

文章编号: 1001-3806(2014)06-0747-06

## 高斯光束质量与波像差之间的关系

贺元兴, 穆佰利, 李 建, 李 伟  
(中国人民解放军 95859 部队, 酒泉 735018)

**摘要:** 为了考察光阑截断时高斯光束质量与波像差之间的关系, 采用高斯光束  $\beta$  值作为截断高斯光束质量的评价参量, 通过数值仿真的方法分析光学系统波像差对截断高斯光束质量的影响, 给出了高斯光束  $\beta$  值与波像差间的拟合关系。讨论了高斯光束质量与 Kolmogoroff 大气湍流强度间的关系, 并给出了二者间的拟合公式。结果表明, 该拟合公式的计算结果在相当广的湍流强度范围内与数值仿真结果较好吻合, 这也进一步验证了高斯光束  $\beta$  值与波像差拟合关系的正确性。

**关键词:** 激光光学; 高斯光束质量; 衍射积分; 波像差; 大气湍流; 泽尼克多项式

**中图分类号:** TN012 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.06.006

## Relationship between Gaussian beam quality and wavefront aberration

HE Yuanxing, MU Baili, LI Jian, LI Wei  
(95859 Unit, Chinese People's Liberation Army, Jiuquan 735018, China)

**Abstract:** In order to investigate the relationship between the truncated Gaussian beam and wavefront aberration, the parameter of Gaussian beam  $\beta$  factor was proposed to evaluate the beam quality of the truncated Gaussian laser. The influence of wavefront aberration of optical system on Gaussian beam quality was analyzed by using numerical simulation method and the fitting relationship between Gaussian beam quality  $\beta$  factor and wavefront aberration was given. As an example, the relationship between Gaussian beam quality and atmospheric turbulence strength with Kolmogoroff spectral was discussed and their fitting formula was given. The calculating results show that the fitted curve is in good agreement with the corresponding simulated data in a relatively wide range of turbulence strength, which further validate the correctness of the fitting formula between Gaussian beam  $\beta$  factor and wavefront aberration.

**Key words:** laser optics; Gaussian beam quality; diffraction integral; wavefront aberration; atmospheric turbulence; Zernike polynomials

### 引 言

在工业加工及科学实验中, 高斯光束是使用较多的一类激光束, 对高斯光束质量进行合理评估是人们比较关心的研究课题。早在 20 世纪 90 年代初, SIEGMANN 教授提出  $M^2$  因子评价参量并用于衡量高斯光束的质量<sup>[1]</sup>, 后来该指标被国际标准化组织 (the International Organization for Standardization, ISO) 采纳<sup>[2]</sup>, 然而在实际应用中, 由于光束或多或少会受到空间光阑的截断, 当光阑对光束的截断比较明显时,  $M^2$  因子会遇到积分发散的困难<sup>[3]</sup>,

所以对截断光束质量的评价也一直被排除在 ISO 文件之外。为克服  $M^2$  的不足, 广义截断二阶矩<sup>[4-5]</sup>、渐近分析<sup>[6]</sup> 和自收敛束宽<sup>[7]</sup> 等 3 种分析方法被独立提出, 渐进分析法是通过功率含量百分比来确定积分范围, 自收敛束宽方法则是通过常数  $F_0$  与二阶矩定义的束宽之积来确定积分范围, 从而克服了  $M^2$  因子在理论上的数值发散问题。由于这些分析方法对计算参量较为敏感, 参量取不同的值可能会得出不同的  $M^2$  因子数值, 而且在利用上述 3 种分析方法计算同一激光束的质量时, 得到的光束质量优劣结论也不尽相同, 这使得广义  $M^2$  因子的应用有待进一步完善和推广<sup>[8]</sup>。HERLOSKI<sup>[9]</sup> 以及 MAHAJAN<sup>[10]</sup> 等人将相同发射口径无像差高斯光束作为理想参考光束, 定义峰值斯特列比来衡量高斯光束的质量; JI<sup>[11]</sup> 将相同发射口径均强平面光束作为

