

文章编号: 1001-3806(2012)01-0050-04

一种新的 gyrator 变换的快速算法

林睿¹, 刘启能¹, 张翠玲^{1,2}

(1. 重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067; 2. 重庆大学 物理学院 重庆 400030)

摘要: 为了研究 gyrator 变换在光学信息处理中的应用, 提出了一种采用两次快速傅里叶变换实现快速计算 gyrator 变换的新算法。在量纲归一化条件下, 研究了 gyrator 变换离散化过程, 获得了空域、傅里叶变换域和 gyrator 变换域的采样间隔, 形成了一种能避免尺度变换的算法。采用该算法进行了数值模拟实验, 实验结果与相关文献中报道的计算结果一致。结果表明, 该算法可以应用于 gyrator 变换的研究中。

关键词: 信息光学; 数值算法; 快速傅里叶变换; gyrator 变换; 量纲归一化

中图分类号: O438 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2012.01.014

A new fast algorithm for gyrator transform

LIN Rui¹, LIU Qi-neng¹, ZHANG Cui-ling^{1,2}

(1. School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China; 2. School of Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: In order to study the application of gyrator transform in optical information processing, a new fast algorithm for calculating gyrator transform was proposed based on twice fast Fourier transform algorithm. Under the condition of dimensional normalization, the discretization of the gyrator transform was studied and the sampling intervals were obtained in space domain, Fourier transform domain and gyrator transform domain respectively. Thus, this new algorithm could avoid scale transform. Some numerical simulation experiments were carried out based on the algorithm and the simulation results were consistent with those reported in the corresponding references. This algorithm can be applied to study gyrator transform.

Key words: information optics; numerical algorithm; fast Fourier transform; gyrator transform; dimensional normalization

引言

1993年, LOHMANN把分数傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRFT)引入光学信息处理领域, 他用 Wigner 分布函数的旋转定义了 FRFT^[1], 表明 FRFT 是 Wigner 分布函数在相空间旋转的结果。同 FRFT 一样能实现相空间旋转的还有近年来才出现的 gyrator 变换(gyrator transform, GT), 它是人们在研究 1 阶光学系统相空间理论中逐渐发展起来一种新的线性正则变换。2007年由 RODRIGO 和 ALIEVA 等人正式提出其定义式并命名为 gyrator 变换, 并给出了 GT 的光学实现形式^[2-4]。GT 从其产生开始就被应用于图像处理和光学信息安全中^[4-8]。作为一种全新的变换, GT 的研

究还有待于进一步深入。

应用 gyrator 变换进行研究最有力的手段是 GT 的数值算法。现在已有文献报道的快速算法有两种。一种算法是基于分解型的空域直接离散化的方法^[9], 需要进行尺度变换, 计算较为复杂, 且对于离散化过程中的采样间隔没有明确的讨论; 另一种算法是基于卷积的快速算法^[10], 虽然避免了尺度变换, 但同样没有详细讨论离散化过程中的采样间隔, 而只是将各个域的采样间隔取为离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)所要求的采样间隔, 导致其圆域函数的数值算例与参考文献[2]中提供的相应算例相差较大。作者在量纲归一化^[11]的条件下, 深入研究了 gyrator 变换数值计算中所涉及到的各个离散化过程的采样间隔, 并形成了在空域、傅里叶变换(Fourier transform, FT)域和 GT 域同时离散化, 避免尺度变换而仅进行两次快速傅里叶变换的新算法。

1 gyrator 变换的快速算法

函数 $f(x, y)$ 的 gyrator 变换的数学形式定义^[2-4]如下:

基金项目: 重庆市教委科技研究项目基金资助项目 (KJ100717)

作者简介: 林睿(1972-), 男, 讲师, 主要从事光学图像处理方面的研究。

E-mail: linrui@ctbu.edu.cn

收稿日期: 2011-04-06; 收到修改稿日期: 2011-06-14

$$F(u, v) = G^\alpha\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) K_\alpha(u, v; x, y) dx dy \quad (1)$$

$$K_\alpha(u, v; x, y) = \frac{1}{\sin\alpha} \exp\{j2\pi \times [(uv + xy) \cot\alpha - (xu + yv) \csc\alpha]\} \quad (2)$$

式中, $G^\alpha\{\}$ 表示旋转角度为 α 的 GT, $K_\alpha(u, v; x, y)$ 为变换核。当 $\alpha=0$ 时, $G^\alpha\{\}$ 为恒等变换; 当 $\alpha=\pi/2$ 时, $G^\alpha\{\}$ 退化为坐标系旋转了 $\pi/2$ 的傅里叶变换。GT 具有变换角度的可加性且变换角度以 2π 为周期^[2,9], 可以通过角度为 $-\alpha$ 的 GT 变换来实现相应的逆变换^[2]。

