

文章编号: 1001-3806(2012)04-0471-04

严格耦合波法计算体布喇格光栅衍射效率

张茜 赵尚弘* 楚兴春

(空军工程大学 电讯工程学院, 西安 710077)

摘要: 为了获得更精确的光栅衍射效率,采用严格耦合波理论建立体布喇格光栅衍射机理模型,分析了运用严格耦合波理论实现体光栅的衍射效率计算,并利用正交 Legendre 多项式展开法求解耦合波方程,取得了体布喇格光栅衍射效率稳定的数值解,得到的仿真结果符合理论计算。结果表明,相对于矩阵法,该算法具有更好的收敛速率,且比 Kogelnik 耦合波理论解法更精确。

关键词: 衍射与光栅; 体布喇格光栅; 严格耦合波理论; 衍射效率; Legendre 多项式

中图分类号: TN253 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.04.010

Calculation of diffraction efficiency of volume Bragg gratings with rigorous coupled-wave method

ZHANG Xi, ZHAO Shang-hong, CHU Xing-chun

(Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: In order to obtain the accurate diffraction efficiency of gratings, the diffraction mechanism of volume Bragg gratings was established and the diffraction efficiency was calculated with the rigorous coupled-wave method. The first-order coupled Maxwell's equations was solved in terms of Legendre polynomials, and the diffraction efficiency of volume Bragg gratings was obtained. The simulation results were consistent with theoretical calculation results. This method converges faster than the matrix method, and is more precise than the Kogelnik coupling wave theory.

Key words: diffraction and gratings; volume Bragg grating; rigorous coupled-wave theory; diffraction efficiency; Legendre polynomial

引言

随着体全息技术的发展,一种具有高效衍射性能的光栅——体布喇格光栅逐渐成为现代光学技术中的重要光学元件。体布喇格光栅是利用光学全息方法在存储材料中制作的一种体相位光栅,具有较好的角选择性和谱选择性^[1]。利用光热折变无机玻璃为基底制作的体布喇格光栅具有较好的热稳定性、折射率稳定性和机械稳定性,因而广泛地应用于激光组束、光束偏转、滤波器设计等领域^[2-5]。衍射效率是体布喇格光栅最重要的参量之一,体全息元件的衍射效率通常用 Kogelnik 耦合波理论计算^[6]。Kogelnik 耦合波理论数学计算较为简单,但是它实际上采用了一系列近似^[7-10]: (1) 忽略了边界衍射; (2) 忽略了场振幅的 2 阶导数; (3) 只能计算特定的有效衍射级次并认为该

级次满足 Bragg 条件。由于这些近似,在许多情况得出的结果不精确甚至不正确,局限性比较大。由于严格耦合波(rigorous coupled-wave, RCWA)理论物理概念清晰、易于稳定地数值模拟计算,是分析衍射效率的严格矢量方法。因此,作者采用 RCWA 理论严格计算了折射率调制型体全息光栅衍射特性,对光栅内部磁场利用正交 Legendre 多项式展开,从而分析体布喇格光栅的衍射效率,该方法可以得到体布喇格光栅衍射效率稳定的数值解,并与 Kogelnik 耦合波理论进行比较。

1 严格耦合波理论

1.1 光栅理论模型

本文中只讨论入射光是 TE 偏振的情况。体布喇格光栅的衍射分布情况如图 1 所示。光栅厚度为 d ,光栅周期为 Λ ,一平面波以 θ 角入射(波长为 λ),产生各级反射波和透射波。区域 1(入射区)和区域 3(出射区)都是均匀介质,其相对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_3 ;区域 2(光栅区)为非均匀介质,其平均介电常数为 ϵ_2 。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60678018)