作者简介: 贺元兴 (1984-), 男, 博士, 工程师, 现从事高能激光技术、精密光学测量技术等方面的研究。

E-mail: yuanxing-he@163.com

收稿日期: 2013-12-23; 收到修改稿日期: 2014-01-08

理想参考光束,定义光束  $\beta$  值来评价超高斯(包括基模高斯)光束的质量,由此可见,目前人们对评价高斯光束质量的理想参考光束的选取方法并不统一,并且评价参量不能客观衡量光阑截断因素对高斯光束质量的影响。

在激光应用领域,人们比较关心的是激光的远场能量集中度(亦激光可聚焦能力),光束  $\beta$  值是使用较多的光束质量评价指标。由于波像差是影响光束质量尤为重要的因素,XIAN<sup>[12]</sup>,LI<sup>[13]</sup>等人曾分析过 Zernike 波像差对圆形实心平面光束质量的影响,并提出了光束  $\beta$  值与波像差之间的拟合关系式,由于高斯光束质量和波像差间的关系与截断光阑的口径密切相关,对高斯光束  $\beta$  值与波像差间的关系少见相类似的研究报道。本文中采用高斯光束  $\beta$  值作为衡量有截断和无截断高斯光束质量的评价参量,分析了评价指标定义中理想参考光束的合理选择问题。对高斯光束质量与各阶 Zernike 波像差之间的关系进行了仿真计算,给出了高斯光束  $\beta$  值与 Zernike 波像差间的近似拟合关系式,并依此讨论了高斯光束质量与 Kolmogoroff 大气湍流波像差间的关系,为工程实际应用提供一些理论指导。

### 1 理想参考光束及高斯光束 $\beta$ 值

假设高斯光束被半径为  $a$  的圆形发射光阑截断,光阑出射端的光波复振幅分布为:

$$E(\rho) = E_0 \exp(-\gamma \rho^2), (0 \leq \rho \leq 1) \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为发射孔径内归一化径向距离;  $E_0$  为复振幅常数;  $\gamma = (a/w_0)^2$  为截断系数,  $w_0$  为光阑所在平面上高斯光束半宽,  $\gamma$  越大,光阑对高斯光束的截断越小,  $\gamma = 0$  对应于相同口径的平面光束。容易求得在光阑截断情况下,透过光阑的激光能量占入射激光总能量的份额为:

$$P_{\text{ratio}} = 1 - \exp(-2\gamma) \quad (2)$$

从上式可以看出,随着光阑口径的增大( $\gamma$  增大),高斯光束透过光阑的能量占激光总能量的份额迅速增加,当  $\gamma = 1$  时,  $P_{\text{ratio}} = 86.5\%$ ,  $\sqrt{\gamma} = 2$  时,  $P_{\text{ratio}} = 99.97\%$ ,  $\sqrt{\gamma} = 3$  时,  $P_{\text{ratio}}$  几乎为  $100\%$ ,因此通常认为当发射光阑的口径不小于 2 倍高斯光束宽度时,光阑对光束的截断及其衍射效应可以忽略。

根据傅里叶光学原理<sup>[14]</sup>,在  $z = f$  焦平面内的光强分布由下式给出:

$$I(x, y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \times$$

$$\left| \iint_{\infty} E(\xi, \eta) \exp[j\varphi(\xi, \eta)] \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda}(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta \right|^2 \quad (3)$$

式中,  $\lambda$  为激光波长,  $f$  为焦距,  $\varphi(\xi, \eta)$  为波像差,  $E(\xi, \eta) \exp[j\varphi(\xi, \eta)]$  为光波的近场复振幅分布。

图 1 为根据(1)式和(3)式计算得到的不存在波前畸变时,不同截断程度下高斯光束的远场桶中功率(power in the bucket, PIB)曲线及相同截断口径时实心均强平面光束的远场 PIB 曲线。图中,横轴为径向距离,单位为  $\lambda f/D$ ,  $D = 2a$  为圆形截断光阑直径,特别地,对平面光波,其远场焦平面内 Airy 光斑的中心亮斑半径为  $1.22\lambda f/D$ 。由图不难看出,在强截断情况( $\gamma = 1$ )下高斯光束的远场 PIB 曲线明显高于实心平面光束远场 PIB 曲线;在弱截断情况( $\sqrt{\gamma} \geq 2$ )时高斯光束的远场 PIB 曲线与实心平面光束的远场 PIB 曲线存在交叉,特别地,当  $\sqrt{\gamma} = 2$  时在

