

文章编号: 1001-3806(2012)03-0405-03

## 基于衍射理论的高斯像面球差的计算与分析

常山 桑志文 庄玲

(上饶师范学院 物理与电子信息学院, 上饶 334001)

**摘要:** 为了利用波动光学的衍射理论分析处理球差, 采用先计算像点的光强分布再进一步分析处理球差的方法, 对球差进行了理论分析和模拟。从基于点源圆孔衍射的成像原理出发, 经过适当推导得到高斯像面上仅有球差像点的光强分布的解析计算式, 分析探讨了高斯像面上球差的衍射机理及其计算与校正。结果表明, 这种方法能够更为精细地分析处理球差, 有助于在光学设计中对球差进行像差平衡与校正、光学加工中对球差的检测与修正以及数码成像时对球差做电子校正等, 有利于促进激光技术和微光学以及微光机电系统的发展。

**关键词:** 成像系统; 球差; 衍射机理; 像点; 计算与校正; 像差精细分析

中图分类号: O435; O436.1 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.03.031

## Calculation and analysis of spherical aberration on Gaussian image plane based on diffraction theory

CHANG Shan, SANG Zhi-wen, ZHUANG Ling

(School of Physics & Electronic Information, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China)

**Abstract:** In order to study how to analyze spherical aberration based on the diffraction theory of wave optics, theoretical analysis and simulation were carried out. Firstly, the light intensity distribution of the image point was calculated and then the spherical aberration was further analyzed and processed. Starting from the imaging principle a circular aperture irradiated by a point source, referring to relevant documents, analytical expression of the intensity distribution of the image point only with spherical aberration on the Gaussian image plane was deduced. The diffraction mechanism and calculation and correction of spherical aberration on Gaussian image plane were analyzed and discussed. The method can handle spherical aberration more accurately. It is helpful for balancing and correction of spherical aberration in optical design and the detection and correction of spherical aberration in optical processing and electronic correction of spherical aberration in digital imaging, and conducive to promote the development of laser technology and micro-optics and micro-optoelectro mechanical systems.

**Key words:** imaging system; spherical aberration; diffraction mechanism; image point; calculation and correction; fine aberration analysis

### 引言

几何光学认为球差是主轴上一个物点发出的同心球面圆锥宽光束通过光学系统上的每个环带后, 在高斯像面上不是会聚为一个点而是形成一个圆环, 从而在高斯像面前后形成一个球状弥散光斑。显然, 这是由于光学系统不同孔径角处对主轴上物点发出的发散的同心球面光束的波前变换作用出现偏差, 不能形成会聚的同心球面光束而形成非同心球面光束造成

的<sup>[1-5]</sup>。球差这种弥散斑对系统成像质量及其性能有很大影响, 往往是系统设计及加工以及使用中首先要解决的像差。跟几何光学利用光线处理问题只考虑光波振幅不同, 波动光学以衍射理论为核心考察包括振幅和相位全部信息的光波波前, 可以更为精细地处理像差<sup>[6-7]</sup>。参考文献[3]和参考文献[6]中用波像差函数分析了像差<sup>[3-4]</sup>, 但还要进一步发展, 为此本文中利用衍射理论探讨高斯像面上的球差。

### 1 高斯像面上仅有球差像点的光强计算

#### 1.1 基于点源圆孔衍射的成像原理

图1为成像原理图。 $P$ 为主轴点, 光瞳面内取极坐标  $x + jy = \rho e^{j\varphi}$ , 令  $x_1 = x_i - z_i x_o / z_o$  和  $y_1 = y_i - z_i y_o / z_o$ , 像面取极坐标  $x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\varphi_1}$ 。物高  $|\rho_o| = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ , 像高  $|\rho_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ,  $\rho$  为衍射孔径, 即

