

文章编号: 1001-3806(2012)02-0194-04

## 基于全变分理论的红外图像去噪

卢兆林<sup>1</sup> 李闰龙<sup>2</sup> 李涛<sup>3</sup> 王震威<sup>4</sup> 韩春霞<sup>3</sup> 钱建生<sup>5\*</sup>

(1. 中国矿业大学 计算机科学与技术学院 徐州 221008; 2. 国投新集能源股份有限公司 淮南 232001; 3. 山东隆基机械股份有限公司 龙口 265700; 4. 中国矿业大学 现代分析与计算中心 徐州 221008; 5. 中国矿业大学 信息与电气工程学院 徐州 221008)

**摘要:** 为了去除红外图像中的噪声,提出了一种基于全变分理论的去噪算法。该方法继承了经典全变分模型在去除噪声中保护边缘的优点,结合图像平滑扩散原理,得到了一个全新的扩散函数;同时引入了一个边缘检测算子,对正则项和忠诚项的相关参量进行了改进,使得修复后的图像大大避免了阶梯效应;最后对该算法的实现进行了推导。结果表明,该算法能够有效地去除噪声,并且避免了阶梯效应的产生。

**关键词:** 图像处理;全变分;红外图像去噪;阶梯效应

中图分类号: TN911.73; TP391

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.02.012

## Infrared image denoising based on total variation theory

LU Zhao-lin<sup>1</sup>, LI Run-long<sup>2</sup>, LI Tao<sup>3</sup>, WANG Zhen-wei<sup>4</sup>, HAN Chun-xia<sup>3</sup>, QIAN Jian-sheng<sup>5</sup>

(1. School of Computer Science and Technology, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China; 2. State Development & Investment Corp., Huainan 232001, China; 3. Shandong Longji Machinery Co., Ltd, Longkou 265700, China; 4. Advanced Analysis & Computation Center, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China; 5. School of Information and Electrical Engineering, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China)

**Abstract:** In order to remove the noise of infrared images, an image denoising method based on total variation was proposed, which inherits the advantage of edge preserving of the total variation (TV) model. A novel diffusion function was derived from the theory of smooth diffusion. Simultaneously, an edge detector operator was introduced to improve the related parameters of regularization term and fidelity term, which makes the denoised image avoid the staircase effect to a great extent. Finally, the implement of the algorithm was derived and the experimental results demonstrated the superior performance of the modified denoising algorithm.

**Key words:** image processing; total variation; infrared image denoising; staircase effect

### 引言

红外图像普遍存在边缘模糊、低信噪比等特点,传统的去噪算法存在边缘保持性差、阶梯效应等缺点。近些年来,基于变分<sup>[1-10]</sup>、偏微分方程 (partial differential equation, PDE)<sup>[11-12]</sup>的方法和小波去噪方法<sup>[13]</sup>广泛用于图像去噪中,其中比较经典的基于变分理论的方法为全变分模型 (total variation, TV)<sup>[1]</sup>。

TV模型基于有界全变分函数空间,该函数空间的不连续性对应了图像中物体的边缘,所以在图像去噪过程中,TV模型能够保护图像的边缘不被模糊,尽管TV模型在去除噪声的同时能够保护边缘的清晰,但是图像强度的缓变区域形成了较强的梯度效应。对此人们提出了很多改进的TV模型用于图像去噪,比如对TV模型中的忠诚项进行了改进<sup>[3,5]</sup>; GILBOA等人<sup>[6]</sup>引入了一个空间变换项,以保护去噪图像中的纹理部分;LI等人<sup>[7]</sup>提出将TV模型和四阶PDE模型相结合用于去噪以减少阶梯效应,但运算量较大、耗时较长。

基于参考文献[9]和参考文献[11]的启发,首先基于图像平滑扩散原理,得到了一个全新的扩散函数,并且通过修改正则项的指数和忠诚项的权重参量,使得本去噪模型能够根据图像的特征自适应地去除噪声,避免产生阶梯效应。