为了进行数值计算, 首先要确定 GT 域变量 (u, v) 的采样间隔和空域变量 (x, y) 的采样间隔之间的关系。将(2)式改写为:

$$K_\alpha(u, v; x, y) = \frac{1}{\sin\alpha} \exp[j2\pi uv \cot\alpha] \times \exp[j2\pi xy \cot\alpha] \exp[-j2\pi(xu + yv) \csc\alpha] \quad (3)$$

代入(1)式, 并将非积分变量移出积分号外, 可得:

$$F(u, v) = \frac{1}{\sin\alpha} \exp[j2\pi uv \cot\alpha] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[j2\pi xy \cot\alpha] \times \exp[-j2\pi(xu + yv) \csc\alpha] dx dy = \frac{1}{\sin\alpha} \times \exp[j2\pi uv \cot\alpha] \mathcal{F}\{f(x, y)\}_{(u', v')} \quad (4)$$

式中, $\mathcal{F}\{\}$ 表示 FT, (u', v') 为相应的 FT 域的频率, 且:

$$u' = u/\sin\alpha \quad v' = v/\sin\alpha \quad (5)$$

按照(4)式进行离散化时, $\mathcal{F}\{\}$ 可以用快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)计算。设空域采样间隔为 Δx 和 Δy , 则按照 DFT 计算的原理, 在 FT 域中的频率采样间隔 $\Delta u'$ 和 $\Delta v'$ 应该满足:

$$\Delta u' = 1/(M\Delta x) \quad \Delta v' = 1/(N\Delta y) \quad (6)$$

式中, M 和 N 分别为沿 x 轴和 y 轴的采样点数。在保证采样间隔为非负数的情况下, 由(5)式和(6)式可得到 GT 域的采样间隔与空域的采样间隔的关系为:

$$\Delta u \Delta x = \sin\alpha / M \quad \Delta v \Delta y = \sin\alpha / N \quad (7)$$

式中, Δu 和 Δv 为 GT 域的采样间隔。

从(7)式可以知道, GT 域和空域的坐标系统的量纲互为倒数, 并且信号在两者中的尺度不一致, 这使得 GT 变换的离散化处理较为困难, 因而有必要将 GT 域和空域的坐标系统转化为无量纲的坐标系统, 且必须统一 GT 域和空域的信号尺度。参考文献[11]中对 GT 域坐标和空域坐标的量纲进行归一化操作, 可以得到量纲归一化且尺度统一的采样间隔

分别为:

$$\Delta u = \Delta x = \frac{\sin\alpha}{M} \quad \Delta v = \Delta y = \frac{\sin\alpha}{N} \quad (8)$$

然而即使在量纲归一化的条件下, 计算(4)式时, 仍然需要进行尺度因子为 $\sin\alpha$ 的尺度变换, 这使得计算变复杂。为避免尺度变换, 需要对(3)式中的相位因子 $\exp[-j2\pi(xu + yv) \csc\alpha]$ 进行改造:

$$\exp[-j2\pi(xu + yv) \csc\alpha] = \exp\{-j\pi \times [u^2 + x^2 + v^2 + y^2 - (u-x)^2 - (v-y)^2] \csc\alpha\} \quad (9)$$

将上式代入(4)式并整理得到:

$$K_\alpha(u, v; x, y) = \frac{1}{\sin\alpha} \exp\{j\pi [2uv \cot\alpha - (u^2 + v^2) \csc\alpha]\} \exp\{j\pi [2xy \cot\alpha - (x^2 + y^2) \csc\alpha]\} \times \exp\{j\pi [(u-x)^2 + (v-y)^2] \csc\alpha\} \quad (10)$$

将(10)式代入(1)式, 整理并令:

$$p(x, y) = f(x, y) \exp\{j\pi [2xy \cot\alpha - (x^2 + y^2) \csc\alpha]\} \quad (11)$$

$$q(u, v) = \exp\{j\pi [2uv \cot\alpha - (u^2 + v^2) \csc\alpha]\} \quad (12)$$

$$h(u-x, v-y) = \exp\{j\pi [(u-x)^2 + (v-y)^2] \csc\alpha\} \quad (13)$$

则(1)式变为:

$$F(u, v) = \frac{1}{\sin\alpha} q(u, v) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) h(u-x, v-y) dx dy = \frac{1}{\sin\alpha} q(u, v) [p(u, v) \otimes h(u, v)] \quad (14)$$