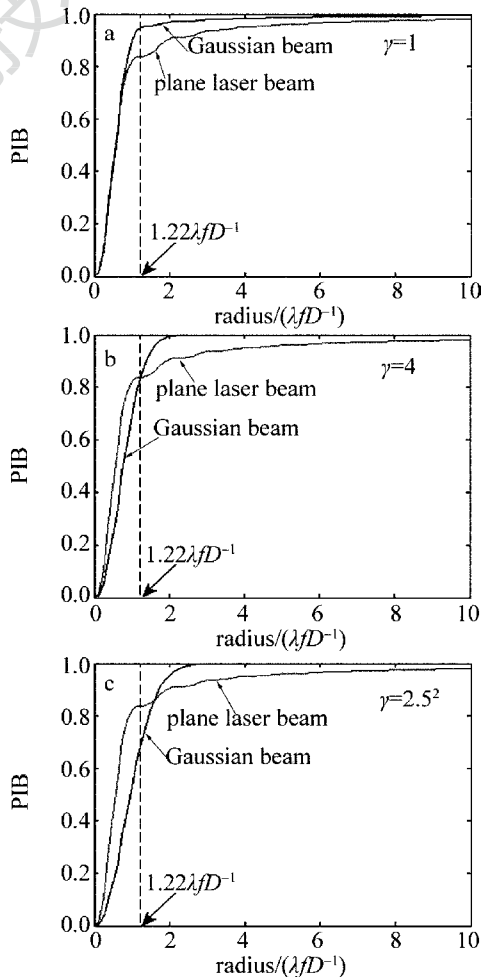


Fig. 1 Comparison of far-field PIB curves between the truncated Gaussian laser and plane laser

实心平面光束远场光斑中心主核区域内, 高斯光束与平面光束具有相同的桶中功率份额。因此不能简单地将实心平面光束作为衡量截断高斯光束质量的理想参考光束, 这也就说明了参考文献 [11] 中的相关分析并不合理。

选择无像差时的截断高斯光束作为评价截断高斯光束质量的理想参考光束也是不妥的, 如果按照文献中的相关结论, 无像差时强截断高斯光束与弱截断高斯光束质量二者均为最优, 实际上强截断高斯光束存在较大的衍射效应, 其远场光斑能量弥散程度会大于弱截断高斯光束情况。图 2 中给出了在不同截断程度下, 高斯光束的远场 PIB 曲线, 同时给出无截断情况下高斯光束的远场 PIB 曲线作对比。计算中高斯光束束腰宽度  $w_0 = 1\text{mm}$ , 激光波长  $\lambda = 632.8\text{nm}$ , 聚焦系统焦距  $f = 0.1\text{m}$ 。由图可以看出, 随着截断系数的减小(截断程度越大), 高斯光束的远场 PIB 曲线依次降低, 无截断高斯光束 ( $\gamma = 9$ ) 的远场 PIB 曲线是所有存在明显截断的高斯光束远场 PIB 曲线中最高的。

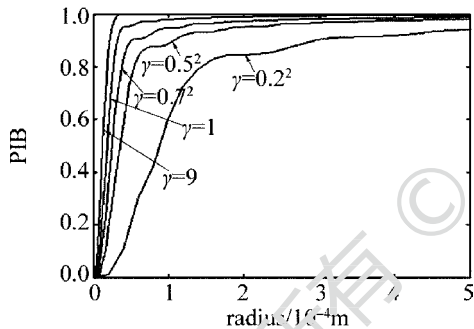


Fig. 2 Far-field PIB curves of Gaussian laser with different truncation

根据以上分析, 在评价截断高斯光束质量时选择无截断高斯光束作为理想参考光束较为合理, 高斯光束  $\beta$  值定义为实际光束的远场发散角  $\theta_{\text{real}}$  与理想参考光束的远场发散角  $\theta_{\text{ideal}}$  的比值, 即:

$$\beta = \frac{\theta_{\text{real}}}{\theta_{\text{ideal}}} \quad (4)$$

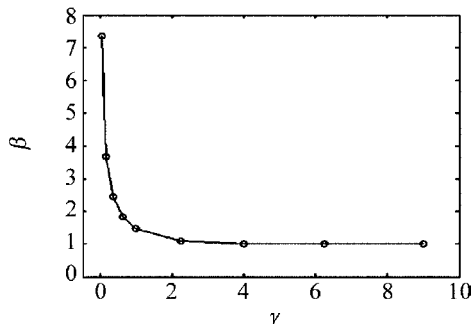


Fig. 3 Influence of truncation on different Gaussian beam  $\beta$  factor

其中, 实际光束与理想参考光束的远场发散角均是基于远场平面内某一规范能量比定义的。如果应用者更关心激光远场焦斑中心部分的光强, 规范能量比可取为 63.2%, 它与理想光斑峰值光强的  $1/e$  处光斑半径相对应, 这也与工程应用中规范能量比的取法一致。图 3 中给出光阑截断对高斯光束  $\beta$  值的影响, 可以看出, 随着截断程度的增加, 高斯光束  $\beta$  值逐渐增加, 光束质量变差, 当截断较小时, 实际光束逼近理想光束, 光束  $\beta$  值也逐渐趋于 1, 因此, 这里定义的高斯光束  $\beta$  值是能够考察光阑截断对光束质量的影响, 从而弥补了相关参考文献 [9-10] 的不足。

## 2 波像差与高斯光束 $\beta$ 值的关系

激光在远距离传输过程中(如通过大气湍流介质传输), 由于受到外界扰动的影响, 光束将具有十分复杂的波前形状, 一般很难用简单的函数精确地描述, 在各种近似描述方法中, 由于 Zernike 多项式在单位圆域内彼此正交, 且其低阶模式与光学设计中的 Seidel 像差相对应, 成为迄今为止应用较广的一种像差描述模型。圆孔径上任意波像差均可以用 Zernike 多项式的加权和来表示, 若不考虑 1 阶活塞像差, 则有:

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{k=2}^N a_k Z_k(\rho, \theta) \quad (5)$$

式中,  $\theta$  为极角,  $a_k$  为 Zernike 多项式系数,  $Z_k(\rho, \theta)$  为第  $k$  阶 Zernike 多项式, 本文中采用 NOLL 所给出的定义 [15], 即:

$$\begin{cases} Z_e(\rho, \theta) = \sqrt{2(n+1)} R_{m,n}(\rho) \cos(m\theta), (m \neq 0) \\ Z_o(\rho, \theta) = \sqrt{2(n+1)} R_{m,n}(\rho) \sin(m\theta), (m \neq 0) \\ Z_k(\rho, \theta) = \sqrt{n+1} R_{0,n}(\rho), (m = 0) \\ R_{m,n}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)! \rho^{n-2s}}{s! \left[\frac{n+m}{2} - s\right]! \left[\frac{n-m}{2} - s\right]!} \end{cases} \quad (6)$$

式中, 下标 e 表示  $k$  为偶数, 下标 o 表示  $k$  为奇数; 径向自由度  $m$  和角向频率数  $n$  满足关系  $m \leq n, n - |m|$  为偶数。

将(1)式、(5)式代入(3)式, 通过快速傅里叶变换算法可计算出存在波像差时高斯光束的远场光斑分布, 并进而通过(4)式计算高斯光束  $\beta$  值。计算了在不同截断程度下, 各阶 Zernike 波像差均方根 (root mean square, RMS) 值与光束  $\beta$  值间的关系, 其