基金项目: 国家八六三高技术研究发展计划资助项目 (2008AA062200); 江苏省科技成果转化专项资金资助项目 (BA2010058)

作者简介: 卢兆林 (1981-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为图像处理。

\* 通讯联系人。E-mail: qianjsh@cumt.edu.cn

收稿日期: 2011-08-08; 收到修改稿日期: 2011-09-08

### 1 去噪模型

TV 去噪过程可以表示为求解以下能量泛函的最小值过程:

$$J(u) = \int_{\Omega} [|\nabla u| + \frac{1}{2}\lambda(u - u_0)^2] dx dy \quad (1)$$

式中,  $\Omega$  表示图像区域,  $u_0$  为受噪声污染的图像,  $u$  为去噪后的图像;  $\int_{\Omega} |\nabla u|$  为 TV 模型的正则项, 它的作用是去除图像噪声;  $\int_{\Omega} (u - u_0)^2$  为忠诚项, 忠诚项系数  $\lambda > 0$ , 为忠诚项的权重参量, 它们保证了原图像与去除噪声后图像的相似度。(1) 式对应的最陡下降方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda(u_0 - u) \quad (2)$$

式中,  $\nabla \cdot$  表示散度算子,  $|\nabla u|$  为图像的梯度模值, 为便于分析本去噪模型, 基于参考文献 [14], 将 (2) 式修改为一般形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[ \frac{r(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda(u_0 - u) \quad (3)$$

(3) 式为扩散方程在笛卡尔坐标系的表现形式, 其中  $r(|\nabla u|)$  为本去噪模型的扩散方程  $r(|\nabla u|)$  的一阶导数, 对 (3) 式中的正则项进行正交分解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{r'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + r''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \quad (4)$$

式中,  $u_{\xi\xi}$  为图像沿其梯度方向的 2 阶导数,  $u_{\eta\eta}$  为图像垂直于梯度方向的 2 阶导数。

#### 1.1 扩散函数形式

红外图像具有不同的特征区域, 比如物体边缘、图像灰度平坦区域以及灰度渐变区域。由于 TV 模型在灰度渐变区域易造成阶梯效应, 根据图像平滑扩散以满足人眼视觉的原理, 根据图像的不同区域对扩散函数进行了分析。

(1) 在图像平坦区域和渐变区域,  $|\nabla u|$  比较小, 此时扩散方向倾向于各向同性, 即:

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow 0^+} \frac{r'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = \lim_{|\nabla u| \rightarrow 0^+} r''(|\nabla u|) > 0 \quad (5)$$

(2) 对于图像中的边缘,  $|\nabla u|$  比较大, 此时扩散方向应主要为梯度方向, 即:

$$\lim_{|\nabla u| \rightarrow +\infty} \frac{r'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} > 0, \lim_{|\nabla u| \rightarrow +\infty} r''(|\nabla u|) = 0 \quad (6)$$

很明显 (6) 式中的两个条件是矛盾的, 所以作者提出了一个折中的方法, 当  $|\nabla u| \rightarrow +\infty$  时, (4) 式中两个方向的扩散系数都趋于 0, 但是沿梯度方向衰减得更快:

$$\begin{cases} \lim_{|\nabla u| \rightarrow +\infty} \frac{r'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = \lim_{|\nabla u| \rightarrow +\infty} r''(|\nabla u|) = 0 \\ \lim_{|\nabla u| \rightarrow +\infty} \frac{r''(|\nabla u|)}{r'(|\nabla u|)/|\nabla u|} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

有很多方程能够同时满足 (5) 式和 (6) 式的条件, 在本文中选用下式为扩散函数:

$$r(|\nabla u|) = (a^2 + |\nabla u|^2)^{p/2} \quad (a > 0, 2 \geq p \geq 1) \quad (8)$$

