

文章编号: 1001-3806(2014)02-0172-05

## 同轴菲涅耳全息中提取相位的算法

戴欣冉, 钱晓凡\*, 徐天杰

(昆明理工大学 理学院 激光研究所, 昆明 650500)

**摘要:** 同轴全息术得到的相位通常都有弯曲和畸变,且0级和 $\pm 1$ 级再现像相互重叠,使得以往在离轴全息中常用的相位补偿处理技术在同轴菲涅耳全息中效果不佳。为了解决该问题,采用一种仅需拍摄一幅同轴菲涅耳数字全息图,对该全息图做必要处理得到另一幅全息图,通过将两幅全息图的衍射再现光场相减消除相位弯曲,以及0级像和矩孔衍射对相位的影响,从而提取待求光场相位近似值的方法,进行了相应的理论推导和实验验证。结果表明,该算法相较以往使用的相位掩膜方法能够得到更好的结果。

**关键词:** 全息;同轴菲涅耳全息;数字全息图;相位提取;算法

**中图分类号:** O436.1;O438.1 **文献标志码:** A **doi:** 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2014.02.006

### Phase retrieval method of in-line Fresnel digital holography

DAI Xinran, QIAN Xiaofan, XU Tianjie

(Institute of Lasers, Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** Besides the aberration, the overlapping with 0th and  $\pm 1$ st images observed in the phase distribution is difficult to deal with, which is different from the phase compensation methods adopted in off-axis setup. A method was proposed to get the phase information from a single in-line Fresnel digital holography. By subtracting recorded hologram by a numerical hologram, effect of the phase curve, the 0th image and the diffraction of the rectangular aperture was eliminated. The phase can be retrieved. The theoretical analysis and the experimental results were presented. It is found that better phase result can be obtained than former digital phase mask method.

**Key words:** holography; in-line Fresnel holography; digital hologram; phase retrieve; method

### 引言

全息照相可以同时记录和再现光场的振幅和相位,特别是随着计算机和 CCD 技术的进步而迅速发展起来的数字全息技术,由于可以数字化地记录、再现光场相位,已经在众多领域取得了广泛应用<sup>[1-5]</sup>。按参考光、物光是否同轴,通常将全息照相分为同轴全息和离轴全息,其中离轴全息可以将再现像的原始像和共轭像分开,避免它们的相互影响,因而在实际应用中更多地选用,但它不能充分利用 CCD 或 CMOS 本来就很有有限的空间带宽积;反过来,同轴全息能充分利用 CCD 或 CMOS 的空间带宽积,加之光路简单,所以尽管它不能将原始像和共轭像分开以

避免相互影响,但在被记录物体尺寸很小(如粒子场、细胞观测)的情况下,因为共轭像的影响变小,同轴全息依然经常被选用<sup>[1]</sup>。

使用全息术观察物体最重要的目的是获得相位分布信息,但由于原理和方法的原因,用全息术得到的相位信息通常都有相位弯曲和畸变,为了消除弯曲还原真实的物光场相位分布,往往需要采用复杂的补偿处理技术。离轴全息应用较多,相应的补偿处理方法研究也较多。比如在系统的两个光臂中采用同样的器件,并选用同样的参量以抵消相位弯曲<sup>[6]</sup>,以及使用变焦系统抑制相位弯曲<sup>[7]</sup>等,这些属于物理补偿的方法;另一类方法是数字补偿法,基本思想是在全息的数字重建过程中乘以数字相位掩膜来补偿相位弯曲。比如用一个空白全息像来对相位弯曲进行补偿<sup>[8]</sup>,或用多项式拟合的方法在像面提取相位掩膜<sup>[9]</sup>,以及直接用已知的系统参量生成分别位于记录面和像面的数字相位掩膜<sup>[10]</sup>等。这些方法在不同程度上取得了成功,但却不适用于同

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61067004)

作者简介:戴欣冉(1987-),女,硕士研究生,主要从事数字全息方面的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: qianxiaofan1@sina.com

收稿日期:2013-05-03;收到修改稿日期:2013-06-03

轴菲涅耳全息,原因是同轴全息只有一个光臂,物理补偿的方法根本就不能操作,也不能拍摄空白全息像,用其它数字补偿法只能消除二次相位弯曲,且不能去除 0 级像对相位的影响,于是,单独研究同轴菲涅耳全息像中相位的提取算法是有必要的。