中几个典型 Zernike 像差的计算结果如图 4、图 5 所示。

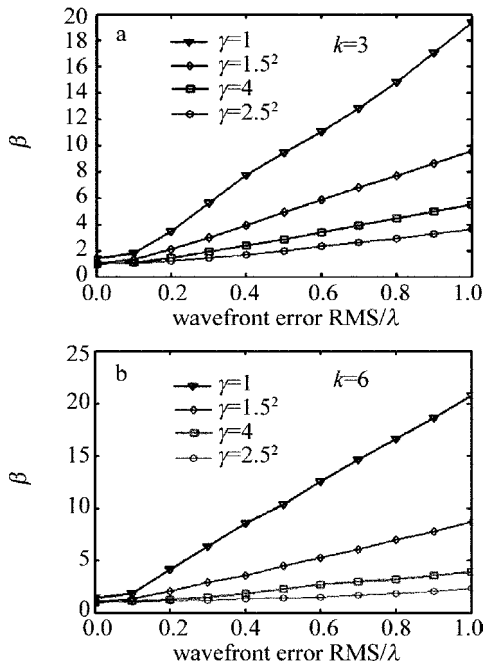


Fig. 4 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefront error with  $k=3$  and  $k=6$

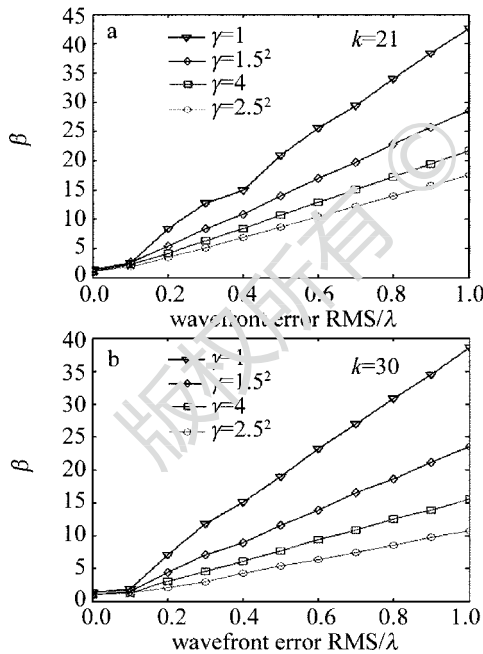


Fig. 5 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefront error with  $k=21$  and  $k=30$

由图 4 和图 5 可以看出,对于相同类型的 Zernike 波像差,在不同截断程度下高斯光束  $\beta$  值均随像差 RMS 值的增大而递增,而对于相同 RMS 值的 Zernike 像差,强截断高斯光束的  $\beta$  值要大于弱截断高斯光束  $\beta$  值,且随着波像差的增大而愈加明显。

实际上,由于高斯光束的能量分布在十分有限的空间范围以内,当截断光阑的口径大于其能量分布范围时,Zernike 波像差的有效分布范围也就小于截断光阑的口径,波像差的 RMS 值也将偏小,进而导致弱截断高斯光束的质量要优于相同均方值 Zernike 波前扰动情况下强截断高斯光束的质量。

根据以上分析,光阑的强截断会降低高斯光束的远场能量集中度,恶化其光束质量,在实际应用中应尽量避免该情况,而较大的口径又会低估波像差对光束质量的影响,因此从理论研究的角度出发,一种分析方法是取某一临界光瞳口径,其对高斯光束截断造成的衍射效应可以忽略,而且也不会造成光瞳内有效波像差的损失。从第 1 节中可知,当光瞳口径为高斯光束束腰宽度的 2 倍( $\sqrt{\gamma}=2$ )时,约有 99.97% 的激光能量通过光瞳,且光束  $\beta$  值几乎为 1,该口径的光瞳不会改变高斯光束的质量,因此在接下来的分析中可选择临界口径为  $D=4w_0$ 。