作者简介: 张茜(1987-),女,硕士研究生,现主要从事光纤激光器和激光组束方面的研究工作。

* 通讯联系人。E-mail: zhaoshangh@yahoo.com.cn

收稿日期: 2011-11-02; 收到修改稿日期: 2011-11-23

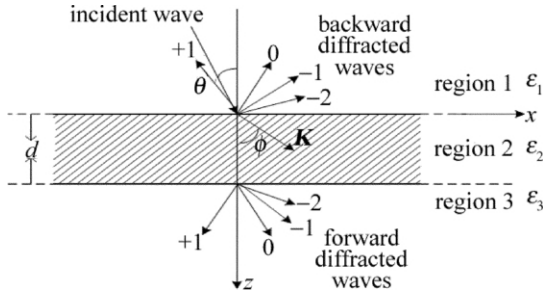


Fig. 1 Diffraction of volume Bragg grating

作者研究的是倾斜入射平面波在体布喇格光栅的衍射情况,因此只考虑电场。相对介电常数调制区:

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_2 + \Delta\epsilon \cos[\mathbf{K}(x \sin\phi + z \cos\phi)] \quad (1)$$

式中 $\Delta\epsilon$ 为介电常数变化的振幅; \mathbf{K} 为光栅矢量 ($\mathbf{K} = \frac{2\pi}{\Lambda}$); ϕ 为光栅倾斜角 (\mathbf{K} 与 z 轴夹角), 非调制区的相对介电常数 $\epsilon_1 = \epsilon_3$ 。

1.1.1 光栅内部电磁场 解决平面光栅衍射问题的一般方法是找出 3 个区域波动方程的解^[11], 然后通过解差分波动方程来确定未知常数。区域 2 为调制区, 其电场可表示为:

$$E_2 = \sum_i \hat{S}_i(z) \exp[-j\beta_i x + \xi_{2i} z] \quad (2)$$

式中 $\beta_i = k_i \sin\theta' - iK \sin\phi$ (i 为任意整数), $k_i = \frac{2\pi\epsilon_i^{1/2}}{\lambda}$ ($i = 1, 2, 3$), $j = (-1)^{i-1}$, $\xi_{2i} = k_i \cos\theta' - iK \cos\phi$, $\hat{S}_i(z)$ 是归一化处理后的光栅区任意点的第 i 级波场振幅, θ' 是调制区内的折射角。给定 i 值, 可以看出, 光栅内的波场并不是简单的平面波, 而是无限个平面波 (反射衍射波与透射衍射波) 的叠加, 确定了这些波场振幅才能解决调制区的波动方程:

$$\nabla^2 E_2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \epsilon(x, z) E_2 = 0 \quad (3)$$

式中 ∇ 为拉普拉斯算子。为获得衍射振幅 $\hat{S}_i(z)$ 将 (1) 式和 (2) 式代入 (3) 式, 得到一个由无限个方程组成的耦合波方程组:

$$\left(\frac{\Delta\epsilon}{8\epsilon_2}\right) \frac{d^2 S_i(u)}{du^2} = (\cos\theta' - i\mu \cos\phi) \frac{dS_i(u)}{du} - \rho i(i - B) S_i(u) + S_{i+1}(u) + S_{i-1}(u) \quad (4)$$

式中 $S_i(u) = \hat{S}_i(z)$, $\mu = \frac{j\pi\Delta\epsilon z}{2\lambda(\epsilon_2)^{1/2}}$, $\rho = \frac{2\lambda^2}{\Lambda^2 \Delta\epsilon} = \frac{2\mu^2 \epsilon_2}{\Delta\epsilon}$, $\mu = \frac{\lambda}{\Lambda(\epsilon_2)^{1/2}}$, $B = 2\Lambda(\epsilon_2)^{1/2} \times \frac{\cos(\phi - \theta')}{\lambda} = \frac{2\cos(\phi - \theta')}{\mu}$ 。(4) 式包含 5 个基本参量: $\{\theta', \phi, \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_2}, \frac{d}{\Lambda}, \frac{\lambda}{\Lambda(\epsilon_2)^{1/2}}\}$ 。式中定义的 B 表示的是与 Bragg 条件相关的量, $B=1$ 即为常见的 Bragg 条件表示式, B 与 1

