

文章编号: 1001-3806(2014)03-0307-04

基于加权总体最小二乘法的点云平面拟合

苍桂华^{1,2}, 岳建平^{2*}

(1. 南京工业大学 测绘学院, 南京 210009; 2. 河海大学 地球科学与工程学院, 南京 210098)

摘要: 为了提高点云数据平面拟合精度, 提出强度加权总体最小二乘法。该方法是在传统加权总体最小二乘法基础上, 利用点云数据中各点强度信息确定其平面拟合权重, 通过均质性不同的3种平面样本数据对该方法的适用性进行了研究。结果表明, 与最小二乘法和总体最小二乘法相比, 该方法对于均质性较好的点云数据有效, 可以得到更高精度的参量解; 而对于均质性较差的点云数据, 该方法效果不理想, 总体最小二乘法是最有效方法。

关键词: 激光技术; 点云数据; 平面拟合; 加权总体最小二乘; 强度

中图分类号: P207 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.03.005

Plane fitting of point clouds based on weighted total least square

CANG Guihua^{1,2}, YUE Jianping²

(1. Department of Geomatics Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China; 2. School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to improve the plane fitting precision of point cloud data, the intensity weighted total least square method was proposed. The method, based on the ordinary weighted total least square method, determined the weight value of plane fitting using the intensity information of each point in point cloud data. The application of the method was analyzed with three different homogenous data. Experimental results show that the method is effective for plane fitting of point clouds with good homogeneity, and more accurate solution can be obtained compared with total least squares method and least squares method. As for plane fitting of inhomogeneous point clouds, the total least squares method is superior to the proposed method.

Key words: laser technique; point clouds data; plane fitting; weighted total least square; intensity

引言

点云数据平面拟合是地面3维激光扫描技术应用中常见问题, 如建筑物点云数据的特征线提取等^[1]。最小二乘(least squares, LS)法是常用的平面拟合方法。设利用点云数据建立的平面方程的矩阵形式为 $Y=AX$, 最小二乘法是假设误差 e 只存在于观测向量 Y 中, 建立经典的高斯-马尔科夫(Gaussian-Markov, G-M)模型对误差方程式进行求解, 获得平面参量估值。然而由于模型误差、人为误差、仪器误差等因素影响点云数据在观测数据 x, y 和 z 这3

个方向上均存在误差, 使得包含观测数据的系数矩阵 A 也含有误差。因此, 利用最小二乘法进行平面数据拟合的结果并不是最优, 而是有偏的^[2]。针对这种观测向量和系数矩阵均包含误差的模型, 即所谓的变量中的误差(error-in-variables, EIV)模型, GOLUB等人提出了总体最小二乘(total least squares, TLS)估计方法^[3], 但总体最小二乘估计仅在设计矩阵和残差元素均服从独立等精度分布时才是最优估计^[4]。实际点云数据中各点坐标精度是不等的, 因此简单的总体最小二乘方法并非最优估计^[5]。为了解决矩阵和残差的不等精度估计问题, MARKOVSKY等人提出了加权总体最小二乘(weighted total least squares, WTLS)方法^[6]。SCHAFFRIN等人则进一步扩展了WTLS方法, 详细介绍了相关权阵的设计方法以及算法的步骤^[7]。本文中在SCHAFFRIN等人提出的WTLS方法基础上, 根据点云数据中各点反射强度值与其点位精度

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41174002); 江苏省测绘科研资助项目(JSCHKY201303)

作者简介: 苍桂华(1971-), 女, 博士研究生, 现主要从事地面3维激光扫描数据处理的研究。

* 通讯联系人。E-mail: ghuac@163.com

收稿日期: 2013-07-19; 收到修改稿日期: 2013-09-03

关系,确定各点的平面拟合权值,得到强度加权总体最小二乘(intensity weighted total least squares, IWTLS)的平面拟合方法,并通过均质性不同的3种样本点云数据,对该方法的适用性进行研究。

1 IWTLS 方法及其函数模型

1.1 EIV 模型

设点云数据所建立3维空间平面方程式形式为:

$$z = ax + by + c \quad (1)$$

式中, a, b 和 c 为待求的平面拟合参量。

将(1)式写成矩阵形式为:

$$Y = AX \quad (2)$$

式中,

$$Y_{n \times 1} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, A_{n \times 3} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}, X_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3)$$