XIAN<sup>[12]</sup> 等人在研究波像差与光束质量间的关系时,针对实心平面光束情况,发现波像差与光束质量因子  $\beta$  之间满足简单的二次函数关系(这里简称为 XH\_method);LI<sup>[13]</sup> 等人指出对于小波像差情况,二次函数关系式拟合效果较好,对于大波像差情况则会存在较大拟合误差,并进而通过唯像的方法提出了新的解析关系式(简称为 LXY\_method)。设  $A_k$  和  $B_k$  为与第  $k$  阶 Zernike 波像差相对应的拟合系数, $\sigma_k^2$  为第  $k$  阶 Zernike 波像差的均方值, $\sigma^2$  为总的波像差均方值,表 1 中列出了关于光束质量因子  $\beta$  与波像差间的两种拟合关系式。

Table 1 Fitting relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefront error<sup>[12-13]</sup>

method	relationship between $\beta$ factor and aberration
XH_method	$\beta = A\sigma^2 + B\sigma + 1$ $A = \sum_{k=1}^N A_k \sigma_k^2 / \sigma^2$ $B = \sum_{k=1}^N B_k \sigma_k^2 / \sigma^2$
LXY_method	$\beta^2 = 1 + A\sigma^2$ $A = \sum_{k=1}^N A_k \sigma_k^2 / \sigma^2$

作者对前 65 阶 Zernike 波像差进行拟合计算,发现诸如离焦、球差等对高斯光束  $\beta$  值有较大影响的 Zernike 像差类型,LXY\_method 的拟合效果非常好,如图 6 所示,但对于某些类型的波像差(如  $k$  为 13,19,26 等),随着像差 RMS 的逐渐增大,远场中



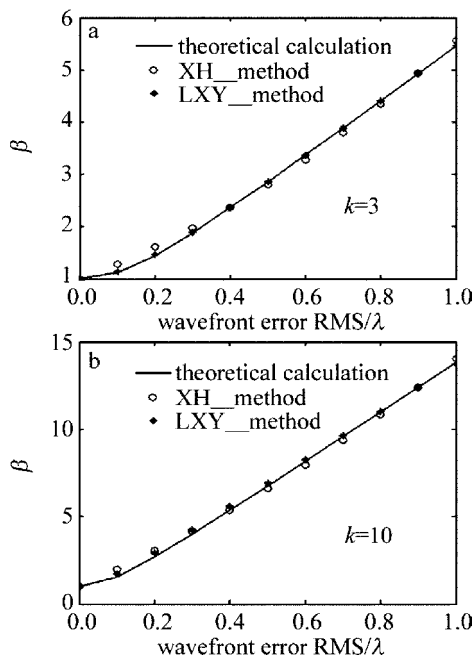


Fig. 6 The fitted results of Gaussian beam quality  $\beta$  factor and different wavefront error with  $k=3$  and  $k=10$

心主核内的能量并没有显著的减小,光束质量变化不明显,此时 LXY\_method 的拟合误差会偏大,相比之下 XH\_method 可对前 65 阶 Zernike 像差给出较好的拟合结果,如图 7 所示。

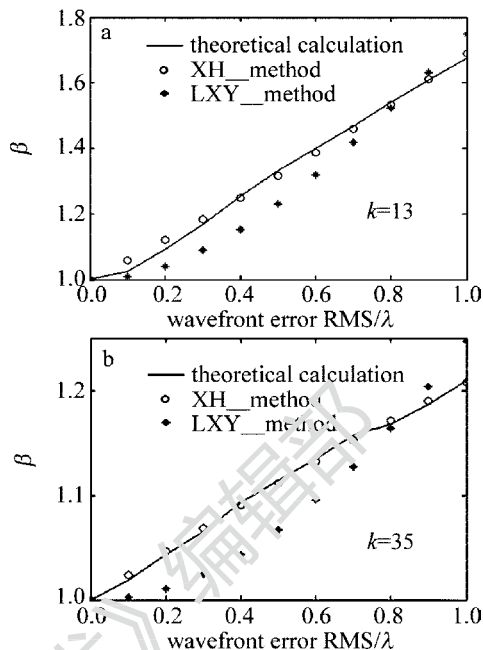


Fig. 7 The fitted results of Gaussian beam quality  $\beta$  factor and different wavefront error with  $k=13$  and  $k=35$