### 1 菲涅耳全息的记录与再现原理

图 1 是非涅耳基元全息图的记录(见图 1a)、再现示意图(见图 1b)。图中  $(x, y)$  是全息记录面,波长为  $\lambda_1$  的物光波和参考光波从点源  $O(x_0, y_0, z_0)$  和点源  $R(x_r, y_r, z_r)$  分别发出后在全息面上相干形成基元全息图;若用从点源  $C(x_c, y_c, z_c)$  发出且波长为  $\lambda_2$  的相干光照射全息图,形成的再现像分别出现在  $I_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $I_2(x_2, y_2, z_2)$  处。

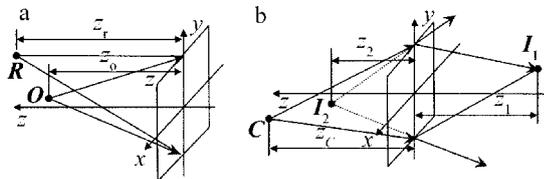


Fig. 1 Schematics of recording and reconstruction of Fresnel elementary hologram  
a—recording b—reconstruction

全息面上记录的基元全息图的光强分布为:

$$I(x, y) = |\tilde{R}|^2 + |\tilde{O}|^2 + \tilde{R}\tilde{O}^* + \tilde{R}^*\tilde{O} = |\tilde{R}|^2 + |\tilde{O}|^2 + \tilde{R}\tilde{O}^* \exp\left\{-j\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}(x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0) - \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2 + y^2 - 2xx_r - 2yy_r)\right]\right\} + \tilde{R}^*\tilde{O} \exp\left\{j\left[\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}(x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0) - \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}(x^2 + y^2 - 2xx_r - 2yy_r)\right]\right\} \quad (1)$$

式中,  $\tilde{R}$  是参考光场、 $\tilde{R}^*$  是参考光的共轭光场、 $\tilde{O}$  是物光场、 $\tilde{O}^*$  是物光场的共轭光场。通常,全息图的透射系数可以记为:  $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ , 如果用波长为  $\lambda_2$  的相干照明光  $\tilde{C}(x, y)$  从点源  $C(x_c, y_c, z_c)$  发出照射全息图,可以形成由 4 项组成的再现光场:直透光场  $\tilde{U}_1 = t_1 \tilde{C}(x, y)$ , 晕轮光场  $\tilde{U}_2 = t_2 \tilde{C}(x, y)$ , 以及 -1 级光场  $\tilde{U}_3 = t_3 \tilde{C}(x, y)$  和 +1 级光场  $\tilde{U}_4 = t_4 \tilde{C}(x, y)$ 。

将再现光与记录光的波长之比  $\lambda_2/\lambda_1$  记为  $\mu$ , 光场  $\tilde{U}_3$  和  $\tilde{U}_4$  将分别清晰成像在  $(x_i, y_i, z_i)$  处:

$$z_i = \left[\frac{1}{z_c} \pm \mu\left(\frac{1}{z_r} - \frac{1}{z_0}\right)\right]^{-1}, x_i = \left[\frac{x_c}{z_c} \pm \mu\left(\frac{x_r}{z_r} - \frac{x_0}{z_0}\right)\right]z_i, y_i = \left[\frac{y_c}{z_c} \pm \mu\left(\frac{y_r}{z_r} - \frac{y_0}{z_0}\right)\right]z_i \quad (2)$$

式中,取“+”时对应  $\tilde{U}_3$ , 用  $(x_1, y_1, z_1)$  表示,取“-”时对应  $\tilde{U}_4$ , 用  $(x_2, y_2, z_2)$  表示。在清晰成像位置处,光场  $\tilde{U}_3$  和  $\tilde{U}_4$  分别为:

$$\tilde{U}_3 = \tilde{C}\tilde{R}\tilde{O}^* \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_1}(x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1)\right\} \quad (3)$$

$$\tilde{U}_4 = \tilde{C}\tilde{R}^*\tilde{O} \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_2}(x^2 + y^2 - 2xx_2 - 2yy_2)\right\} \quad (4)$$

在离轴全息中,  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  与  $\tilde{U}_3, \tilde{U}_4$  因分别出现在不同的方向而彼此分离,但在同轴全息情况下,这 4 个光场出现在同一方向而无法分离。需要特别指出的是,在数字全息中由于记录元件 CCD(或 CMOS)记录面的有效尺寸较小(设其尺寸为  $a \times b$ ),则记录的全息图应为  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)I(x, y)$ , 其中  $\text{rect}()$  为矩形函数,再现时相应矩形孔  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$  的衍射效应不能忽略,也将在再现光场中叠加上一个相位分布。于是,  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$  和  $\tilde{U}_4$  的相位与矩形孔衍射的相位是叠加在一起的,但感兴趣的仅是物光场  $\tilde{O}$ (或其共轭光场  $\tilde{O}^*$ )的相位分布,下面讨论如何方便地从单幅全息图中得到它。

