_1 a_2} > 1$,就说两者是关联的,即囚禁离子的振动运动具有非经典的性质。为了数值计算交叉关联函数,首先假定囚禁离子初始处在激发态 $|3\rangle$, 沿 x 和 y 方向的质心振动运动分别处在相干态 $|\alpha\rangle_1$ 和 $|\alpha\rangle_2$ 。这样,系统的初态可表示成:

$$\begin{aligned}
 |\psi(0)\rangle &= |3\rangle \otimes |\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2 = \\
 &= |3\rangle \otimes \sum_{n,m} F_n F_m |n\rangle_1 |m\rangle_2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

式中, $F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(-|\alpha|^2/2)$, α 为算符 a_1 和 a_2 的本征值。应用(7)式,容易计算囚禁离子任意时刻 t 的态矢为:

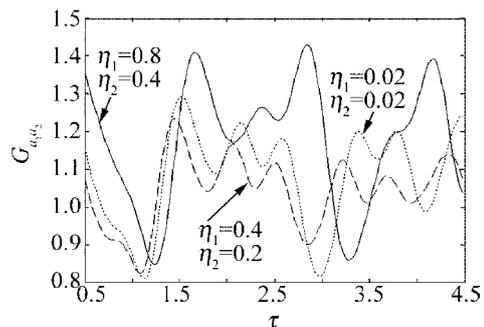


Fig. 2 Cross-correlation function $G_{a_1 a_2}$ versus dimensionless time $\tau = gt$ with initial average quantum number $|\alpha|^2 = 1.0$, $\varphi = \pi/2$ and various parameters η_1, η_2

Lamb-Dicke 参量对反关联效应的影响是复杂的。另一方面,交叉关联函数 $G_{a_1 a_2}$ 在某些时段对于任意的 Lamb-Dicke 参量都大于 1, 这表明模式 a_1 和 a_2 之间存在关联, 即存在非经典效应。Lamb-Dicke 参量对这种关联效应有明显的影响。图 2 表明, Lamb-Dicke 参量 η_1 和 η_2 越大, 两模间的关联效应越强。作者进一步研究了初始平均量子数对关联效应的影响, 如图 3 和图 4 所示。发现随着初始平均量子数的增大, 反关联效应将减弱直至消失。

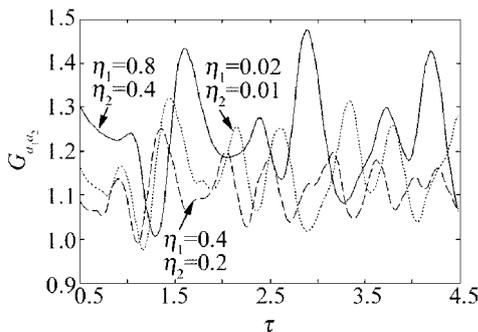


Fig. 3 Cross-correlation function $G_{a_1 a_2}$ versus dimensionless time $\tau = gt$ with initial average quantum number $|\alpha|^2 = 2.0$, $\varphi = \pi/2$ and various parameters η_1, η_2

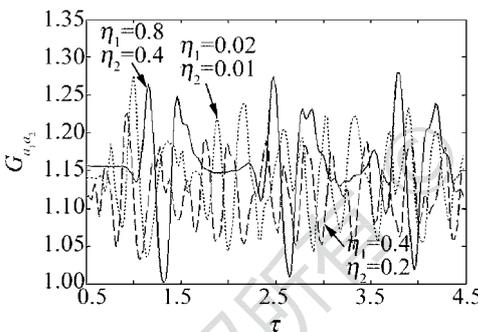


Fig. 4 Cross-correlation function $G_{a_1 a_2}$ versus dimensionless time $\tau = gt$ with the initial average quantum number $|\alpha|^2 = 5.0$, $\varphi = \pi/2$ and the various parameters η_1, η_2

3 讨 论

下面提出一个可能的实验构型^[16]。将一个 $^{40}\text{Ca}^+$ 置于一个强射频的 Pauli 势阱中, 离子在势阱中沿 x 和 y 方向的振荡频率取为 $\nu_1 = \nu_2 \approx 70.3\text{MHz}$, 并由沿 x 和 y 方向的驻波激光场驱动。离子采用受激 Raman 激光冷却技术。离子的两个能级基态 $^2S_{1/2}$ 和亚稳态 $^2D_{5/2}$ (寿命约 1s) 分别记为 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$, 另一个能级 $^2P_{1/2}$ 记为 $|3\rangle$ 。这里, 给出一个测量离子振动模式的交叉关联函数的方法。用一束与 x 轴成 45° 的方向传输的经典行波光场将囚禁离子从基态 $|1\rangle$ 激发到高激发态 $|3\rangle$, 系统哈密顿