如果同时考虑观测向量 Y 和系数矩阵 A 中的误差,则建立 EIV 函数模型^[7]:

$$\begin{cases} Y - e_Y = (A - E_A)X \\ \begin{bmatrix} e_Y \\ e_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_Y \\ \text{vec}(E_A) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_Y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad (4)$$

式中, e_Y 表示观测向量 Y 中的随机误差向量; E_A 表示系数矩阵 A 的随机误差矩阵; vec 为矩阵列向量化算子; $e_A = \text{vec}(E_A) \in R^{3n \times 1}$ 表示矩阵 E_A 按列向量化后得到的向量; σ_0^2 为未知的单位权方差; $Q_Y = P_Y^{-1}$, $Q_A = P_A^{-1}$, 分别表示 Y 和 e_A 的协因素矩阵。

根据系数矩阵特点引入权阵 P_0, P_X 和 P_Y 。 P_0 是 3×3 矩阵,代表系数矩阵 A 的列向量权阵; P_X 是 $n \times n$ 矩阵,代表系数矩阵 A 的行向量权阵; P_Y 是 $n \times n$ 矩阵,代表向量 Y 的权阵。 P_0, P_X, P_Y 相对应的协因素矩阵为 Q_0, Q_X, Q_Y , 即:

$$Q_0 = P_0^{-1}, Q_X = P_X^{-1}, Q_Y = P_Y^{-1} \quad (5)$$

由 Q_0, Q_X 可以得到 Q_A, P_A :

$$Q_A = P_A^{-1} = Q_0 \otimes Q_X = P_0^{-1} \otimes P_X^{-1} \quad (6)$$

式中, \otimes 表示“kronecker 积”。

IWTLS 估算准则为:

$$e_Y^T P_Y e_Y + e_A^T P_A e_A = \min \quad (7)$$

1.2 IWTLS 权阵的设置

激光反射强度值与入射角关系为 $I_i = I_0 \cos \alpha_i$

($i = 1, 2, \dots, n$), I_i 代表入射角为 α_i 时点的强度值, I_0 为垂直入射时($\alpha_i = 0$)点的反射强度值。入射角越小,点位精度越高,点的反射强度值越大^[8-10]。因此强度值越大,参与拟合的权重应越大。本次实验数据为 PTS 格式,以 12bit 记录强度值,其强度值范围为 $[-2047, 2048]$ 。设记录的原始强度值为 I'_i , 按照下式将其值变为 $[0, 1]$ 之间,构成各点的拟合权值:

$$P_i = I_i = 0.00024414 \times I'_i + 0.499877 \quad (8)$$

设点云在 x, y 和 z 3 个方向等精度获取,对于平面的系数阵列向量和观测向量中,有 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ 。结合系数矩阵 A 的特点,设置相应权阵。

$$\begin{cases} P_{0,3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P_{X,n \times n} = P_{Y,n \times n} = \text{diag}[I_i] \end{cases} \quad (9)$$

式中, P_0 的第 3 个对角元素为 0,表示系数矩阵 A 中的第 3 列不需要改正,其余对角线元素为 1,表示系数矩阵 A 中的第 1 列和第 2 列的数据列中的元素是等精度获取的; P_X, P_Y 与强度值有关。

1.3 平面参量求解及精度评定^[7,9-10]

目前解决 WTLS 问题主要采用基于拉格朗日乘数法的迭代解算方法^[7],计算步骤如下。

(1) 根据(8)式计算出各点强度值,并根据(9)式设置相关矩阵 P_0, P_X, P_Y 。

(2) 利用最小二乘法计算 X 的初始值 \hat{X}_0 。

$$\hat{X}_0 = (A^T P_Y A)^{-1} (A^T P_Y Y) \quad (10)$$

(3) 计算 \hat{X}_1 。

$$\hat{X}_1 = [A^T (Q_Y + \hat{X}_0^T Q_0 \hat{X}_0 Q_X)^{-1} A]^{-1} \cdot (A^T [Q_Y + \hat{X}_0^T Q_0 \hat{X}_0 Q_X]^{-1} Y) \quad (11)$$

