第 37 卷 第 5 期
2013 年 9 月

激 光 技 术
LASER TECHNOLOGY

Vol. 37,No. 5
September,2013

文章编号: 1001-3806(2013)05-0627-04

超强激光等离子体中的相对论性朗缪尔孤子

刘笑兰[1],李晓卿[2]
(1. 南昌大学 物理系,南昌 330031; 2. 南京师范大学 物理系,南京 210097)

摘要: 为了研究相对论性朗缪尔孤子的特性,对从动力论出发所获得的超强等离子体中相对论性强朗缪尔湍动控制方程组进行了理论分析。结果表明,随着电子的平均洛伦兹因子以及场的湍动参量增加,朗缪尔孤子的波包半宽变窄,孤子总能量和总动量相应地增大,且电子的相对论效应对孤子总能量和动量的非线性部分的影响远大于线性部分。该研究可为超强激光等离子体中相关的非线性现象提供新的理论参考。

关键词: 非线性光学;激光等离子体;理论分析;相对论性朗缪尔湍动;孤子波包
中图分类号: O533　　**文献标识码**: A　　**doi**:10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2013.05.014

Relativistic Langmuir solitons in ultrapowerful laser plasma

LIU Xiao-lan[1], *LI Xiao-qing*[2]
(1. Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 2. Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In order to study the characteristics of relativistic Langmuir solitons, the control equations of relativistic strong Langmuir turbulence in ultrapowerful laser plasma were obtained from momentum theory. And then, theoretical analysis was made. The research shows that half-width of wave-packet will become narrower and the total energy and momentum of solitons will become bigger with the increasing of average Lorentz factor of electrons and turbulence parameter of field. The relativistic effect of electrons affects the total energy and momentum of the solitons much larger in the nonlinear part than in the linear part. The results will provide the theoretical reference on the nonlinear phenomenon in ultrapowerful laser plasma.

Key words: nonlinear optics; laser plasmas; theories analysis; relativistically Langmuir turbulence; soliton wave-packet

引 言

近年来,孤子已成为理论物理[1]、计算物理[2]以及实验物理[3]研究热点之一,它作为开启非线性物理大门的钥匙,已遍及光学、等离子体物理[4]、天体物理[5]等许多领域,其中朗缪尔孤子因其在激光等离子体粒子加速[6]、日冕湍动加热[7]等机制中所起的重要作用而倍受关注。对朗缪尔孤子的研究工作大多是基于流体力学方程组[8-9],而流体力学描述的适用范围是热速度小于波的相速度,超出此范围必须用波-粒共振的动力论。

随着实验技术的发展,科技人员可以制作超短脉冲强激光,其功率密度高达 $10^{21}\mathrm{W/cm^2}$。在如此高强激光的作用下,等离子体中的电子振动速度将接近光速,此时不可避免地要计及相对论效应。但是,即使激光光强 I 至极限($I\leqslant 10^{25}\mathrm{W/cm^2}$),背景离子仍只需考虑非相对论性。以光强 $I=10^{24}\mathrm{W/cm^2}$、波长 $\lambda\approx 1\mu\mathrm{m}$ 的激光为例,电子的洛伦兹因子为 $\gamma_e\approx 10^3$,离子的洛伦兹因子 $\gamma_i\approx 1$。因此,超强激光等离子体可由相对论性电子和非相对论性离子组成。目前对此类等离子体中相对论性强朗缪尔湍动及孤子的理论研究工作大多仍是基于流体力学近似[10]。事实上,此时采用流体描述已失效:给定体积 $V\propto l^3$(l 为粒子的尺度)的流体元中粒子,随机运动使它

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11105066);中国科学技术部国际科技合作基金资助项目(2009DFA02320);江西省自然科学基金资助项目(20114BAB202006)

作者简介:刘笑兰(1971-),女,博士,主要从事激光等离子体的研究。
E-mail: xiaolanliu@ncu.edu.cn

收稿日期:2012-12-30;收到修改稿日期:2013-01-26

们散开，而碰撞不断变更随机运动方向，使它们倾向于在平均速度附近做随机荡步。但在特征尺度 l_c 远小于粒子的平均自由程 λ_{MFP} 情况下，由同种粒子构成的流体元的概念明显成了问题。因此，有必要从动力论出发，推导出相对论性等离子体中强朗缪尔湍动的控制方程，并加以深入研究。作者采用从伏拉索夫方程及麦克斯韦方程组出发所导出的描述朗缪尔波与离声波耦合过程的相对论性 Zakharov 方程[11]，对 1 维情况下相对论朗缪尔孤子特性进行理论研究，此研究可为超强激光等离子体中相关的非线性现象提供新的理论参考。