式中,  $p$  的取值范围具有很重要的意义。当  $a = 0, p = 1$ , 扩散方程  $r(|\nabla u|) = |\nabla u|$ , (3) 式变为 TV 模型,

同时 (4) 式变为  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{\xi\xi}}{|\nabla u|}$ , 这样完美解释了 TV 模型能够保护边缘但易产生阶梯效应的原因。当  $a = 0, p = 2$ , (3) 式变为  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ , 这是经典的各向同性的热扩散方程,  $\Delta$  为拉普拉斯算子, 该方程用于图像去噪时, 会造成图像边缘模糊, 但是可以避免阶梯效应。

#### 1.2 相关参量设定

通过以上的分析, 可以看出  $p$  对模型的去噪性能具有很大的影响,  $p$  越大, 图像越平滑;  $p$  越小, 图像阶梯效应越强。 $p$  的取值取决于图像的区域特征, 这里选用了差分曲率作为图像边缘检测算子, 其具体形式为:

$$d = ||u_{\xi\xi}| - |u_{\eta\eta}|| \quad (9)$$

式中,  $u_{\xi\xi} = (u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2) / |\nabla u|^2$ ,  $u_{\eta\eta} = (u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2) / |\nabla u|^2$ 。

(1) 在图像边缘,  $u_{\eta\eta}$  较大,  $u_{\xi\xi}$  较小, 但  $d$  较大; (2) 在图像平坦区域和缓变区域,  $u_{\eta\eta}$  和  $u_{\xi\xi}$  都比较小, 所以  $d$  也较小; (3) 对于噪声来说,  $u_{\eta\eta}$  和  $u_{\xi\xi}$  都比较大, 所以  $d$  较小。

这样图像的边缘就被区别出来了, 将差分曲率算子引入本模型的正则项中得到:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [p(a^2 + |\nabla u|^2)^{p/2-1} \nabla u] \quad (10)$$

式中,  $p = 2 - \sqrt{d} / \bar{d}$  为归一化的差分曲率算子。对于忠诚项的系数  $\lambda$ , 其大小决定了去噪的程度。 $\lambda$  越小, 模型去噪能力越强, 反之, 模型去噪能力越弱。这里可以认为: (1) 对于图像边缘, 去噪能力应该较弱, 尽可能保护边缘; (2) 对于图像平滑和缓变区域, 去噪能力应较强, 以尽可能去除噪声。

综上所述, 令  $\lambda = \bar{d}$ 。所以最终得到去噪模型为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [p(a^2 + |\nabla u|^2)^{p/2-1} \nabla u] + (2 - p)(u_0 - u) \quad (11)$$

### 2 算法实现

本算法采用了半点差分格式来求解 (3) 式。所谓

半点差分格式方法,是考虑八邻域的梯度求解算法,即考虑待修复像素邻域 8 个方向上的信息。

如图 1 所示,待去噪像素点为  $O$ ,考虑  $O$  点的  $3 \times 3$  邻域:  $E, N, W, S$  为  $O$  的 4 个邻域点,记为  $\Lambda_0 = \{E, N, W, S\}$ ,  $\Lambda_0' = \{e, n, w, s\}$  半像素邻域点。

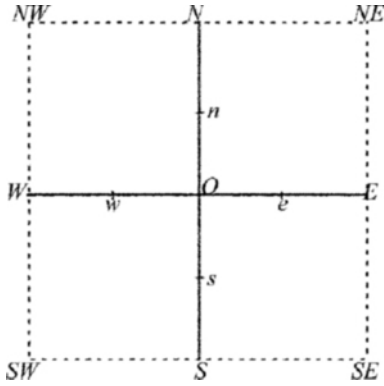


Fig. 1 Neighborhood of pixel containing noise

令  $\varphi(|\nabla u|) = \frac{r(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$ , 则  $v = (v^1, v^2) = \varphi(s) \nabla u$  其散度表达式通过中心差分方法数值化,得:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \approx \frac{v_e^1 - v_w^1}{h} + \frac{v_n^2 - v_s^2}{h} \quad (12)$$