的差距表示与 Bragg 条件的偏离。

1.1.2 光栅外部磁场 通常情况下, 平面波由区域一入射到光栅区会产生光栅体内衍射和在 $z=0$ 处的边界周期衍射, 这些衍射作用会导致部分光谱重新回到区域 1, 因此区域 1 的电场为入射平面波与反射衍射波的叠加, 对入射波振幅做归一化处理, 得到^[12]:

$$E_1 = \exp[-j(\beta_0 x + \xi_{10} z)] + \sum_i R_i \exp[-j(\beta_i x - \xi_{1i} z)] \quad (5)$$

式中 $\xi_{1i}^2 = k_i^2 - \beta_i^2$ ($i = 1, 2, 3$ (区域数)); R_i 为归一化处理后的第 i 级反射衍射波振幅。在区域 3 中, 平面波通过光栅产生透射, 其电场表达式为:

$$E_3 = \sum_i T_i \exp\{-j[\beta_i x + \xi_{3i}(z - d)]\} \quad (6)$$

式中 T_i 为归一化处理后的第 i 级透射衍射波振幅。如果在 (5) 式和 (6) 式中仅考虑反射或透射 1 级衍射波而忽略次级衍射, 则计算结果即为 Kogelnik 耦合波理论的结果。

1.2 严格耦合波方程的解法

由于 Maxwell 方程的解中出现了具有实本征值的隐矢波, 导致 RCWA 在数值计算中不稳定。在使用其它基于模展开的传统严格方法时也会遇到相同的问题。这是因为隐矢波可导致边界条件方程中出现异常大或异常小的系数, 从而使计算过程中产生数值溢出或病态矩阵。在本文中, 光栅内部电磁场, 用正交 Legendre 多项式展开^[13], 与其它基于傅里叶展开的模式法相比, 该方法可得到稳定的数值解。

把 $\hat{S}_i(z)$ 按照 Legendre 多项式进行展开:

$$\hat{S}_i(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} q_m^i P_m(\xi) \quad \left(\xi = \frac{2z - d}{d}\right) \quad (7)$$

式中 $P_m(\xi)$ 为归一化 Legendre 多项式, q_m^i 是需要确定的展开系数, d 为光栅厚度。注意, 由 Legendre 多项式张成的矢量空间是一个完整的空间, 并且每个 $\hat{S}_i(z)$ 都可按此展开。但是, (7) 式在实际应用中只能展开为有限数目的多项式, 而合适的多项式数目与耦合到每个多项式的能量大小和所需的精度有关。虽然, (7) 式的多项式被截断是不可避免的, 但引入的误差被证明非常小以致可忽略。另外需要注意的是, 在傅里叶展开中, 保留计算的衍射级次数目 N 的取值与光栅内部每个空间谐波的精度和光栅外部衍射级次的数目有关, 而在 Legendre 多项式展开中, 由于引入了多项式展开产生一个新的自由度 M_i , 从而使傅里叶展开中 N 的取值关系被减弱。在 (7) 式中只保留多项式展开的前 M_i 项, 其它高阶项被忽略。把截断后的多项式展开代入 (4) 式, 由于结果方程被投影到多项式基函数上, 截断造成的误差将被最小化。得到下面的方程:

$$r_m^i - jd[k_2 - iK]g_m^i + \left(\frac{d}{2}\right)[i(m-i)K^2 - k_2^2] \times q_m^i + \left(\frac{d}{2}\right)^2 k_0^2 \sum_p \varepsilon_{i-p} q_m^p = 0 \quad (8)$$

式中, $g_m^i(2m+1) \sum_{\substack{l+m \\ \text{odd}}}^{M_i} q_l^i$ 和 $r_m^i = \left[\frac{2m+1}{2}\right] \times \sum_{l=m+2t}^{M_i} (l+m+1)(l-m)q_l^i$ 分别为按照 q_m^i 展开的 1

阶和 2 阶导数的系数; q_m^i 是用于展开每个空间谐波的多项式基函数的未知系数 $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是自由空间波数; 对于每个值 i , 共有 $M_i + 1$ 个未知系数。从 (8) 式可得出 $M_i - 1$ 个方程, 但是每个空间谐波需要 $M_i + 1$ 个未知数来表示。因此, 还需要两个方程可从边界条件得到。