基金项目: 江西省教育厅科技计划基金资助项目 (2011GJJ11612); 上饶师范学院 2007 年科研课题资助项目

作者简介: 常山 (1964-), 男, 硕士, 讲师, 主要从事光电教学和光信息学的研究。

E-mail: cs0328@126.com

收稿日期: 2011-08-29; 收到修改稿日期: 2011-09-05

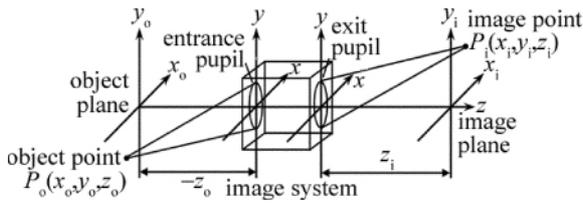


Fig. 1 General model of imaging system

极半径  $\rho$  为极角。高频光波振幅较相位具有缓变性，如果系统有相位变换作用  $k(1/z_i - 1/z_o - 1/f) \rho^2 = 0$ ，将会发生夫琅禾费衍射而成像。 $k$  为波数  $k = \lambda/2\pi$ ， $\lambda$  为波长。根据基尔霍夫衍射公式，利用  $\int_0^{2\pi} \exp[-j\rho \cos(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = 2\pi J_0(\rho)$ ，可得  $1/z_i - 1/z_o - 1/f = 0$  处的高斯像面附近仅有球差像点的空间光场分布的复振幅表达式为<sup>[6-7]</sup>：

$$\bar{E}(P) \cong \frac{jA \cos \delta}{\lambda z_o z_i} e^{jk(z_i - z_o - \frac{\rho_o^2}{2z_o} + \frac{\rho_i^2}{2z_i})} \times \int_0^R e^{j\frac{k}{2}(\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_o} - \frac{1}{f})\rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{jk\frac{\rho}{z_i} \rho \cos(\varphi - \varphi_1)} d\varphi \quad (1)$$

式中  $A$  为常数， $\lambda$  为波长， $\cos \delta \cong$  常数， $R$  为衍射孔径， $f$  为像方焦距， $z_o$  和  $z_i$  分别为物距和像距。

利用  $\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$ ，得  $1/z_i - 1/z_o - 1/f = 0$  处像点光强分布为：

$$I(P_i) \cong \left| \frac{jA k \cos \delta}{z_o z_i} e^{jk(z_i - z_o + \frac{\rho_i^2}{2z_i})} \int_0^R e^{jkC_{040} \rho^4} J_0\left(\frac{k\rho_i \rho}{z_i}\right) \rho d\rho \right|^2 = \left| \frac{A k \cos \delta}{z_o z_i} \int_0^R \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (kC_{040})^{2n} \rho^{8n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (kC_{040})^{2n+1} \rho^{8n+4}}{(2n+1)!} \right] J_0\left(\frac{k\rho_i \rho}{z_i}\right) \rho d\rho \right|^2 = \left| \frac{A \cos \delta}{z_o z_i} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (kC_{040})^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{4n} 2^m P_{4n}^m R^{8n-2m} J_{m+1}\left(\frac{kR\rho_i}{z_i}\right) \right] + j \sum_{n=0}^N \left[ \frac{(-1)^n (kC_{040})^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{2(2n+1)} 2^m P_{2(2n+1)}^m R^{4(2n+1)-2m} J_{m+1}\left(\frac{kR\rho_i}{z_i}\right) \right] \right|^2 = \left| \frac{A \cos \delta}{z_o z_i} \right|^2 \left\{ \sum_{n=0}^N \left[ \frac{(kC_{040})^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{4n} 2^m P_{4n}^m R^{8n-2m} J_{m+1}\left(\frac{kR\rho_i}{z_i}\right) \right] \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=0}^N \left[ \frac{(kC_{040})^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{2(2n+1)} 2^m P_{2(2n+1)}^m R^{4(2n+1)-2m} J_{m+1}\left(\frac{kR\rho_i}{z_i}\right) \right] \right\}^2 \quad (4)$$

