

文章编号: 1001-3806(2013)01-0040-04

计算全息快速获得不同形式再现像的研究

张建强 张亚萍* 吴上 陈伟 王鹏
(昆明理工大学 理学院, 昆明 650000)

摘要: 为了提高计算全息的运算效率, 提出了一种新的计算全息快速获得不同形式再现像的算法。此算法只需对实验物体的傅里叶频谱进行一系列坐标变换, 便能够实现对其再现像的上下翻转、旋转、切变等操作, 从而大大简少了计算量, 并进行了实验验证。结果表明, 这种新的算法是切实可行的。

关键词: 全息; 傅里叶频谱; 坐标变换; 角谱

中图分类号: O438.1

文献标识码: A

doi: 10.7510/jgjs.issn.1001-3806.2013.01.010

Study on fast accomplishment of multiple-style reconstruction images of CGH

ZHANG Jian-qiang ZHANG Ya-ping, WU Shang, CHEN Wei, WANG Peng

(School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650000, China)

Abstract: In order to improve the computational efficiency of computer generated hologram (CGH), a novel algorithm was proposed to obtain multiple-type reconstruction images of CGH based on spectrum diffraction theory. The reconstruction images can be rotated, sheared and inverted by just transforming the coordinates of the Fourier spectrum so that the calculation amount is reduced a lot. Besides, it was also validated in experiments. The experiment results prove the new algorithm is feasible.

Key words: holography; Fourier spectrum; coordinate transformation; spectrum

引言

随着计算机技术的迅速发展, 人们广泛地使用计算机去模拟、运算、处理各种光学过程。与传统的计算全息术和现在比较热门的数字全息术相比, 计算全息 (computer generated hologram, CGH) 具有操作灵活、低噪声、对实现环境要求低等优点。因此, 计算全息在科学研究领域也越来越得到人们的重视, 逐渐成为一个研究的热点^[1-3]。

在参考文献[4]中, 作者对傅里叶计算全息的频谱坐标变换进行了一定的研究, 并取得了较好的结果。然而傅里叶全息却存在着重建过程中再现像与其共轭像容易重叠的问题, 而且比较难以将其分离, 因此该方法逐渐被人们所放弃。相比之下, 基于角谱重建算法的计算全息, 不仅能够有效地避免傅里叶全息的这些问题, 而且其在进行菲涅耳衍射计算时只需进行一次傅里叶变换和一次逆傅里叶变换, 具有重建速度快、获

得重建像分辨率较高的优点, 逐渐成为一个新的研究热点。在基于角谱重建算法的计算全息中, 最关键的部分就是获得物体的傅里叶频谱信息, 因此, 只要对物体的傅里叶频谱进行一定的坐标变换, 就可以得到物体不同形式的再现像, 如旋转、平移、放大、缩小、拉伸、剪切等。作者提出了一种新的快速获得计算全息不同形式再现像的算法, 此方法只需对物体进行一次傅里叶变换, 通过对傅里叶频谱进行一定的坐标变换, 便能得到物体多种不同形式的再现像。

1 基本原理

在进行全息数值重建的过程中, 常用的方法主要有两种, 一种是采用快速傅里叶变换对菲涅耳衍射进行波前的数值重建, 但在记录和重建条件不满足旁轴近似时, 该方法是不准确的; 另一种方法是利用基尔霍夫衍射积分或瑞利-索末菲衍射公式直接采用卷积方法进行数字全息重建^[5], 但其重建时间太长。为此, 也可以通过角谱重建的方法进行全息的数值重建。

1.1 角谱重建算法

角谱重建理论是衍射现象在频域的准确描述, 且其能够采用快速傅里叶变换把光波的复振幅变换到频域中进行运算。作者将利用角谱重建算法对菲涅耳衍射过程进行分析, 菲涅耳衍射过程由角谱重建理论可

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61007061); 云南省自然科学基金资助项目(2010CD034)

作者简介: 张建强(1987-), 男, 硕士研究生, 现主要从事计算全息方面的研究。

* 通讯联系人。E-mail: yaping.zhang@gmail.com

收稿日期: 2012-05-28; 收到修改稿日期: 2012-06-27

以表示为^[6-8]:

$$U(f_x, f_y) = U_0(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \quad (1)$$

式中 $U_0(f_x, f_y)$ 为物体的傅里叶频谱信息, $H(f_x, f_y) = \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]$ 为衍射在频域的传递函数。(1) 式表示光波场从衍射屏传播到相距为 z 的观察屏的频谱变化关系。

由上述理论可知,如果已知输入物光场分布为 $U_i(x, y)$ 则全息面上的物光场分布为:

$$U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U_i(x, y)]H(f_x, f_y)\} \quad (2)$$