### 2 从单幅同轴菲涅耳全息图中提取物光相位的原理

在  $I(x, y) = |\tilde{R}|^2 + |\tilde{O}|^2 + \tilde{R}\tilde{O}^* + \tilde{R}^*\tilde{O}$  中,  $|\tilde{R}|^2$  是参考光单独照射时在全息记录面上的光强分布,通常可视为一常数,  $|\tilde{O}|^2$  是物光单独照射时全息记录面上的光强分布,在空间中变化比较慢(空间频率低),而  $\tilde{R}\tilde{O}^* + \tilde{R}^*\tilde{O}$  是参考光和物光在全息记录面上的干涉项,有比  $|\tilde{O}|^2$  高得多的空间频率。于是,对单幅同轴数字全息图,通过拉普拉斯变换、空间滤波,或先做傅里叶变换,然后在频域滤波等方法作平滑处理,可以将  $\tilde{R}\tilde{O}^* + \tilde{R}^*\tilde{O}$  从  $I(x, y)$  中

滤除<sup>[11-13]</sup>, 处理后的全息图记为  $I'(x, y)$ , 即:

$$I'(x, y) = |\tilde{R}|^2 + |\tilde{O}|^2 \quad (5)$$

将  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)I(x, y)$  作衍射计算<sup>[14]</sup>, 得到的光场为  $\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3 + \tilde{U}_4$ , 同时还叠加有矩形孔衍射的相位, 将之记为  $\tilde{U}$ ; 而用  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)I'(x, y)$  做衍射计算, 得到的光场应为  $\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$ , 当然也叠加有矩形孔衍射的相位, 将之记为  $\tilde{U}'$ 。显然, 将  $\tilde{U}$  和  $\tilde{U}'$  两者相减, 可以抵消  $\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$  以及矩形孔衍射的相位, 从而得到  $\tilde{U}_3 + \tilde{U}_4$ 。由于  $\tilde{U}_3$  和  $\tilde{U}_4$  的成像位置相距很远, 所以在一个确定的观察面上, 两光场中的一个 (比如  $\tilde{U}_3$ ) 清晰成像时, 另一个 (如  $\tilde{U}_4$ ) 一定不清晰成像, 并发散在较大范围的空间中, 相位变换较慢, 如果忽略  $\tilde{U}_4$  对  $\tilde{U}_3$  相位的影响, 可以得到所需光场相位的近似值。

下面任选一种情况加以说明: 将再现光选为参考光的共轭光, 即:  $\tilde{C}(x, y) = \tilde{R}^*(x, y)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1$ , 容易证明 -1 级光场  $\tilde{U}_3$  将在  $z_1 = -z_0$  处清晰成像, 它由原物光场的共轭光  $\tilde{O}^*$ , 再叠加一个球面光

场  $\exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_2 z_1} (x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1)\right\}$  组成, 不过在该处 +1 级光场  $\tilde{U}_4$  不能成清晰像, 将发散在较大的空间区域, 相应的, 其相位变化较慢。将分别用  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)I(x, y)$  和  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)I'(x, y)$  作衍射计算得到的光场  $\tilde{U}$  和  $\tilde{U}'$  相减, 得到需要的共轭物光场  $\tilde{O}^*$  的近似分布, 从而方便地计算其相位分布。

### 3 验证实验光路及数据处理

作者设计的同轴菲涅耳全息记录和再现数字全息细胞相位测量系统如图 2 所示。He-Ne 激光束 (波长  $\lambda_1 = 632.8\text{nm}$ ) 通过会聚透镜 L 后经针孔滤