不考虑  $k$  为 1 和 2 的整体平移像差,基于 XH\_method 拟合关系式,利用最小二乘法对高斯光束  $\beta$  值与  $k$  取 3 阶~65 阶 Zernike 波像差 RMS 间的关系进行拟合,计算求得的拟合系数  $A_k$  和  $B_k$  列于表 2 中。

Table 2 The fitting coefficient of beam quality factor of Zernike aberration

$k$	3	4	5	6,7	8,9	10	11	12	13	14
$A_k$	1.8946	1.5648	1.5579	1.2490	0.5919	3.5807	2.9298	2.9302	0.1088	0.1021
$B_k$	2.6651	1.4349	1.4356	1.7049	0.8308	9.4587	6.0212	6.1981	0.5805	0.5862
$k$	15,16	17,18	19,20	21	22	23	24	25	26,27	28,29
$A_k$	2.7148	3.1923	-0.6067	3.8342	3.5676	3.5520	2.9147	2.9214	-0.0361	3.5288
$B_k$	8.9034	4.6653	0.4192	16.9619	12.0492	12.0599	2.3981	2.3941	0.3190	17.7737
$k$	30,31	32,33	34,35	36	37	38	39	40	41	42
$A_k$	3.4583	0.0107	-0.0321	5.7522	4.0476	4.0373	3.7477	3.7541	-0.3530	-0.3445
$B_k$	11.2590	1.7325	0.2403	23.0538	18.5998	18.6085	8.8967	8.8938	1.3348	1.3271
$k$	43,44	45,46	47,48	49,50	51,52	53,54	55	56	57	58,59
$A_k$	-0.0414	0.9945	3.9283	4.0930	-0.3171	-0.0449	5.0922	5.0553	5.0690	3.7126
$B_k$	0.2012	27.1980	18.0121	5.3845	0.9874	0.1672	30.3779	24.9465	24.9347	16.3830
$k$	60	61	62,63	64	65					
$A_k$	4.6842	4.6905	-0.2906	-0.0232	-0.0234					
$B_k$	1.1226	1.1186	0.7794	0.1293	0.1290					

激光通过大气湍流介质的远场传输问题是人们比较关心的问题,那么作为对上述拟合公式的应用,研究高斯光束通过 Kolmogoroff 大气湍流介质的传输问题是有意义的。对符合 Kolmogoroff 功率谱统计规律的大气湍流,NOLL<sup>[15]</sup>等人理论上推导出大气湍流各阶 Zernike 像差的均方值,由于大气湍流的整体倾斜像差仅改变光斑在远场平面内的位置,因

而在计算光束质量时去除波前整体倾斜的影响。去倾斜后整个大气湍流波像差的均方值由下式给出:

$$\sigma^2 = 0.134(D/r_0)^{5/3}(\text{rad}^2) \quad (7)$$

式中,  $r_0$  为大气湍流的相干长度。

考虑到 3 阶~65 阶 Zernike 波像差的均方值占整个大气湍流去倾斜后湍流总均方值的 94.16%,故在计算波前总方差时需对(7)式乘以该比例系

数。根据 XH\_method 拟合公式,给出符合 Kolmogoroff 谱的光束质量因子  $\beta$  与波像差间的拟合关系式,如下式所示:

$$\beta = 0.0055 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3} + 0.1398 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/6} + 1 \quad (8)$$

根据 Kolmogoroff 谱的 3 阶 ~ 65 阶 Zernike 波像差的均方值,按照 Roddier 方法<sup>[16]</sup>产生一系列不同强度的大气湍流相位屏,并通过快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 算法计算出高斯光束通过随机相位屏的远场光斑分布,进而求得不同湍流强度  $D/r_0$  时所对应的高斯光束  $\beta$  值,示于图 8 中,图中同时给出拟合(8)式的计算结果以作对比。由图 8 可以看出,本文中给出的拟合式在较广的湍流强度范围内与仿真结果符合得较好。