1 相对论性 Zakharov 方程

从伏拉索夫方程 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=0\right)$ 出发。其中，$\boldsymbol{F}$ 为洛伦兹力，$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 满足麦克斯韦方程组，$e,\boldsymbol{v},c$ 分别为电子电荷量、粒子速度、光速；$t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}$ 分别代表时间、3 维空间及动量；$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)$ 表示等离子体中某种粒子的分布函数，它满足以下归一化条件：$\int f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\frac{1}{(2\pi)^3}=n(\boldsymbol{r},t)$，其中 $n(\boldsymbol{r},t)$ 为该种粒子的数密度。流密度方程为 $\boldsymbol{j}=\sum_a\int e_a\boldsymbol{v}f_a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$，下标 $a=\mathrm{e,i}$，代表电子和离子。把分布函数、场以及流密度分成规则（或未扰）部分和湍动（或扰动）部分，同时，假设 $|\boldsymbol{E}|^2$ 较弱，可按小湍动参量 $\overline{W}\left(=\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{8\pi n_0T_0}\ll 1\right)$ 来展开分布函数，其中 n_0,T_0 分别为未扰态时粒子数密度和温度（以能量为单位）。

考虑到电子的运动以及速度分布是相对论性的，而离子的运动及速度分布是非相对论的，分布函数为：$f_a(\boldsymbol{p})=\kappa_a\exp\left(-\frac{\varepsilon}{m_a{v_{T_a}}^2}\right)$。其中，对相对论性电子，$\kappa_\mathrm{e}=\frac{2\pi^2}{{m_\mathrm{e}}^2eT_\mathrm{e}}\frac{n_0}{K_2(\Gamma)}$；对非相对论性离子，$\kappa_\mathrm{i}=\frac{(2\pi)^{3/2}}{(m_\mathrm{i}v_{T_\mathrm{i}})^3}n_0$。式中，$K_2$ 是指标为 2 的修正的 Bessel 函数，m_a,v_{T_a} 和 ε 分别是电子（或离子）的质量、热速度及能量，且 $n_0\equiv n_\mathrm{e}=n_\mathrm{i},T_0\equiv T_\mathrm{e}\approx T_\mathrm{i}$；$\Gamma=\frac{m_\mathrm{e}c^2}{T_\mathrm{e}}\propto\frac{1}{\langle\gamma_\mathrm{e}\rangle}$ 为相对论参量，$\langle\gamma_\mathrm{e}\rangle$ 为电子的平均洛伦兹因子，对弱相对论情况，$\Gamma\leqslant 1$，对极端相对论，$\Gamma\ll 1$，于是有 $(\langle\gamma_\mathrm{e}\rangle\approx\gamma_\mathrm{e})\,T\approx m_\mathrm{e}c^2\left[1+\left(\frac{\lambda}{\mu\mathrm{m}}\right)^2\times\frac{I(\mathrm{W/cm^2})}{1.4\times10^{18}}\right]^{1/2}$。应该提及的是，至少在实验室情况下，通过波粒集合过程，无碰撞系统可以维持麦克斯韦分布。