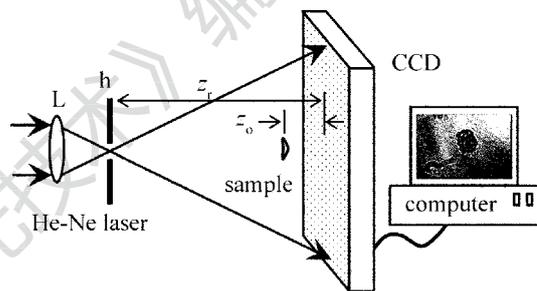


Fig. 2 Schematics of experiment setup

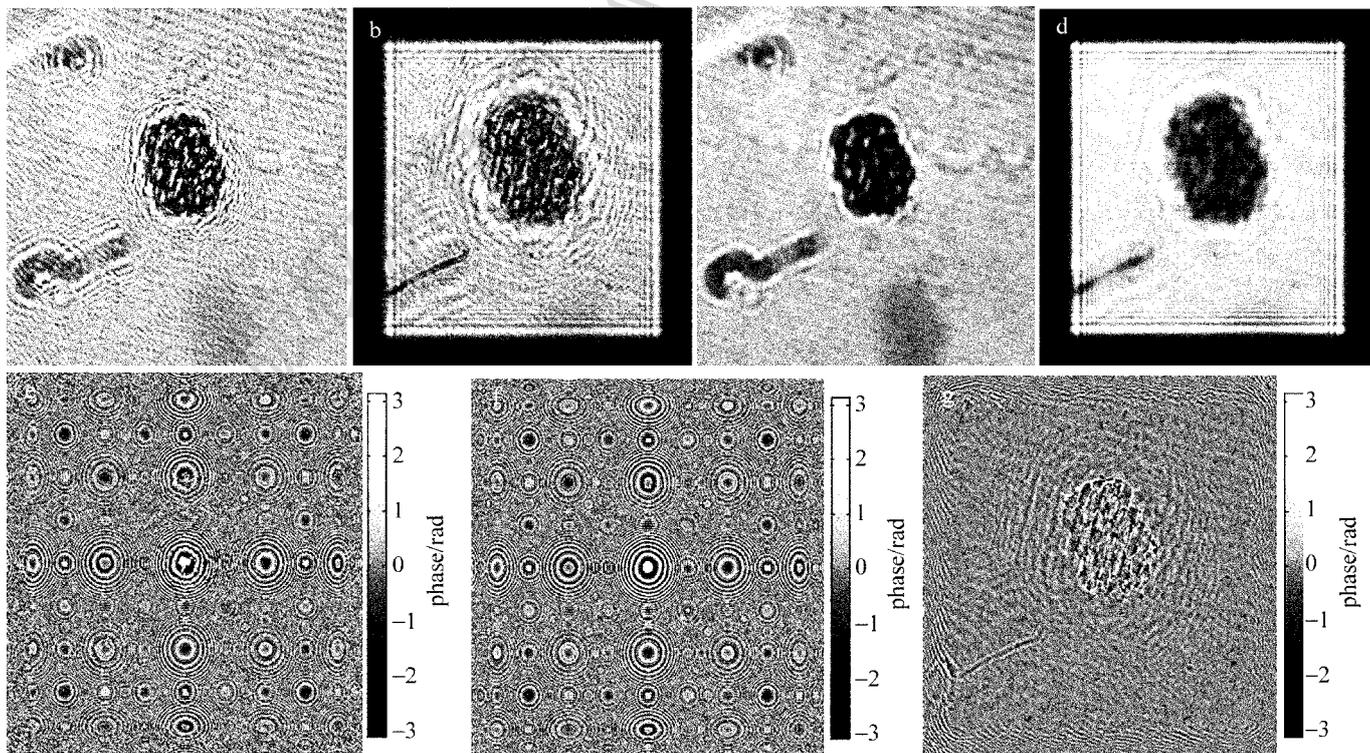


Fig. 3 Experimental images of onion cells

a—hologram  $I(x, y)$  b—image of  $I(x, y)$  c—smoothed hologram  $I'(x, y)$  d—image of  $I'(x, y)$  e—wrapped phase of  $\tilde{U}(x, y)$  f—wrapped phase of  $\tilde{U}'(x, y)$  g—wrapped phase of  $\tilde{U}(x, y) - \tilde{U}'(x, y)$

波器  $h$  变成球面光波,该球面光波照射样品细胞衍射并到达全息记录面后与透射光干涉,形成的全息图用 CCD 记录(CCD 是卸去镜头的 MTV-1802CB 摄像头,其像素数为  $795 \times 596$ , 像素大小为  $0.0100\text{mm} \times 0.0108\text{mm}$ , 并与计算机联接)。

实验中,针孔滤波器  $h$  到 CCD 的距离(参考光半径)为  $z_r = 109.6\text{mm}$ , 样品细胞到 CCD 的距离为  $z_o = 35.5\text{mm}$ 。样品是一段新鲜洋葱表皮,有 21 个完整的细胞,单个细胞的尺寸约为  $150\mu\text{m} \times 50\mu\text{m}$ 。