式中  $h$  为步长,一般在图像处理中  $h = 1$ 。进一步计算半像素点的梯度值,得:

$$v_e^1 = \varphi(|\nabla u|_e) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \approx \varphi(|\nabla u|_e) \frac{u_E - u_O}{h} \quad (13)$$

其中:

$$\varphi(|\nabla u|_e) = p(1 + |\nabla u|_e^2)^{p(d)/2-1} \quad (14)$$

$$|\nabla u|_e = \frac{1}{h} \times$$

$$\sqrt{(u_E - u_O)^2 + \left[ \frac{(u_{SE} + u_{NW}) - (u_{SW} + u_{NE})}{2} \right]^2} \quad (15)$$

$$p = 2 - \sqrt{d} \lambda = \frac{d}{d_{\max}} \quad (16)$$

$$d = ||u_{\eta\eta}| - |u_{\xi\xi}|| \quad (17)$$

同理计算其它半像素点的梯度值  $v_w^1, v_n^2, v_s^2$ , 代入(3)式得:

$$u_O = \frac{\sum_{\substack{m \in \Lambda_0' \\ n \in \Lambda_0}} \varphi(|\nabla u|_m)}{\sum_{\substack{m \in \Lambda_0' \\ n \in \Lambda_0}} \varphi(|\nabla u|_m) + \lambda_m(O)} u_j + \frac{\lambda_m(O)}{\sum_{\substack{m \in \Lambda_0' \\ n \in \Lambda_0}} \varphi(|\nabla u|_m) + \lambda_m(O)} u_O^0 \quad (18)$$

式中,  $\varphi(|\nabla u|_m)$  表示  $\varphi(|\nabla u|_e), \varphi(|\nabla u|_n), \varphi(|\nabla u|_w), \varphi(|\nabla u|_s)$  等 4 个半像素点  $\Lambda_0' = \{e, n, w, s\}$  对

应的扩散系数  $\mu_n$  代表  $\Lambda_0 = \{E, N, W, S\}$  4 个像素点灰度值。

令  $\omega_m = \varphi(|\nabla u|_m), h_{Om} = \omega_m / [\sum_{m \in \Lambda_0'} \omega_m + \lambda_m(O)], h_{OO} = \lambda_m(O) / [\sum_{m \in \Lambda_0'} \omega_m + \lambda_m(O)]$  代入(18)式化简得:

$$u_O = \sum_{j \in \Lambda_0} h_{Om} u_j + h_{OO} u_O^0 \quad (19)$$

使用 Gaussian-Jacobi 迭代算法,则图像  $u$  可以由下式求得:

$$u_O^{(n)} = \sum_{j \in \Lambda_0} h_{Om}^{(n-1)} u_j^{(n-1)} + h_{OO}^{(n-1)} u_O^{(n-1)} \quad (20)$$

根据(20)式对图像中的像素点进行迭代,直到新旧图像的变化小于阈值即可,以当前得到的图像作为最终的去噪结果。

### 3 实验结果及分析

用 MATLAB R2008a 对本算法及其它算法进行比较,运行平台为 Intel core 7500 2.93G 2G RAM。本文中比较了经典的 TV 算法<sup>[4]</sup>、P-harmonic 算法<sup>[8]</sup>以及 Corina 算法<sup>[9]</sup>。除了用主观视觉来比较去噪结果,还采用了信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)来作为客观衡量标准。信噪比定义为:

$$R_{SNR} = 10 \lg \left( \frac{\sum_{i,j} [u(i,j) - \bar{u}(i,j)]^2}{\sum_{i,j} [u(i,j) - \hat{u}(i,j)]^2} \right) \quad (21)$$