为了简化计算，设规则的电磁场为 0，考虑到麦克斯韦方程组，利用谱分析 $A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)=\int A_k\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}k$（其中 $A_k\equiv A_{\omega,k}$，$\mathrm{d}k\equiv\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k}$，$\omega,\boldsymbol{k}$ 分别为频率和波矢，A 代表任一物理量），可得到场与流密度（精确到 3 级）的关系：$\varepsilon_{1,k}E_{1,k}=-\frac{4\pi\mathrm{i}}{\omega}[{\mathrm{e}_{1,k}}^*\cdot(\boldsymbol{j}_{k(2)}+\boldsymbol{j}_{k(3)})]$，其中，下标 1 表示纵波，$\varepsilon_{1,k}$ 和 $\boldsymbol{e}_{1,k}$ 分别是纵向介电常数和纵向单位极化矢量，i 代表虚部，上标 * 表示复共轭，$\boldsymbol{j}_{k(2)}$ 和 $\boldsymbol{j}_{k(3)}$ 为 2 级和 3 级非线性流，其中包含 2 级和 3 级相互作用矩阵元。计算矩阵元，可得到谱空间的直至 3 级非线性相互作用的场方程，将场表示为包络场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的时空表象形式 $(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p}t}=\int{\boldsymbol{E}_k}^+\exp(-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}k$，其中 $\omega_\mathrm{p}\approx\frac{c}{\sqrt{3}\,v_{T_\mathrm{e}}}\omega_\mathrm{p,e}$，$\omega_\mathrm{p,e}$ 为电子等离子体频率，${\boldsymbol{E}_k}^+$ 代表正频率的高频场)，可得高频纵场和低频离声场方程为[12]：

$$\frac{2\mathrm{i}}{\omega_\mathrm{p}}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\frac{3c^2}{5{\omega_\mathrm{p}}^2}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\left(\frac{\omega_\mathrm{p,i}}{\omega_\mathrm{p}}\right)^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\frac{n'(\boldsymbol{r},t)}{n_0}\tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-{v_\mathrm{s}}^2\nabla^2\right)n'(\boldsymbol{r},t)=\left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}}\right)\times\left(\frac{\omega_\mathrm{p,e}}{\omega_\mathrm{p}}\right)^2\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2}{4\pi m_\mathrm{i}}\tag{2}$$

式中，${\omega_\mathrm{p}}^2=\alpha{\omega_\mathrm{p,e}}^2$，$\alpha=\frac{m_\mathrm{e}c^2}{3T_\mathrm{e}}$，$v_\mathrm{s}$ 为离子声速，$n'(\boldsymbol{r},t)$ 代表扰动粒子数密度，下标 p，i 表示离子等离子体，∇ 为拉普拉斯算子。(1)式和(2)式被称为推广的相对论性 Zakharov 方程。

对方程组(1)式和(2)式进行无量纲变换，采用如下代换：

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{10}{9}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\frac{\boldsymbol{r}}{d_\mathrm{e}},\boldsymbol{\tau}=\frac{10}{9}\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}}\omega_\mathrm{p,e}t,\mu=\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}},$$
$$\alpha=\frac{m_\mathrm{e}c^2}{3T_\mathrm{e}},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi},\tau)=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\sqrt{5\pi n_0T_\mathrm{e}}},$$
$$n=\frac{9}{20}\frac{n'}{n_0}\tag{3}$$

将方程组(1)式和(2)式化成如下无量纲形式的非线性方程组：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \tau}+\nabla^2\boldsymbol{E}-n\boldsymbol{E}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}n-\nabla^2 n=\nabla^2|\boldsymbol{E}|^2 \tag{5}$$

虽然方程组(4)式和(5)式在形式上与非相对论情形下无量纲 Zakharov 方程组相同，但其长度单位、时间单位以及场的变换都与 α 密切相关，而 $\alpha=\frac{\Gamma}{3}\approx\frac{1}{3\langle\gamma_e\rangle}$，其大小取决于电子的相对论性强弱。

方程组(4)式和(5)式具有如下的拉格朗日(Lagrangian)密度函数[13]：

$$L=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)-(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^*)+\frac{1}{2}[U_t-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)]^2-\frac{1}{2}(\nabla U)\cdot(\nabla U) \tag{6}$$

式中，U 是流函数，$U_t=\frac{\partial U}{\partial t}=n+|\boldsymbol{E}|^2$。根据拉氏密度(6)式的对称性，可得相对论性 Zakharov 方程所具有的守恒量，守恒的等离激元数 N、总能量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和总动量 $\boldsymbol{p}$ 为：

$$N=\int|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[|\nabla\cdot\boldsymbol{E}|^2+n|\boldsymbol{E}|^2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(\nabla U)\cdot(\nabla U)\right] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{p}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{-\mathrm{i}}{2}(E_j\nabla E_j^*-E_j^*\nabla E_j)-n\nabla U\right] \tag{9}$$