图 3 是实验全息图、再现像及其相位分布结果。图 3a 是记录的同轴菲涅耳全息图  $I(x, y)$ , 大小为  $5.12\text{mm} \times 5.53\text{mm}$  ( $512 \times 512$  个像素); 图 3b 是该全息图的再现像; 图 3c 是平滑该全息图后得到的全息图  $I'(x, y)$ ; 图 3d 是用  $I'(x, y)$  得到的再现像; 图 3e 和图 3f 分别是平滑前、后全息图的再现光场包裹相位, 可以看到其上均叠加有球面光波的相位及矩孔衍射的相位; 图 3g 是用本文中提出的方法最终得到的共轭物光场  $\tilde{O}^*$  的包裹相位, 球面光波的相位及矩孔衍射的相位已经被很好地消除, 尽管还能观察到  $\tilde{O}$  的相位, 但影响很小, 应该可以满足大多数研究的需要。

为了说明作者所提方法的优势, 作为比较, 先给出了通过系统参量计算数字相位掩膜, 从而得到的共轭物光场  $\tilde{O}^*$  包裹相位的结果, 结果见图 4a。

其中, 掩膜的相位  $P$  可以根据球面光场的相位确定, 因为再现距离  $z_1 = -z_o$  是知道的:

$$P = \frac{\pi}{\lambda_1 z_1} (x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1) \quad (6)$$

从图 4a 可以看到, 叠加上掩膜后(图 3e 中的相位减去掩膜的相位), 尽管有明显的效果, 但并没有完全消除二次相位弯曲, 这是因为实验中测量针孔滤波器到 CCD 的距离  $z_r$ , 以及样品细胞到 CCD 的距离  $z_o$  都不可能没有误差, 所以计算得到的数字相位掩膜也有误差, 为此, 作者在此基础上通过人工调整相位掩膜中再现距离  $z_1$ , 找到最佳的相位掩膜, 叠加该掩膜后的结果如图 4b 所示, 这时虽然消除了二次相位弯曲, 但矩孔衍射引起的相位却依然存在。

作为比较, 在此给出用多项式拟合像面相位掩膜的结果, 结果如图 4c 和图 4d 所示。其中, 图 4c 是用二次多项式拟合的结果, 主要消除二次相位弯曲, 但没能消除矩孔衍射引起的相位; 而图 4d 是用高次(20 次)多项式拟合的结果, 意在同时消除二次相位弯曲以及矩孔衍射引起的相位。从图中可以看到, 高次拟合确实可以同时消除二次相位弯曲以及矩孔衍射引起的相位, 但细胞的相位细节也一同被消除, 所以效果并不好。另外, 用多项式拟合像面相位掩膜必须先求得光场的解包裹(去缠绕)相位, 注意到叠加有二次弯曲的光场相位变化很快, 容易出现欠采样, 能否顺利完成相位解包裹本身就是

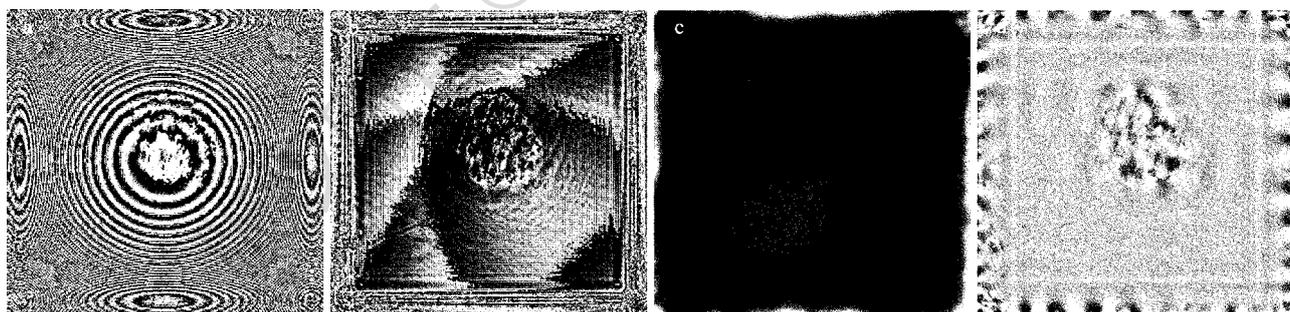


Fig. 4 Experimental phases by using different digital phase mask methods

a—system parameter b—manual adjustment after system parameter c—binomial fitting d—polynomial fitting