式中，球面波像差系数  $C_{040}$  和衍射孔径  $\rho$  越大， $e^{jkC_{040}\rho^4}$  的级数展开式保持适当精度所需的  $N$  值就越大，球差也越大，反之  $N$  值越小，球差就越小； $C_{040} = 0$  时没有球差，或者衍射孔径  $\rho = 0$  时， $N = 0$ ，(3) 式变为 (2) 式而理想成像。

## 2 高斯像面上球差的分析与处理

### 2.1 高斯像面上球差的衍射机理

比较 (1) 式和 (3) 式可知，有球差波像差时发生菲涅耳衍射产生球差，像点不再是圆域函数  $\text{circ}(\rho/R)$  的

$$I(P) \cong \left[ \frac{AR \cos \delta}{z_o \rho_i} J_1\left(\frac{kR\rho_i}{z_i}\right) \right]^2 \quad (2)$$

(2) 式表明，像点是物点经圆孔夫琅禾费衍射时圆域函数  $\text{circ}(\rho/R)$  的零阶汉克尔变换的结果， $\rho_i = 0$  的衍射主极大为像点， $\beta = z_i/z_o = x_i/x_o = y_i/y_o = \rho_i/\rho_o$ ，像是物的颠倒且被放大（或缩小）了的“复制品”。

### 1.2 高斯像面上仅有球差像点的光强计算

图 1 中成像系统仅有球差波像差  $W = C_{040}\rho^4$  时 ( $C_{040}$  为球面波像差系数)，主轴 ( $0, 0, z_o$ ) 处物点  $\rho_o = 0$ ，此时  $x_i = x_o$  和  $y_i = y_o$ ， $\rho_i = \rho_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$  和  $\varphi_i = \tan^{-1}(y_o/x_o)$ 。参考 (1) 式得  $1/z_i - 1/z_o - 1/f = 0$  处高斯像面上仅有球差像点的场分布为<sup>[6-7]</sup>：

$$\bar{E}(P_i) \cong \frac{jA k \cos \delta}{z_o z_i} e^{jk(z_i - z_o + \frac{\rho_i^2}{2z_i})} \times \int_0^R e^{jkC_{040} \rho^4} J_0\left(\frac{k\rho_i \rho}{z_i}\right) \rho d\rho \quad (3)$$

利用  $e^{ix} \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n + j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n / \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$ ，在 (3) 式中对球差波像差作级数展开后再进行分部积分，可得高斯像面上仅有球差像点的光强分布为<sup>[6]</sup>：

零阶汉克尔变换的结果； $e^{jk[z_i - z_o + \rho_i^2/(2z_i)]}$  跟孔径  $\rho$  无关，对像点场没有调制作用， $e^{jkC_{040}\rho^4}$  跟  $\rho$  有关，对像点场有调制作用，球差产生于波像差系数  $C_{040}$  并跟衍射孔径  $\rho$  密切相关。

考察球差分析轴上物点在高斯像面的衍射斑。由 (3) 式可知，轴上物点经衍射孔圆周微元  $2\pi\rho d\rho$  产生菲涅耳衍射环状斑，其场分布为  $d\bar{E}(P_i) \cong [jA k \cos \delta / (z_o z_i)] e^{jk[z_i - z_o + \rho_i^2/(2z_i)]} e^{jkC_{040}\rho^4} J_0(k\rho_i \rho / z_i) \rho d\rho$ ，由于相位中  $kC_{040}\rho^4$  的存在，使得不同孔径  $\rho$  的圆周微元  $2\pi\rho d\rho$  产生中心在像面上主轴点  $P_i$  但半径不同的菲涅耳衍