式中，下标 $j=1,2,3$。

2　1 维传播的相对论朗缪尔孤子

下面研究无量纲相对论性 Zakharov 方程 1 维行波解。假定等离子体密度扰动以恒定速度 u 传播：$n(\xi,\tau)=n(\xi-u\tau)\equiv n(z)$，$\xi$ 为坐标参量，则由于 $\partial^2/\partial\tau^2=u^2\partial^2/\partial z^2$，$\partial n/\partial\xi=\partial n/\partial z$，根据 1 维的方程(5)式，可得 $n=-\frac{1}{1-u^2}|\boldsymbol{E}|^2$；再把它代入 1 维的方程(4)式，可得：

$$\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial \tau}+\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}+\frac{1}{u^2-1}E|\boldsymbol{E}|^2=0 \tag{10}$$

引进变换 $\beta=\frac{1}{1-u^2}$，$\xi=\sqrt{2}\zeta$，可获得如下标准的非线性薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}E=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}E-\beta|\boldsymbol{E}|^2E \tag{11}$$

可以把上式看成“准粒子”的方程，其中 E 为波函数，“准粒子”的自生势为 $\beta|\boldsymbol{E}|^2$，如果 $\beta>0$(即 $u<1$，亚声速运动)，则这种自生势具有与引力势一样的性质，它可以捕获“准粒子”以形成一种稳定的结构——孤子。

借鉴标准非线性薛定谔方程的求解过程，可得(10)式的解为：

$$E(\xi,\tau)=E_0\mathrm{sech}\left[\frac{\xi-u\tau}{\sqrt{2(1-u^2)}}E_0\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{12}$$

$$\varphi=\left[\frac{{E_0}^2}{2(1-u^2)}+\frac{u^2}{4}\right]\tau+\frac{u}{2}(\xi-u\tau)+\varphi_0 \tag{13}$$

式中，E_0 为入射激光的初始场强，φ_0 为初始位相。从上式可以看到，对于亚声速运动，$u<1(\beta>0)$，波包孤子的半宽反比于振幅：

$$d=\sqrt{2(1-u^2)}/E_0 \tag{14}$$

而运动速度 u 与振幅无关，它是一个独立参量。这是一个很有趣的结果：这种波包孤子的速度可在很宽的范围内取值，它作为一种“准粒子”是非常合适的。将(14)式恢复到有量纲单位：

$$d=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\sqrt{5\pi n_0T_e}\,v_s\sqrt{2(1-u^2)}/E_0(x,t)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5\alpha}{\mu}}\,v_s\sqrt{1-u^2}(\overline{W}_0)^{-1/2} \tag{15}$$

式中，$\overline{W}_0=\frac{|\boldsymbol{E}_0|^2}{8\pi n_0T_0}$ 为初始湍动参量，$\boldsymbol{E}_0$ 为初始电场。可见，α 越小，且 $\overline{W}_0$ 越大，则 d 越小。

下面计算非线性 Schrödinger 孤子所具有的能量、动量。把解(12)式代入(7)式，守恒的激元数为：

$$N={E_0}^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2\left[\frac{x-ut}{\sqrt{2(1-u^2)}}E_0\right]\mathrm{d}x=2m \tag{16}$$

其中，

$$m=E_0\sqrt{2(1-u^2)} \tag{17}$$

类似地，根据(8)式以及(9)式，守恒的能量和动量为：

$$\varepsilon=\frac{1}{2}mu^2+\frac{5u^2-1}{6(1-u^2)^3}m^3 \tag{18}$$

$$p=mu+\frac{2u}{3(1-u^2)^3}m^3 \tag{19}$$

恢复到有量纲单位，考虑到初始湍动参量$\overline{W}_0=\frac{|\boldsymbol{E}_0|^2}{8\pi n_0 T_0}$，则(17)式、(18)式、(19)式分别可表示为：

$$m=\sqrt{\frac{9}{5\alpha}}\frac{v_s\sqrt{1-u^2}}{v_{T_e}}(\overline{W}_0)^{1/2} \tag{20}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9\mu}{5\alpha}}\sqrt{(1-u^2)}(\overline{W})^{1/2}u^2+\left(\frac{9\mu}{5\alpha}\right)^{3/2}\frac{5u^2-1}{6(1-u^2)^{3/2}}(\overline{W}_0)^{3/2} \tag{21}$$

$$p=\sqrt{\frac{9\mu}{5\alpha}}\sqrt{(1-u^2)}(\overline{W})^{1/2}u+\left(\frac{9\mu}{5\alpha}\right)^{3/2}\times\frac{2u}{3(1-u^2)^{3/2}}\sqrt{(1-u^2)}(\overline{W}_0)^{3/2} \tag{22}$$