一个不小的挑战<sup>[15]</sup>。

总之, 将图 4 的结果与图 3g 比较容易看到, 在同轴菲涅耳全息的情况下, 无论是直接采用系统参量生成的数字相位掩膜, 还是用系统参量再辅以人工调节, 或者用二次乃至高次多项式拟合得到的相位掩膜, 其结果均没有作者提出的算法好。

#### 4 结论

使用数字全息术最重要的目的是获得光场的相

位分布信息。同轴全息能充分利用器件的空间带宽积, 加之光路简单, 所以依然经常被选用, 但用同轴全息术得到的相位信息通常都有相位弯曲和畸变, 且 0 级和  $\pm 1$  级再现像是重叠的, 使得以往在离轴全息中应用较多的补偿处理技术对同轴菲涅耳全息而言效果不佳, 为此作者提出了一种仅需拍摄一幅同轴菲涅耳数字全息, 然后对该全息图做必要处理得到另一幅全息图, 通过将两幅全息图的衍射再现光场相减消除二次相位弯曲以及 0 级像和矩孔衍射

对相位的影响,从而提取待求光场相位近似值的算法。给出了相应的理论推导和实验验证,证明新算法相较以往使用相位掩膜的方法而言,能够得到更好的结果。

#### 参 考 文 献

- [1] LU Q N, GE B Z, LUO W G, *et al.* Progress of studies on digital holography and its application in particle field[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2002, 13(10):1087-1091 (in Chinese).
- [2] ZHU Z Q, WANG X L, SUN M, *et al.* One-shot phase-shifting on-axis digital holography based on spatial light modulator[J]. Journal Optoelectronics · Laser, 2009, 20(12):1681-1684 (in Chinese).
- [3] XIA H T, GUO R X, FAN Z B, *et al.* Study on deformation measurement of transparent objects by digital holography [J]. Journal Optoelectronics · Laser, 2011, 22(7):1046-1050(in Chinese).
- [4] LIN C, QIAN X F, LI B, *et al.* Digital holographic zoom system measuring phase modulation characteristics of liquid crystal spatial light modulator[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2012, 23(10):1880-1884 (in Chinese).
- [5] HU C Y, ZHONG J G, GAO Y J, *et al.* The refractive index measurement of bio-film based on digital holographic microscopy [J]. Journal Optoelectronics · Laser, 2010, 21(1):66-69 (in Chinese).
- [6] MALACARA D. Optical shop testing [M]. New Jersey, USA: Wiley, 2007;122-128.
- [7] LI J C, FAN Z B, PENG Z J. Application research on the zoom system of digital holography [J]. Acta Photonica Sinica, 2008, 37(7):1420-1424 (in Chinese).
- [8] FERRARO P, NICOLA S D, FINIZIO A, *et al.* Compensation of the inherent wave front curvature in digital holographic coherent microscopy for quantitative phase-contrast imaging [J]. Applied Optics, 2003, 42(11):1938-1946.
- [9] QU J, MENG K, WANG L S, *et al.* Diffraction of Bessel-Gaussian beam passing through annular and circular apertures [J]. Laser Technology, 2008, 32(4):393-395 (in Chinese).
- [10] PAN W Q, ZHU Y J, LANG H T. Phase-contrast imaging technology with digital holographic microscope based system calibration [J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(7):1812-1820 (in Chinese).
- [11] CHANG Sh, MAO J J, YANG J R, *et al.* Beam pattern transformation and simulation of fresnel diffraction of gaussian beam throughout micro-circular aperture [J]. Laser Technology, 2012, 36(4):568-571 (in Chinese).
- [12] YASUHIRO T, HIROKI K, HITOSHI O. Hybrid holographic microscopy free of conjugate and zero-order images [J]. Applied Optics, 1999, 38(23):4990-4996.
- [13] LI B, QIAN X F, LI X H, *et al.* The phase-unwrapping algorithm based on the principle of radial shearing [J]. Laser Technology, 2013, 37(1):44-47 (in Chinese).
- [14] LI J Ch. The accurate calculation of Fresnel diffraction and Collins' formula by using the fast Fourier transform [J]. Journal Optoelectronics · Laser, 2001, 12(5):529-532 (in Chinese).
- [15] QIAN X F, WANG Z L, HU T, *et al.* Reconstructing the phase of wave front using digital hologram and the principle of shearing interferometry [J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(7):1821-1826 (in Chinese).