根据切线电磁场的连续型, 应用 (2) 式、(5) 式、(6) 式和 (7) 式, 消去 R_i 和 T_i , 再进行一些数学计算可得:

$$\sum_{m=0}^{M_i} (-1)^m q_m^i \left[\frac{m(m+1)}{d} + j(k_{1iz} + k_{2z} - iK_z) \right] = 2jk_{1z}\delta_{i0} \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^{M_i} q_m^i \left[\frac{m(m+1)}{d} + j(k_{3iz} - k_{2z} + iK_z) \right] = 0 \quad (10)$$

考虑到光栅外部的每个衍射级次都要与光栅内部的空间谐波在每个边界处进行相位匹配, 可得到:

$$\begin{cases} k_{1ix} = k_{1x} - iK \sin\phi \\ k_{3ix} = k_{2x} - iK \sin\phi \\ k_{2x} = k_{1x} = k_0 n \sin\theta \end{cases} \quad (11)$$

现在 (8) 式、(9) 式和 (10) 式构成了 $M_i + 1$ 个方程, 从它们可解出 q_m^i 。从而可得到区域 1 和区域 3 对应的衍射效率分别为:

$$DE_{1i} = \text{Re}\left(\frac{\xi_{1i}}{\xi_{10}}\right) R_i R_i^* \quad (12)$$

$$DE_{3i} = \text{Re}\left(\frac{k_{3iz}}{k_{1z}}\right) T_i T_i^* \quad (13)$$

对无损耗光栅, 满足能量守恒:

$$\sum_i (DE_{1i} + DE_{3i}) = 1 \quad (14)$$

2 数值仿真与分析

通过 MATLAB 软件编程, 对计算所得的体布喇格光栅衍射效率进行仿真。

图 2 为纯透射光栅即 $\phi = 90^\circ, \rho = 2$ 的衍射斜率。图 3 为光栅倾斜角为 60° 的透射波衍射效率。图 4 为纯反射光栅即 $\phi = 0^\circ, \rho = 10$ 的衍射效率。 γ 为光栅密

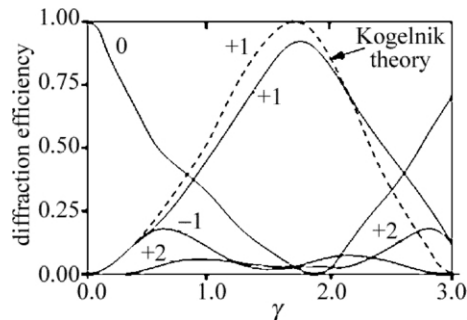


Fig. 2 Diffraction efficiencies of pure transmission grating($\phi = 90^\circ, \rho = 2$)

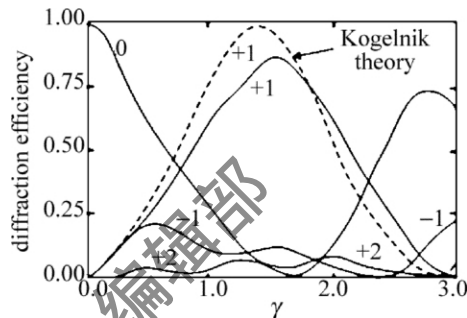


Fig. 3 Diffraction efficiencies of slanted grating($\phi = 60^\circ$)

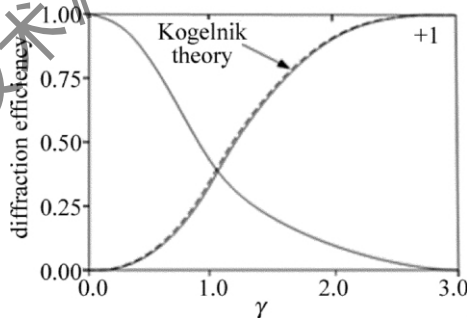


Fig. 4 Diffraction efficiencies of pure reflection grating($\phi = 0^\circ, \rho = 10$)