式中 x, y 为全息面上的坐标分布, \mathcal{F} 为快速傅里叶变换, \mathcal{F}^{-1} 为快速逆傅里叶变换^[7]。

加入参考光 $R(x, y)$ 与物光干涉生成计算全息图, 则全息面上的光场复振幅分布为:

$$I(x, y) = U(x, y) + R(x, y) \quad (3)$$

由全息原理得知,如果用光波 $C(x, y)$ 照射全息图进行重建,重建面上的再现光场复振幅分布为:

$$U_r(x_i, y_i) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[C \cdot I] \cdot H\} \quad (4)$$

式中 I 为全息面上的物光场分布, x_i 和 y_i 为重建面上的坐标分布^[9]。

1.2 傅里叶频谱的坐标变换

由上面的理论可以得知,在基于角谱重建算法计算全息的数值重建中,最关键的部分就是获得物体的傅里叶频谱信息。如果物体的形状发生改变,就要重新进行物体的傅里叶频谱计算。然而,物体的某些变化可以看成是坐标变换的结果。因此,只要对物体的傅里叶频谱进行一系列坐标变换,就可以得到物体不同形式的再现像,如旋转、平移、放大、缩小、拉伸、剪切等。

设已知原物体函数表达式为 $f(x, y)$, 其傅里叶频谱为 $F(u, v)$, 假设对 $f(x, y)$ 进行坐标变换后得到的函数形式为 $g(x, y) = f(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, 由 2 维傅里叶变换的定义,能够得到 $g(x, y)$ 的 2 维傅里叶变换为^[10]:

$$G(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-2\pi i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta = \iint_{-\infty}^{\infty} f(a_1\alpha + b_1\beta + c_1, a_2\alpha + b_2\beta + c_2) \times \exp[-2\pi i(\alpha u + \beta v)] d\alpha d\beta \quad (5)$$

首先将 $\alpha' = a_1\alpha + b_1\beta + c_1$ 代入(5)式,则:

$$G(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f\left[\alpha', a_2\left(\frac{\alpha' - b_1\beta - c_1}{a_1}\right) + b_2\beta + c_2\right] \times \exp\left\{-2\pi i\left[\left(\frac{\alpha' - b_1\beta - c_1}{a_1}\right)u + \beta v\right]\right\} d\alpha' d\beta \quad (6)$$

将 $\beta' = a_2\left(\frac{\alpha' - b_1\beta - c_1}{a_1}\right) + b_2\beta + c_2$ 代入(6)式,可以得到:

$$G(u, v) = \frac{1}{D} \iint_{-\infty}^{\infty} f[\alpha', \beta'] \times \exp\left\{-2\pi i\left[\left(\frac{b_2u}{D} - \frac{a_2v}{D}\right)\alpha' + \left(-\frac{b_1u}{D} + \frac{a_1v}{D}\right)\beta' + x_0u + y_0v\right]\right\} d\alpha' d\beta' \quad (7)$$

$$\text{式中 } D = a_1b_2 - a_2b_1, x_0 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{D}, y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{D}.$$

可以将(7)式简化为:

$$G(u, v) = \frac{1}{D} \exp[-2\pi i(x_0u + y_0v)] \times \mathcal{F}\left(\frac{b_2u}{D} - \frac{a_2v}{D}, -\frac{b_1u}{D} + \frac{a_1v}{D}\right) \quad (8)$$

由此可见,当对物体原函数进行坐标变换后,其变换后物体的傅里叶频谱也为原物体傅里叶频谱的坐标变换。因此,当原物体发生某些形变后,并不需要重新计算形变后物体的傅里叶频谱信息,只需对原物体的傅里叶频谱进行特定的坐标变换,即能完成形变后物体的全息数值重建。

1.3 傅里叶频谱的几何变换

2 维空间内,图像中一个点 P 的位置可以用其坐标 (x, y) 表示,也可用向量 $[x, y]$ 的形式表示。若将 2 维空间点由某一位置 $P(x, y)$ 变换到另一位置 $P'(x', y')$, 则可以通过相乘矩阵的形式来实现,即:

$$[x', y'] = [x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ax + cy, bx + dy) \quad (9)$$

式中,矩阵 $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 称为变换矩阵。由(9)式可以

得知,变换后点 P' 的位置取决于变换矩阵 T 中各元素的大小。

设有一图像 $f(x, y)$, 其傅里叶频谱为 $F(u, v)$ 。设坐标轴不动,图像 $f(x, y)$ 以原点为基准旋转 θ 角后变为 $g(x', y')$, 则:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases} \quad (10)$$

即 $a_1 = \cos\theta, b_1 = -\sin\theta, c_1 = 0, a_2 = \sin\theta, b_2 = \cos\theta, c_2 = 0$ 。