3 结 论

从动力论出发，研究了由相对论性电子和非相对论性离子组成的等离子体中强朗缪尔湍动，基于所获得的相对论性 Zakharov 方程，探讨了相对论性朗缪尔孤子的特性。

(1)相对论性 Zakharov 方程组(1)式和(2)式中所含的参量 α 越小，即电子的平均洛伦兹因子$\left(\langle\gamma_e\rangle\propto\frac{1}{3\alpha}\right)$越大，则朗缪尔波场的空间变化率更大，但离声波扰动所受影响不大，这与前面所假设的离子为非相对论运动相一致。

(2)α 越小(电子的平均洛伦兹因子$\langle\gamma_e\rangle$越大)和初始湍动参量$(\overline{W}_0)$越大，则相对论性朗缪尔孤子的波包半宽越窄，见(15)式。

(3)相对论性朗缪尔孤子的能量(见(21)式)和动量(见(22)式)包括线性部分($\propto(\overline{W}_0/\alpha)^{1/2}$)和非线性部分($\propto(\overline{W}_0/\alpha)^{3/2}$)，随着平均洛伦兹因子和初始湍动参量的增加，孤子的总能量和动量相应增加，而且非线性部分比线性部分增加更快，显然作为非线性实体的相对论性朗缪尔孤子，相对论效应对其非线性相互作用影响很大。

因此，电子的相对论效应越强，则等离子体中波-波、波-粒非线性相互作用越强，导致朗缪尔孤子波包更为陡峭，这与作者的物理预期相吻合。而这种非线性作用在中子星辐射、超强激光等离子体湍动加速等方面研究中是非常重要的。

参 考 文 献

[1] LU X, WANG D Sh. Modulation instability in dispersion managed soliton systems[J]. Laser Technology, 2012, 36(4): 557-561(in Chinese).

[2] SHEN Y Ch, ZHANG Y P, DAI Y, *et al*. Application of nonlinear Schrödinger equation in high speed optical soliton communication systems[J]. Laser Technology, 2009, 33(2): 180-183(in Chinese).

[3] CHEN W Ch, XU W Ch. Vector soliton bunches in mode-locked fiber lasers[J]. Laser Technology, 2010, 34(3): 354-356(in Chinese).

[4] CHENG Y, XU Z Z, SHEN B F. A soliton solution for laser pulse and wake-field of intense laser-plasma interaction[J]. Acta Optica Sinca, 1996, 16(9): 1342-1343(in Chinese).

[5] IVANOV M J, TERENTIEVA L V. Soliton-like structures in dark matter[J]. Nuclear Physics, 2003, B124(s1): 148-151.

[6] HAO D Sh. A new accelerated mechanism of protons in high power laser-plasma[J]. Laser Technology, 2012, 36(4): 653-656(in Chinese).

[7] LI L H. Solar coronal heating caused by Langmuir soliton turbulence[J]. Publications of Purple Mountain Observatory, 1994, 13(3): 212-218.

[8] ROBINSON P A. Nonlinear wave collapse and strong turbulence[J]. Reviews of Modern Physics, 1997, 69(2): 507-573.

[9] DAVYDOVA T A, YAKIMENKO A I, ZALIZNYAK Y A. Stable spatial Langmuir solitons[J]. Physics Letters, 2005, A336(1): 46-52.

[10] LIU X L, LIU S Q, YANG X S. Strong Langmuir turbulence excited by laser near critical surface[J]. Laser Technology, 2007, 31(2): 213-216(in Chinese).

[11] LIU X L, LI X Q, LIU S Q. Relativistically strong Langmuir turbulence in the kinetic regime[J]. Physics of Plasmas, 2010, 18(8): 082301.

[12] LI X Q, LIU S Q. Relativistically modulation interaction and nonlinear collapse[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2012: 146-158(in Chinese).

[13] LI X Q. Turbulence plasma physics[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985: 271(in Chinese).