射环状斑,整个衍射孔产生的所有菲涅耳衍射环状斑有交错也有重叠,在垂轴高斯像面形成总衍射斑。它不是衍射理论认为的理想像点爱里斑,是几何光学认为的弥散圆斑,被称为横向球差。如图 2 所示,图 2a 是几何光学对球差的分析示意图,图 2b 是用 (4) 式计算模拟的仅有球差系统的高斯像面上像点的衍射图样,是一系列同心亮暗圆环,与理想像点的爱里斑不同,光能分散到各衍射环上,暗环的光强也不一定为 0<sup>[5,7]</sup>。(3) 式和 (4) 式蕴含着的球差的衍射机理跟几何光学对球差的分析颇具一致性,是相吻合的,但衍射机理更为细致而精确。

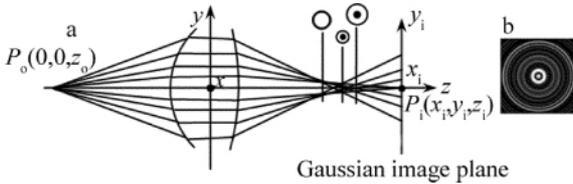


Fig. 2 a—spherical aberration of an axial object point on Gaussian image plane b—diffraction pattern of spherical aberration

### 2.2 高斯像面上球差的计算

对于贝塞尔函数,阶数越高,相邻零点的间距就越大,各级极大值将离开中心向外移动,由此不难看出,总衍射斑的大小主要取决于 (4) 式中最高阶的贝塞尔函数。若将阶数  $m$  的最大值记为  $M$ , (4) 式的  $J_{M+1}(kR\rho_i/z_i)/\rho_i$  决定高斯像面上横向球差的大小。(4) 式中贝塞尔函数最高阶数  $M=4N$  由级数展开式中的  $N$  值所决定,所以,确定  $N$  值就可以判断并进一步确定球差的大小及其详细情况。

以适当精度进行级数展开,如果要确定足够大  $N$  值,可用如下包含波像差系数  $C_{040}$  和衍射孔径  $\rho$  的级数展开式:

$$e^{jkC_{040}\rho^4} \cong \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (kC_{040}\rho^4)^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (kC_{040}\rho^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (5)$$

在利用 (5) 式确定足够大  $N$  值后,利用 (4) 式即可计算高斯像面上像点的光强分布,从而掌握球差的情况。也可以利用下式对高斯像面上球差的大小作粗略估算:

$$I_M(P_i) \cong \left[ \frac{A \cos \delta (4kC_{040})^{2N}}{z_o (2N)!} \right]^2 \times \left[ (P_{4N})^2 + \left( \frac{4kC_{040}\rho}{2N+1} P_{4N+2}^{4N} \right)^2 \right] \left[ \frac{1}{\rho_i} J_{4N+1} \left( \frac{k\rho\rho_i}{z_i} \right) \right]^2 \quad (6)$$

不难理解, (6) 式中  $[J_{4N+1}(k\rho\rho_i/z_i)/\rho_i]^2$  是决定高斯像面上球差大小的关键之所在。(5) 式从数学角度给出了某光波下,系统球差波像差系数  $C_{040}$  和衍射孔径  $\rho$  跟足够大  $N$  三者之间的相互关系。(4) 式给出高斯像

面上球差大小及其像点光强分布的定量计算,并体现着球差的衍射机理。(6) 式只对高斯像面上球差的大小作粗略估算而不宜作准确定量计算,对球差衍射机理表现得也不够完整。

### 2.3 高斯像面上球差的星点检测

星点检验法通常是通过考察一个点光源(星点)经过光学系统后,在高斯像面前后垂直于主光轴的不同横截面上所成衍射斑的光强分布,可定性地评定光学系统自身的像差和缺陷的影响,定性地评价光学系统的成像质量<sup>[8]</sup>。