将其代入(8)式,可以得到变换后图像 $g(x', y')$ 的傅里叶频谱为:

$$G(u, v) = \mathcal{F}(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) \quad (11)$$

因此,当对原图像进行旋转、上下、左右翻转等坐标变换时,只需对原图像的傅里叶频谱进行相应的坐标变换,便能得到变换后图像的傅里叶频谱,在进行全息计算时,便能得到变换后相应不同形式的再现像。

2 实验结果

实验物体为图像“光”字,如图1a所示。使用计算机的MATLAB软件对其进行基于角谱重建算法的全息数值模拟。首先对图1a进行傅里叶变换,得到其2维

傅里叶频谱信息,如图1b所示。然后对图1b的傅里叶频谱信息进行一定的坐标变换,其变换结果如图1c、图1d和图1e所示。其中图1c为原图像傅里叶频谱上下翻转后的结果,图1d为原图像傅里叶频谱旋转 30° 后的结果,图1e为原图像傅里叶频谱旋转 60° 后的结果。

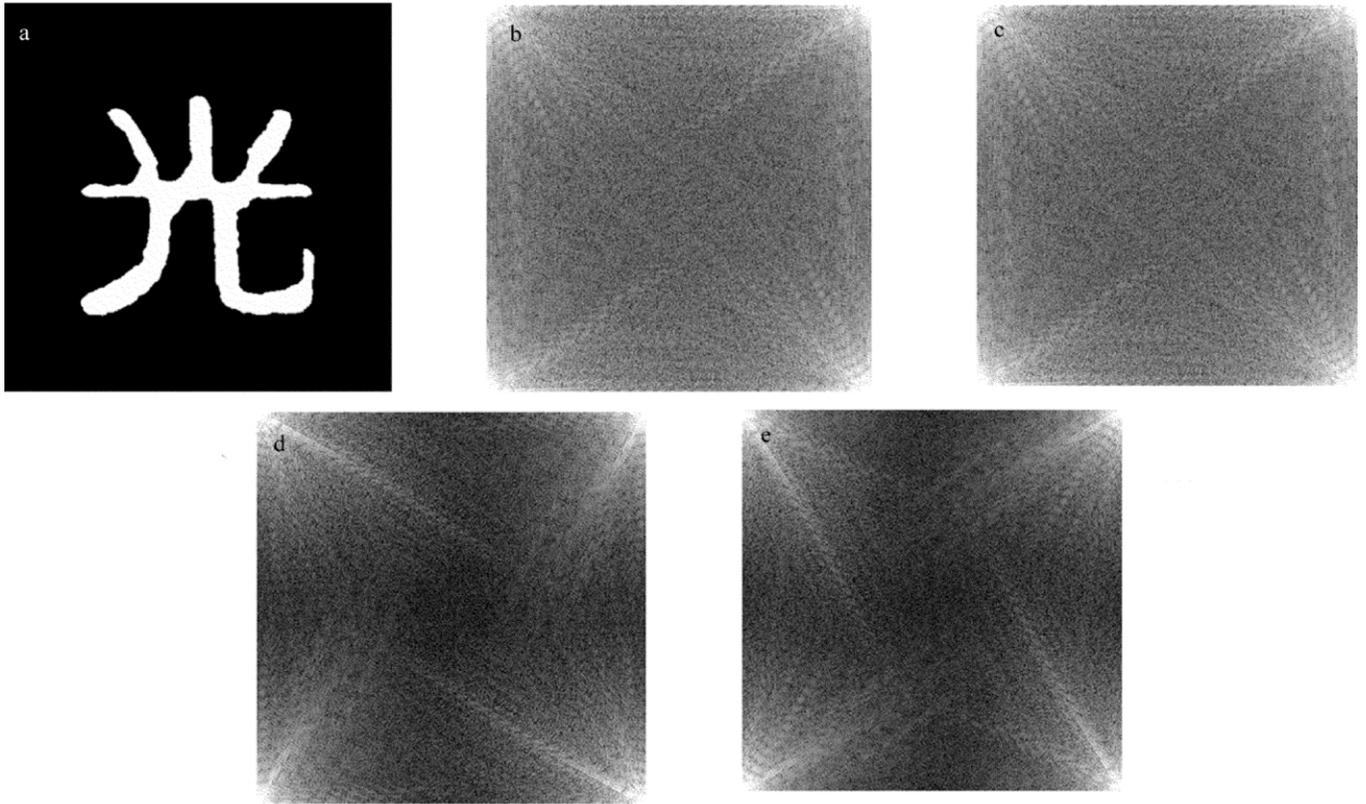


Fig. 1 Results of coordinate transform of Fourier spectrum

a—origin image b—Fourier spectrum of Fig. 1a c,d,e—results of doing up/down conversion, 30° rotation on Fig. 1b, 60° rotation on Fig. 1b, respectively