(4) 计算拉格朗日乘系数向量 $\hat{\lambda}_1$ 和辅助变量 \hat{v}_0 。

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_i = [Q_Y + (X_i^T Q_0 \hat{X}_i) \cdot Q_X]^{-1} \cdot (Y - A \hat{X}_i) \\ \hat{v}_i = \hat{\lambda}_i^T Q_X \hat{\lambda}_i \end{cases} \quad (12)$$

(5) 计算 \hat{X}_{i+1} 。

$$\hat{X}_{i+1} = [A^T (Q_Y + \hat{X}_i^T Q_0 \hat{X}_i Q_X)^{-1} A - \hat{v}_i Q_0]^{-1} [A^T (Q_Y + \hat{X}_i^T Q_0 \hat{X}_i Q_X)^{-1} Y] \quad (13)$$

(6) 重复步骤(4)和步骤(5),直至 $\|\hat{\mathbf{X}}_{i+1} - \hat{\mathbf{X}}_i\| < \varepsilon$ (ε 为预设的小值)为止。

(7) 计算单位权方差估计 $\hat{\sigma}_0^2$ 。

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{A}_i^T (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}})}{n - 3} \quad (14)$$

2 算例及分析

为了验证 IWTLS 方法的适用性,采用了均质性不同的 3 种平面样本进行实验。实验中的平面样本分别为标准反射板(反射率为 90%)、普通木板及一般的水泥建材模板。3 种平面样本中,标准反射板均质性最好;普通木板次之;建材水泥模板均质性最差。利用徕卡 ScanStation2 C10 分别对样本进行扫描,获取点云数据(如图 1 所示)。

根据点云数据特点确定平面方程式形式^[11]。分别利用 LS 法、TLS 法和 IWTLS 法对各个样本点云数据进行平面拟合,获得平面拟合参量 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 以及单位权中误差 $\hat{\sigma}_0$ 。设拟合平面上点的个数为 n , 计算出各点 $i(i=1, 2, \dots, n)$ 到拟合面的距离 d_i , 获得点到拟合面的最大距离 $d_{i,max}$, 根据下式计算出平面拟合精度 $\hat{\sigma}_p$:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}} \quad (15)$$

将单位权中误差、点到拟合面的最大距离以及

平面拟合精度作为估算方法优劣的评判指标。标准反射板、普通木板、水泥模板 3 种样本数据采用不同平面拟合方法得到的相关结果如表 1 所示。

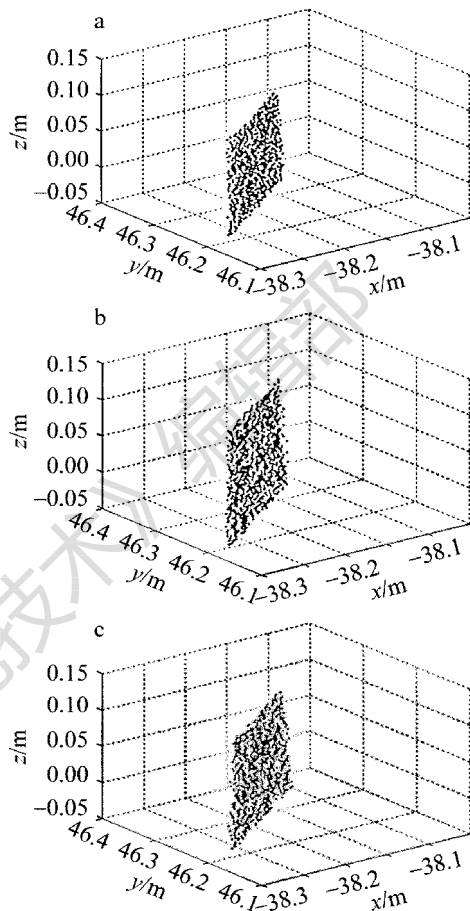


Fig. 1 Plane fitting of point clouds in experiments
a —point clouds of sample 1 b —point clouds of sample 2 c —point clouds of sample 3