式中  $u(i,j)$  表示原图像,  $\bar{u}(i,j)$  为原图像的平均值,  $\hat{u}(i,j)$  为去噪后的图像。作者采用的测试图片为一幅大小为  $256 \times 256$  的红外图像,为了定量地表示本算法的去噪能力,人为地向图像中加入了高斯白噪声。

图 2 为几种去噪方法的比较,图 2a 为原始图;图 2b 为被标准差  $\sigma = 20$  的高斯噪声污染的图像,其  $R_{SNR} = 11.51$  dB;图 2c 为 TV 算法的去噪图像,  $R_{SNR} = 16.97$ , 耗时 11s;图 2d 为 P-harmonic 算法去噪结果,  $R_{SNR} = 17.88$ , 耗时 4s;图 2e 为 Corina 算法去噪结果,  $R_{SNR} = 13.75$ , 耗时 3s;图 2f 为本文中提出的算法去噪结果,  $R_{SNR} = 18.37$ , 耗时 4s。图 3 为图 2a 中白框标识区域的放大图像对比,图 3c 显示的 TV 去噪图像中具有很强的阶梯效应;图 3d 为 P-harmonic 算法去噪图像,由于采用了固定值作为正则项的指数,所以结果中任然存在阶梯效应;图 3e 虽然收敛时间很快,但修复效果很差,这也说明扩散函数对于去噪效果影响很大。本文中算法的结果在画质、信噪比以及收敛时间相比于其它算法都有了一定的改进。

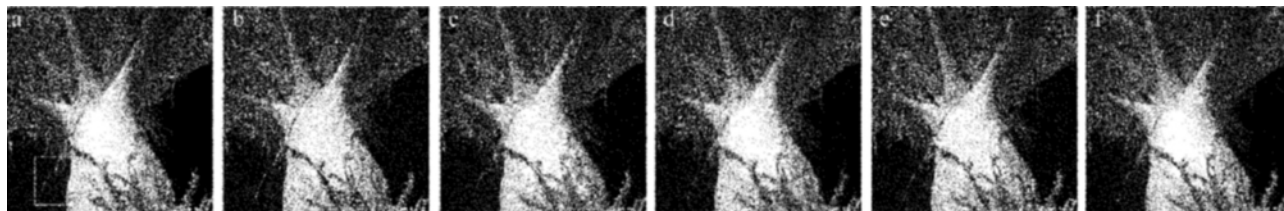


Fig. 2 Comparison of denoised result

a—original image b—noisy image c—result of TV model d—result of P-harmonic model e—result of Corina model f—the result of our model

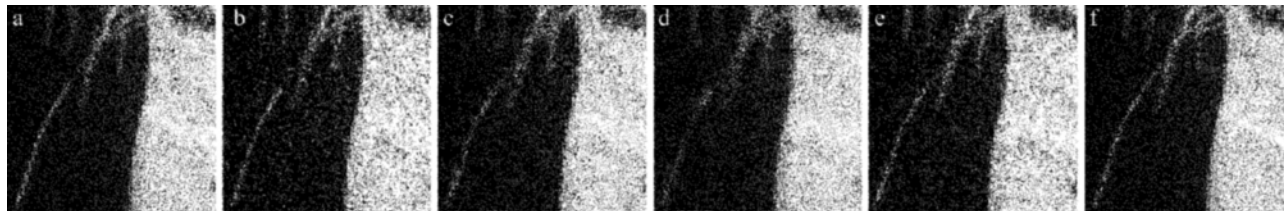


Fig. 3 Comparison of fine structure of the denoised result

a—original image b—noisy image c—result of TV model d—result of P-harmonic model e—result of Corina model f—the result of our model

## 4 结论

在经典的全变分去噪模型基础上,针对图像特征对扩散函数以及正则项和忠诚项的相关参量进行了改进,得到了一个全新的去噪模型。由去噪效果的对比实验可以看出,本文中的算法无论在画质还是信噪比以及收敛时间上都较其它对比的算法有了一定提高。