为:

$$\begin{cases} H = H_0 + H_i \\ H_0 = \nu_1 a_1^\dagger a_1 + \nu_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_1 |1\rangle\langle 1| + \omega_3 |3\rangle\langle 3| \\ H_i = \frac{g}{2} \exp\{-i[\bar{\eta}_1(a_1 + a_1^\dagger) + \bar{\eta}_2(a_2 + a_2^\dagger)]\} \times \\ [\exp(-i\omega_{\text{laser}} t) |3\rangle\langle 1| + \exp(i\omega_{\text{laser}} t) |1\rangle\langle 3|] \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\bar{\eta}_1 = k_{\text{laser}} \cos 45^\circ \sqrt{\hbar/(2m\nu_1)}$, $\bar{\eta}_2 = k_{\text{laser}} \sin 45^\circ \times \sqrt{\hbar/(2m\nu_2)}$, ω_{laser} 是激光频率, g 为耦合常数。应用旋转波近似和 Lamb-Dicke 近似, 且使激光频率满足 $\omega_{\text{laser}} = \omega_3 - \omega_1 - \nu_1 - \nu_2$, 则可得到系统相互哈密顿为:

$$H_i' = -\frac{\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 g}{2} (a_1 a_2 |3\rangle\langle 1| + a_1^\dagger a_2^\dagger |1\rangle\langle 3|) \quad (13)$$

可以看出, 离子从基态跃迁到高激发态的几率的时间导数正比于 $\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 \rangle$, 即正比于二模交叉关联函数^[17]。至此, 利用荧光光谱技术可以测量离子振动模式的交叉关联函数, 参见参考文献^[18]。

4 结 论

研究了一个 2 维三能级囚禁离子与两束经典驻波激光场的相互作用的非线性 J-C 模型。求出了这个非线性 J-C 模型的严格解。分析了囚禁离子的两个振动模式之间的交叉关联函数。数值计算结果表明: Lamb-Dicke 参量 (表征非线性效应, 这个参量越大, 非线性越强) 对交叉关联有明显地影响; 当初始平均量子数较小时, 反关联效应随 Lamb-Dicke 参量的增大先是也增大然后减弱, 但是关联效应却随 Lamb-Dicke 参量的增大一直增强; 随着初始平均量子数的增大, 反关联效应会减弱直至消失。

参 考 文 献

- [1] LEIBFRIED D, BLATT R, MONROE C, *et al.* Quantum dynamics of single trapped ions[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2003, 75(1): 281-354.
- [2] ROOS C, ZEIGER T, ROHDE H, *et al.* Quantum state engineering on an optical transition and decoherence in a Paul trap[J]. *Physics Review Letters*, 1999, 83(23): 4713.
- [3] BARRETT M D, CHIAVERINI J, SCHAEZT T, *et al.* Deterministic quantum teleportation of atomic qubits[J]. *Nature*, 2004, 429(6993): 737-739.
- [4] GARCIA-RIPOLL J J, ZOLLER P, CIRAC J I. Speed optimized two-qubit gates with laser coherent control techniques for ion trap quantum computing[J]. *Physics Review Letters*, 2003, 91(15): 157901-157904.

- [5] DUAN L M. Scaling ion trap quantum computation through fast quantum gates [J]. *Physics Review Letters*, 2004, 93 (10): 100502-100505.
- [6] CIRAC J I, BLATT R, ZOLLER P. Nonclassical states of motion in a three-dimensional ion trap by adiabatic passage [J]. *Physics Review*, 1994, A49(5): R3174.
- [7] KIRCHMAIR G, BENHELM J, ZAHRINGER F, *et al.* Deterministic entanglement of ions in thermal states of motion [J]. *New Journal of Physics*, 2009, 11(2): 023002-023022.
- [8] WANG Zh J. Preparation of squeezed state and entanglement state between vibrational motion of trapped ion and light [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, 54(6): 1109-1110.
- [9] ZHENG Sh B. Generation of multi-mode excited coherent states for N trapped ions in strong-excitation regime [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2005, 43(3): 523.
- [10] WANG Zh J, ZHANG X D, LI C. Properties and generation of photon-added Schrödinger cat states [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2012, 57(3): 459-462.
- [11] WUNDERLICH H, WUNDERLICH C, SINGER K, *et al.* Two-dimensional cluster-state preparation with linear ion traps [J]. *Physics Review*, 2009, A79(5): 052324-052334.
- [12] de MATOS FILHO R L, VOGEL W. Nonlinear coherent states [J]. *Physics Review*, 1996, A54(5): 4560-4563.
- [13] WANG Zh Q, DUAN Ch K, AN G L. Nonlinear Jaynes-Cummings model of a trapped ion and the evolution of the ion population inversion [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(7): 3438-3442 (in Chinese).
- [14] YU W J, WANG J S, LIANG B L. Quantum properties of two-level atoms interacting with nonlinear coherent states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(6): 060301 (in Chinese).
- [15] LI C, WANG Zh J. Amplitude-squeezed effects in nonlinear trapped model [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2013, 30(3): 435-440 (in Chinese).
- [16] HAFFNER H, GULDE S, RIEBE M, *et al.* Precision measurement and compensation of optical Stark shifts for an ion-trap quantum processor [J]. *Physics Review Letters*, 2003, 90(14): 143602-143607.
- [17] GUO G C. *Quantum optics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1990: 76-87 (in Chinese).
- [18] WALTHER H. Spectroscopy of single trapped ions and applications to frequency standards and cavity quantum electrodynamics [J]. *Laser Physics*, 1999, 9(1): 225-233.