Table 1 Results of plane fitting samples

samples	methods	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	$\hat{\sigma}_0/m$	$\hat{\sigma}_p/mm$	$d_{i,max}/mm$
target (sample 1)	LS	7.0898	-8.8893	682.0644	0.034524	3.0	7.4
	TLS	29.6861	-37.1485	2852.4550	0.000250	2.0	4.9
	IWTLS	29.8198	-37.2722	2863.2851	0.000217	1.4	3.8
wood (sample 2)	LS	6.0748	-7.7451	590.3546	0.042462	4.0	8.3
	TLS	56.9616	-71.9141	5502.4574	0.000275	2.5	5.8
	IWTLS	44.9503	-56.7727	4343.2429	0.000205	1.5	5.1
concrete (sample 3)	LS	5.6913	-7.1405	547.7229	0.037647	4.2	8.5
	TLS	39.7487	-49.5454	3810.1171	0.000304	1.8	5.8
	IWTLS	29.0566	-36.2535	2786.8685	0.000323	3.2	6.5

从表 1 可以看出:对于均质性较好的标准反射率板和普通木板,利用 IWTLS 方法获得的 3 个精度判定指标($\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_p, d_{i,max}$)值均要比 LS 方法和 TLS 方法的相应结果小得多。以普通木头为例,利用

IWTLS 方法得到的单位权中误差比 LS 方法和 TLS 方法分别提高了 99% 和 25%,平面拟合精度比 LS 方法和 TLS 方法分别提高了 63% 和 40%,点到拟合面的最大距离也由 LS 方法和 TLS 方法的 8.3mm 和

5.8mm 降为 5.1mm。然而对于一般的建材水泥模板,由于均质性较差,IWTLS 方法计算出的 $\hat{\sigma}_0$, $\hat{\sigma}_p$ 和 $d_{i,max}$ 3 个精度评判指标分别为 0.000323m,3.2mm 和 6.5mm,虽好于 LS 方法的相应结果 0.037647m,4.2mm 和 8.5mm,却比 TLS 方法的相关结果 0.000304m,1.8mm 和 5.8mm 差。这是由于此时各点强度值的差异更多由于材质不同造成,其强度值已经不能代表其点位精度,因此,利用 IWTLS 方法获得的相关结果差于总体最小二乘方法。

3 小 结

点云数据平面拟合中 WTLS 法虽然从理论上较 LS 法和 TLS 法合理,但在拟合时应注意各点拟合权值的设置。确定的各点拟合权值应与其点位精度一致,即点位精度高,拟合权值应越大。如果拟合权重与其实际点位精度情况不一致,会直接影响 WTLS 的效果。本文中的强度加权总体最小二乘法对于均质性较好的点云平面效果明显,拟合精度较高,而对于均质性较差的点云平面效果不佳,此时应采用 TLS 方法进行平面拟合。

参 考 文 献

[1] YU H X, WU K, AO J F, *et al.* Extraction of building's feature lines based on 3-D laser scanning technology[J]. *Laser Technology*, 2012, 36(4): 553-556 (in Chinese).
[2] QIU W N, TAO B Z, YAO Y B, *et al.* The theory and method of

surveying data processing[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2008: 161-175 (in Chinese).
[3] GOLUB G H, van LOAN C F. An analysis of the total least squares problem [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, 17(6): 883-893.
[4] van HUFFEL S, VANDEWALLE J. The total least squares problem; computational aspects and analysis [M]. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991: 263-283.
[5] ZHOU Y J, DENG C H. Weighted and unweighted total least square methods and applications to heteroscedastic 3-D coordinate transformation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(8): 976-979 (in Chinese).
[6] MARKOVSKY I, RASTELLO M, PREMOLI A, *et al.* The element-wise weighted total least-squares problem [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2006, 50(1): 181-209.
[7] SCHAFFRIN B, WIESER A. On weighted total least-square adjustment for linear regression [J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(7): 415-421.
[8] ZHANG Y. Research on point cloud processing of terrestrial laser scanning [D]. Wuhan: Wuhan University, 2008: 43-47 (in Chinese).
[9] CHEN W X, CHEN Y, YUAN Q, *et al.* Application of weighted total least squares to target fitting of three-dimensional laser scanning [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2010, 30(5): 90-96 (in Chinese).
[10] YUAN Q, LOU L Z, CHEN W X. Applying weight total least-squares to the plane point cloud fitting of terrestrial laser scanning [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2011(3): 1-3 (in Chinese).
[11] WANG J X, JI K M. Industrial surveying fitting [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2007: 43-45 (in Chinese).