但是从本文中算法的修复结果也可以看出,该算法对图像的纹理部分去噪效果不是太理想,下一步的工作是在算法中引入一个鲁棒的纹理检测算子,使本算法对纹理图像去噪也有更好的效果。

### 参考文献

- [1] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica* 1992, D60(1/4): 259-268.
- [2] OSHER S, BURGER M, GOLDFARB D, *et al.* An iterative regularization method for total variation based on image restoration[J]. *Multi-scale Modeling and Simulation* 2005, 4(2): 460-489.
- [3] NIKOLOVA M. Minimizers of cost-functions involving nonsmooth data-fidelity terms[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Numerical Analysis* 2002, 40(3): 965-994.
- [4] CHAN T, ESEDOGLU S, PARK F, *et al.* Recent developments in total variation image restoration [C]//*Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*. New York: Springer, 2004: 1-10.
- [5] CHAN T, ESEDOGLU S. Aspects of total variation regularized  $L^1$  function approximation[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Applied Mathematics* 2005, 65(5): 1817-1837.
- [6] GILBOA G, SOCHEN N, ZEEVI Y Y. Variational denoising of partly textured images by spatially varying constraints[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(8): 2281-2289.
- [7] LI F, SHEN C M, FAN J S, *et al.* Image restoration combining a total variational filter and a fourth-order filter[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 2007, 18(4): 322-330.
- [8] LYSAKER M, TAI X C. Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional[J]. *International Journal of Computer Vision* 2006, 66(1): 5-18.
- [9] ZHANG H Y, WU B, PENG Q C, *et al.* Digital image inpainting based on p-harmonic energy minimization[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2007, 3(4): 525-530.
- [10] DRAPARA C S. A nonlinear total variation-based denoising method with regularization parameters[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2009, 56(3): 582-286.
- [11] CHEN Q, MONTESINOS P, SUN Q S, *et al.* Ramp preserving perona-malik model[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(6): 1963-1975.
- [12] BARBU T, BARBU V, BIGA V, *et al.* A PDE variational approach to image denoising and restoration[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(3): 1351-1361.
- [13] WAN J, ZHANG X H, RAO J H. Application of wavelet threshold denoising in the scattering optical wake flow signal processing[J]. *Laser Technology*, 2011, 35(4): 468-471 (in Chinese).
- [14] LU Zh L, QIAN J Sh, LI L D. Image inpainting based on adaptive total variation model[J]. *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2011, E94-A(7): 1608-1612.

### (上接第193页)

- [5] CANAT G, JETSCHKE S, UNGER S, *et al.* Multifilament-core fibers for high energy pulse amplification at 1.5  $\mu\text{m}$  with excellent beam quality[J]. *Optics Letters*, 2008, 33(22): 2701-2703.
- [6] PAYNE D N, JEONG Y, NILSSON J, *et al.* Kilowatt-class single-frequency fiber sources[J]. *Proceedings of SPIE*, 2005, 5709: 133-141.
- [7] SMITH R G. Optical power handling capacity of low loss optical fibres as determined by stimulated Raman and Brillouin scattering[J]. *Applied Optics*, 1972, 11(11): 2489-2494.
- [8] HE X K, HOU H, FENG L T, *et al.* Experimental study of 1550nm single frequency pulsed fiber laser amplifiers[J]. *Laser Technology*, 2011, 35(2): 145-147 (in Chinese).
- [9] KULCSAR G, JAOUËN Y, CANAT G, *et al.* Multiple-Stokes stimulated Brillouin scattering generation in pulsed high-power double-cladding  $\text{Er}^{3+}$ - $\text{Yb}^{3+}$  codoped fiber amplifier[J]. *Photonics Technology Letters*, 2003, 15(6): 801-803.
- [10] PANNELL C N, RUSSELL P St J, NEWSON T P. Stimulated Brillouin scattering in optical fibers: the effects of optical amplification[J]. *Journal of the Optical Society of America* 1993, 10(4): 684-690.