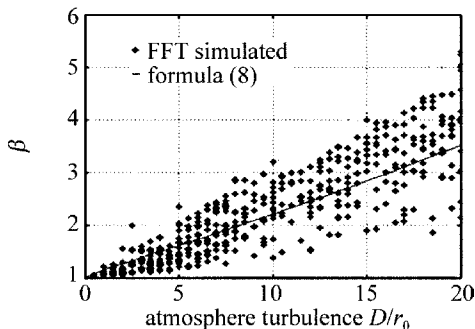


Fig. 8 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and atmospheric turbulence wavefront error

### 3 结 论

高斯光束质量的评价在强截断情况下存在较大的分歧,作者在分析现有各种评价方法不足的基础上,针对能量集中度的应用目的,提出采用高斯光束  $\beta$  值作为衡量有截断和无截断高斯光束质量的评价参量,该评价指标不仅具有概念简单、计算方便的特点,而且能够衡量发射光阑截断对高斯光束质量的影响,是衡量高斯光束质量的一种较好的评价参量。通过数值仿真的方法分析计算了光学系统波像差对高斯光束质量的影响,给出了波像差与高斯光束  $\beta$  值间的拟合关系,并依此讨论了高斯光束质量与 Kolmogoroff 大气湍流波像差间的关系,给出了拟合关系式,为工程实际应用提供一些理论指导。

#### 参 考 文 献

[1] SIEGMAN A E. New developments in laser resonators [C]//Opti-

cal Resonators. Los Angeles, USA; Proceedings of the International Society for Optical Engineering, 1990: 2-14.

[2] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. 11146-1 Laser and laser-related equipment-test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios-part 1: Stigmatic and simple astigmatic beams [S]. Geneva, Switzerland; ISO, 2005: 1-16.

[3] SIEGMAN A E. How to (maybe) measure laser beam quality [J]. OSA Trends in Optics and Photonics Series, 1998, 17(2): 184-199.

[4] MARTINEZ-HERRERO R, MEJIAS P M. Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams [J]. Optics Letters, 1993, 18(19): 1669-1671.

[5] MARTINEZ-HERRERO R, MEJIAS P M, ARIAS M. Parametric characterization of coherent, lowest-order Gaussian beams propagation through hard-edged apertures [J]. Optics Letters, 1995, 20(2): 124-126.

[6] PARE C, BELANGER P A. Propagation law and quasi-invariance properties of the truncated second-order moment of a diffracted laser beam [J]. Optics Communications, 1996, 123(4): 679-693.

[7] AMARANDE S, GIESEN A, HUGEL H. Propagation analysis of self-convergent beam width and characterization of hard-edge diffracted beams [J]. Applied Optics, 2000, 39(22): 3914-3924.

[8] LIU Sh R. Flat-topped beam characterization, simulation and intensity-moments-based laser beam quality [D]. Chengdu: Sichuan University, 2003: 75-103 (in Chinese).

[9] HERLOSKI R. Strehl ratio for untruncated aberrated Gaussian beams [J]. Journal of the Optical Society of America, 1985, A2(7): 1027-1030.

[10] MAHAJAN V N. Strehl ratio of a Gaussian beam [J]. Journal of the Optical Society of America, 2005, A22(9): 1824-1833.

[11] JI X L. Study on the propagation properties and beam control of high-power lasers with distortions [D]. Chengdu: Sichuan University, 2004: 36-40 (in Chinese).

[12] XIAN H, JIANG W H. The relation between wavefront aberration and the beam quality factor [J]. Chinese Journal of Lasers, 1999, 26(5): 415-419 (in Chinese).

[13] LI X Y, XIAN H, WANG Ch H, et al. Relationship between beam quality factor  $\beta$  and wavefront error [J]. Chinese Journal of Lasers, 2005, 32(6): 798-802 (in Chinese).

[14] JI J R, FENG Y. Advanced optics course [M]. Beijing: Science Press, 2008: 179-181 (in Chinese).

[15] NOLL R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. Journal of the Optical Society of America, 1976, 66(3): 207-211.

[16] RODDIER N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. Optical Engineering, 1990, 29(10): 1174-1180.