由单色点光源的波长  $\lambda$ 、衍射孔径  $\rho$ 、系统焦距  $f$  以及物距  $z_o$  和像距  $z_i$ ,选取展开 (5) 式的  $N$  值,用 (4) 式通过计算机计算并绘出球差衍射斑图样,跟星点检测显微镜观测或光电探测到的光学系统的球差衍射斑进行比对,不仅可以定性评定与评价系统的球差,还可以在比对相一致之后确定  $N$  值,用 (5) 式计算球差波像差系数  $C_{040}$ ,实现球差的定量检测。限制衍射孔径  $\rho$  从  $0 \sim R$  取值,可以对任意圆孔径或环孔利用光阑进行实际检测和利用 (4) 式、(5) 式和 (6) 式进行计算模拟,将二者加以比对,这样可以对球差进行精细分析。研究表明,球差、彗差、畸变、像散和场曲以及色差等像差的星点检测法都是可以实现定量检测的<sup>[6-10]</sup>。

### 2.4 高斯像面上球差的校正

2.4.1 光学设计与加工中球差的校正 一方面由球差波像系数  $C_{040}$  和衍射孔径  $\rho$ ,用级数展开 (5) 式确定保持合适精度需要的足够大的  $N$  值,再用 (4) 式精细计算或用 (6) 式粗略计算高斯像面上球差衍射斑的大小,以判断是否符合光学工程的要求;另一方面,由衍射孔径  $\rho$  和允许的球差衍射斑用 (4) 式和 (5) 式优化设计,计算拟合出保持合适精度需要的足够大的  $N$  值和球差波像系数  $C_{040}$ ,可用于光学设计中对球差进行像差平衡与校正。

2.4.2 数码成像中球差的电子校正 虽然在系统设计与加工以及安装调试时都设法消除球差,但是实际上无法完全根除球差,只要达到波像差的瑞利判据要求就可以,此时仍然存在残余球差。用电荷耦合(或互补金属氧化物半导体)图像传感器等获取图像时,可以在球差检测已得到系统球差波像差系数  $C_{040}$  的基础上,对波长  $\lambda$ 、衍射孔径  $\rho$ 、系统焦距  $f$  的光学系统,在任意物距  $z_o$  和像距  $z_i$  情况下,利用 (4) 式计算,通过数字图像技术,对图像含有的球差进行实时在线的电子校正,并且可以对红绿蓝三原色光分别计算,使其完全重合于同一像点,从而消除色差<sup>[5]</sup>。

(下转第 412 页)

业务强度的增大,两种算法的业务阻塞率都有所总增加;对比两种算法来看,优先共享通路保护算法不仅在业务的阻塞率方面优于分段共享通路保护算法,而且在业务的资源预留比方面远远优于分段共享通路保护算法。因此,优先共享通路保护算法基本在不消耗保护资源的情况下,就可以使得更多业务的工作通路得到保护,同时在业务阻塞率方面有更大的优势。

从表2中可以看出,随着业务增加两种算法被拒绝业务数都增加,由于工作通路不满足约束条件而被拒绝的业务数两种算法相当,但由于保护通路不满足约束条件而被拒绝的业务数 PSPP 算法明显少于 SSPP 算法,因此 PSPP 算法被拒业务数要少些;两种算法的每段保护通路平均跳数都比较小,分别在 3.2 跳和 2.7 跳左右,PSPP 算法比 SSPP 算法略高一点,但是差别比较小对整体的业务恢复时间影响不大;从两种算法的保护通路共享度来看,PSPP 算法比 SSPP 算法明显大得多,也就是说 PSPP 算法能更好地实现资源共享。因此,所提出优先共享通路保护算法不仅提高保护资源的共享度,同时大大降低了业务工作通路被拒绝的概率。

#### 4 结论

首先分析了共享通路保护算法,由于分段方式和严格的 SRLG 约束使得网络业务的阻塞率比较高,在此基础上提出了优先共享通路保护算法。利用计算机进行了算法仿真,结果表明,PSPP 算法虽然在业务恢