然后,对图1a进行基于角谱重建算法的全息数值重建,图2a为图1a的“-1”级全息再现像。图2b、图

2c和图2d分别为图1c、图1d和图1e的“-1”级全息再现像。

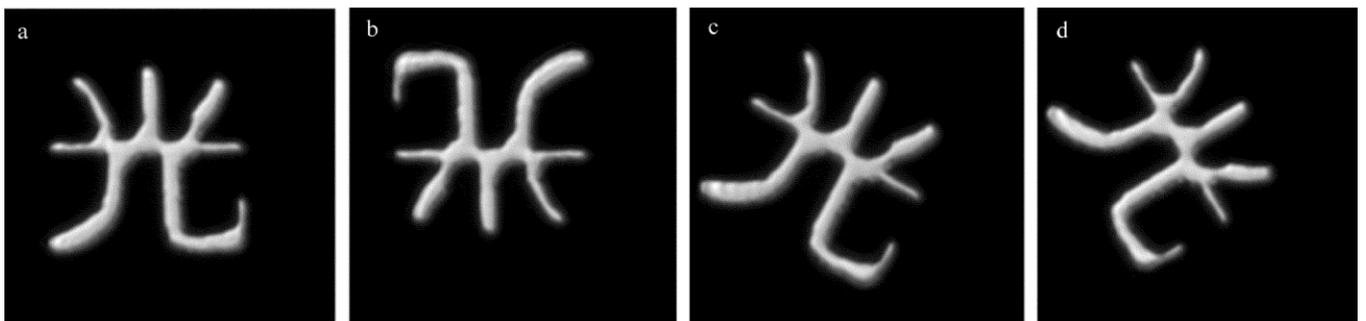


Fig. 2 “-1” order images of different coordinate transform of Fourier spectrum

a~d—reconstruction holographical images of Fig. 1b, Fig. 1c, Fig. 1d, Fig. 1e, respectively

由上面的实验结果可以看出,当对原图像的傅里叶频谱进行坐标变换后,便得到了相应变换后的不同形式的再现像,从而大大减少了计算量,提高了运算效率,同时也验证了作者前面理论的正确性。

3 结论

提出了一种新的快速获得计算全息不同形式再现像的算法,此算法只需对实验物体的傅里叶频谱进行一

系列的坐标变换,便能够实现对再现像的上下翻转、旋转、切变等操作,从而大大减少了计算量。这对于实现复杂曲面的计算全息快速算法将是一个非常好的参考。

参 考 文 献

- [1] WENG J T, TOMOYOSHI S, NAOHISA O. Generation of real-time large computer generated hologram using wavefront recording method [J]. *Optics Express*, 2012, 20(6): 4018-4023.
- [2] ICHIKAWA T, SAKAMOTO Y, SUBAGYO A, *et al.* Calculation method of reflectance distributions for computer-generated holograms using the finite-difference time-domain method [J]. *Applied Optics*, 2011, 50(34): H211-H219.
- [3] SAKATA H, HOSOYACHI K, YANG Ch Y, *et al.* Calculation method for computer-generated holograms with cylindrical basic object light by using a graphic processing unit [J]. *Applied Optics*, 2011, 50(34): H306-H314.
- [4] MU R W, ZHOU J, TAN S Q. Method of accomplishing reconstructed image of multiple styles in Fourier computer generated hologram [J]. *Journal of Electronic Science and Technology*, 1998, 27(8): 112-115 (in Chinese).
- [5] XIONG B H, LI J Ch. Holographic interference measurement-principles and methods [M]. Beijing: Science Press, 2009: 221-232 (in Chinese).
- [6] JIAO J K, WANG X B, LU H. Analysis of temperature field and thermal stress field in quartz glass heated by laser beams [J]. *Laser Technology*, 2007, 31(4): 427-430 (in Chinese).
- [7] WANG H Y, WANG D Y, XIE J. Study of the reconstructing methods of the digital off-axis lens-less Fourier transform hologram [J]. *Laser Technology*, 2007, 31(3): 288-290 (in Chinese).
- [8] ZHANG Y P, ZHANG J Q, XU W. Elimination of the influence of zero-order diffraction using highpass filter in wavefront reconstruction [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(11): 1109002 (in Chinese).
- [9] DU Y, ZHANG Y A, QIAN X F. A real-time digital hologram reconstruction system based on mixed programming [J]. *Laser Technology*, 2011, 35(6): 841-844 (in Chinese).
- [10] GASKILL J D. *Linear systems, Fourier transforms and optics* [M]. New York, USA: John Wiley & Sons Inc, 1978: 308-309.