度参数。

两种耦合波理论的主要区别在于对调制区的耦合波方程解法不同。Kogelnik 耦合波理论采用了一系列近似, 忽略了边界衍射和场振幅的 2 阶导数, 并假设参数 $\frac{\Delta\varepsilon}{8\varepsilon_2}$ 非常小。从上面 3 个图中可以看出, 严格耦合波理论与 Kogelnik 耦合波理论的差别: (1) 对于纯反射光栅, 运用两种耦合波理论得到的衍射效率基本相同; (2) 对于纯透射光栅和倾斜光栅, 利用两种耦合波理论计算得到的衍射效率相差较大。这论证了作者的计算结果的正确性。Kogelnik 耦合波理论只能对满足布喇格条件的衍射波进行计算, 因而当 $B = 1$ 时, 只能计算 +1 级而无法计算其它衍射级次, 这也反映了 Kogelnik 耦合波理论的局限性。

3 结 论

介绍了严格耦合波理论的内容, 讨论了严格耦合波理论的解法, 阐述了光栅内部磁场利用正交 Legendre 多项式展开的方法, 进而分析体布喇格光栅的衍射

效率 得到体布喇格光栅衍射效率稳定的数值解。相对于矩阵法,该算法具有更好的收敛速率,得到的仿真结果符合理论计算,且比 Kogelnik 耦合波理论解法更精确。在此基础上将进一步分析由体布喇格光栅构成的光学系统的衍射效率以及精确计算。

参 考 文 献

- [1] EFIMOV O M , GLEBOV L B , SMIRNOV V I. High efficiency volume diffractive elements in photo-thermo-refractive glass: US , 6673497 [P]. 2004-01-06.
- [2] EFIMOV O M , GLEBOV L B , SMIRNOV V I. Diffractive optical elements in photosensitive inorganic glasses [J]. Proceedings of SPIE , 2001 4452: 392.
- [3] GLEBOV L B , GLEBOVA L. Swelling of photo-thermo-refractive glass resulted from thermal development [J]. Glass Science and Technology 2002 75(c2) : 294-297.
- [4] GLEBOV L B. PTR glass melting facility for fabrication of diffractive optical elements [R]. Virginia , USA: America Diabetes Association , 2004: 650126.
- [5] ZHOU P , HOU J , CHEN Z L , *et al.* Comparative study for coherent beam combining and spectral beam combining of fiber lasers [J]. Laser Technology , 2008 32(4) : 413-416 (in Chinese) .
- [6] KOGELNIK H. Coupled wave theory for thick hologram gratings [J]. Bell Systems Technical Journal , 1969 48(9) : 2909-2945.
- [7] DEFOSSE Y , RENOTTE Y L M , LION Y F. Calculation of diffraction efficiencies for spherical and cylindrical holographic lenses [J]. Proceedings of SPIE , 1991 1507: 277-287.
- [8] THOLL H D. Two-wave coupled-wave theory of the polarizing properties of volume phase gratings [J]. Proceedings of SPIE , 1991 1555: 101-111.
- [9] BLES A , ARIAS I , ATENCIA J *et al.* Holographic volume dual-element as an optical variable beamsplitter [J]. Journal of Modern Optics , 1999 46(1) : 155-165.
- [10] NEIPP E , PASCUAL I , BELENDEZ A. Experimental evidence of mixed gratings with a phase difference between the phase and amplitude grating in volume holograms [J]. Optics Express , 2002 , 10(23) : 1374-1383.
- [11] GALLEGO S , ORTUNO M , NEIPP C *et al.* Overmodulation effects in volume holograms recorded on photopolymers [J]. Optics Communications 2003 215(4/6) : 263-269.
- [12] MOHARAM M G , GAYLORD P K. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction [J]. Journal of the Optical Society of America , 1981 71(7) : 811-818.
- [13] KHAVASI A , MEHBANY K. Three-dimensional diffraction analysis of gratings based on Legendre expansion of electromagnetic fields [J]. Journal of the Optical Society of America 2007 24(10) : 2627-2685.