复时间稍有增加,但是大大提高网络共享度的同时,降低了业务的被阻塞率,使得 WDM 光网络能够承载更多的业务。

#### 参考文献

- [1] GUAN A, SUN J. Impact of OXC architecture on the accumulation of intraband crosstalk in WDM optical networks[J]. *Laser Technology*, 2006, 30(6): 653-656( in Chinese).
- [2] GUO L, LI L. A novel survivable routing algorithm with partial shared-risk link groups (SRLG)-disjoint protection based on differentiated reliability constraints in WDM optical mesh networks[J]. *IEEE Journal of Lightwave Technology* 2007, 25(6): 1410-1415.
- [3] GUO L, CAO J, YU H, *et al.* Path-based routing provisioning with mixed shared protection in WDM mesh networks[J]. *IEEE Journal of Lightwave Technology* 2006, 24(3): 1129-1141.
- [4] SHAO X, BAI Y, CHENG X, *et al.* Best effort SRLG failure protection for optical WDM networks[J]. *IEEE Journal of Optical Communications and Networking* 2011, 3(8): 739-749.
- [5] PAPADIMITRIOU D, POPPE F, JONES J, *et al.* Inference of shared risk link group. internet draft [EB/OL]. [2001-02-01]. <http://www.watersprings.org/pub/id/draft-many-inference-srlg-00.txt>.
- [6] CAO J, GUO L, YU H F, *et al.* Dynamic segment shared protection algorithm for reliable wavelength-division-multiplexing mesh networks[J]. *Optics Express* 2005, 13(8): 3087-3095.
- [7] QU C, ZANG H, SINGHAL N K. Subpath protection for scalability and fast recovery in optical WDM mesh networks[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 2004, 22(9): 1859-1875.
- [8] HO P H, MOUFTAH H. A framework for service-guaranteed shared protection in WDM mesh networks[J]. *IEEE Communications Magazine* 2002, 40(2): 97-103.
- [9] ZHANG X N, LI L M, WANG S. *et al.* A novel hybrid survivable algorithm for single-link failure in WDM optical networks[J]. *Journal of Optoelectronics • Laser* 2008, 19(5): 604-609( in Chinese).

(上接第 407 页)

#### 3 结论

随着激光技术和微光学以及微光机电系统的迅速发展,受几何光学像差理论所限,迫切需要进一步发展像差的衍射理论,更好地改进光学系统的性能。依据基尔霍夫标量衍射理论推导了光学系统的高斯像面上仅有球差像点的光强分布解析计算式,分析探讨了高斯像面球差产生的衍射机理及其计算与校正,这有助于光学设计中的像差平衡与校正中和光学加工的像差检测与修正、对高斯像面上球差进行分析处理以及数码系统中对高斯像面上球差做电子校正等。

#### 参考文献

- [1] LIAO Y B. Introduction to optical imaging[M]. Beijing: Tsinghua University Press 2008: 1-149( in Chinese).
- [2] QIN H. Visualization application software development for calculating light aberrations[J]. *Laser Technology*, 2010, 34(3): 405-428( in

Chinese).

- [3] WANG Zh J. Practical optics technical manual[M]. Beijing: Mechanical Industry Press 2007: 242-259( in Chinese).
- [4] XIAO Z X. Optical engineering design[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry 2003: 1-38( in Chinese).
- [5] ZHANG Y M. Applied optics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry 2008: 212-262( in Chinese).
- [6] BORN M, WOLF E. Principles of optics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry 2005: 342-429( in Chinese).
- [7] CHANG Sh, SANG Zh W. Analysis and simulation of diffraction imaging[J]. *Journal of Shangrao Normal University*, 2008, 28(6): 24-29( in Chinese).
- [8] FAN Zh G. Photoelectric test technology[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004: 28-33( in Chinese).
- [9] CHANG Sh, WU B, MAO J J. Research on the diffraction mechanism and calculation of curvature of field without astigmatism[J]. *Semiconductor Optoelectronics* 2010, 31(5): 807-810( in Chinese).
- [10] XU A Ch, CHEN J B, ZHANG P M, *et al.* Ocular aberrations measurement method combined with subjective visual compensation[J]. *Laser Technology* 2010, 34(6): 774-777( in Chinese).