符号 \otimes 表示卷积运算。由于采用了量纲归一化条件, GT 域的坐标系统与空域的坐标系统是等价的。为了能够应用 FFT 算法, 将上式中的卷积部分改写如下:

$$p(u, v) \otimes h(u, v) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{p(x, y)\}_{(\xi, \eta)} \times \mathcal{F}\{h(x, y)\}_{(\xi, \eta)}\right\}_{(u=x, v=y)} \quad (15)$$

式中, $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ 表示逆 FT, (ξ, η) 是 FT 域的坐标, 经过(15)式的两次傅里叶变换后, 卷积运算结果的坐标系统即为 GT 域的坐标系统, 这样才能与 $q(u, v)$ 相乘。(15)式中 $\mathcal{F}\{h(x, y)\}$ 可作如下计算:

$$\mathcal{F}\{h(x, y)\} = \mathcal{F}\{\exp[j\pi(x^2 + y^2) \csc\alpha]\} = \frac{1}{\sin\alpha} \exp[-j\pi(\xi^2 + \eta^2) \sin\alpha] \quad (16)$$

$$\text{令: } T(\xi, \eta) = \frac{1}{\sin\alpha} \exp[-j\pi(\xi^2 + \eta^2) \sin\alpha] \quad (17)$$

根据(14)式~(17)式, (1)式变为:

$$F(u, v) = \frac{1}{\sin\alpha} q(u, v) \times \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{p(x, y)\}_{(\xi, \eta)} \cdot T(\xi, \eta)\right\}_{(u=x, v=y)} \quad (18)$$

按照(18)式进行离散化时, FT 域的采样间隔 $\Delta\xi$ 和

$\Delta\eta$ 应满足:

$$\begin{cases} \Delta\xi = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{M \sin\alpha} \\ \Delta\eta = \frac{1}{N\Delta y} = \frac{1}{N \sin\alpha} \end{cases} \quad (19)$$

这样根据(8)式、(18)式和(19)式,GT的数值计算的快速算法可归结为如下的步骤。

(1) 依据(8)式和(19)式分别计算离散化的坐标:

$$x(k) = u(k) = k \frac{\sin\alpha}{M}, \quad y(l) = v(l) = l \frac{\sin\alpha}{N},$$

$$\xi(m) = \frac{m}{M \sin\alpha}, \quad \eta(n) = \frac{n}{N \sin\alpha}, \quad \text{其中 } M \text{ 和 } N$$

为奇数时 k 和 m 取值为 $-(M-1)/2, \dots, 0, \dots, (M-1)/2$; l 和 n 取值为 $-(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2$; M 和 N 为偶数时 k 和 m 取值为 $-M/2, \dots, 0, \dots, M/2-1$; l 和 n 取值为 $-N/2, \dots, 0, \dots, N/2-1$ 。

(2) 依据(11)式、(12)式和(17)式以及离散化的坐标,分别计算 $p(x, y)$ 、 $q(u, v)$ 和 $T(\xi, \eta)$ 的离散化形式 $p(k, l)$ 、 $q(k, l)$ 和 $T(m, n)$ 。

(3) 利用 FFT 算法计算(18)式: $\frac{1}{\sin\alpha} q(k, l) \cdot \text{IFFT}[\text{FFT}[p(k, l)] \cdot T(m, n)]$ 。其中,IFFT(inverse fast Fourier transform)是逆快速傅里叶变换。

因而,本算法只需要执行两次 FFT 算法。

2 gyator 变换快速算法的算例

按照参考文献[2]和参考文献[4]中提供的 GT 数值计算的算例,应用本文中的算法进行计算机编程,对其中两个典型的算例实现了仿真实验。

2.1 实现厄米-高斯模向拉盖尔-高斯模的变换

1992年 ALLEN 等人首先在实验中证实了拉盖尔-高斯模(LG_{p,l})具有螺旋相位结构^[12],它有显著的每光子的轨道角动量。人们一般采用光束变换的方法由厄米-高斯模(HG_{m,n})产生具有轨道角动量的 LG_{p,l}模。GT 的数学实现形式^[3]是由3个广义柱透镜级联形成的光学系统,该系统具有模式转换的功能,这样,GT 为产生和研究 LG_{p,l}模提供了一种有力的理论工具。

为模拟 HG_{m,n}模变换为 LG_{p,l}模过程,需确定 HG_{m,n}模的相关参量。设波长为 λ 且具有 HG_{m,n}模的光束波前复振幅:

$$E_{m,n}(x, y, z) = C_{m,n} H_m \left[\sqrt{\frac{2}{w(z)}} x \right] H_n \left[\sqrt{\frac{2}{w(z)}} y \right] \times$$

$$\exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ -j \left[kz + \varphi(z) + \frac{k}{2R(z)} (x^2 + y^2) \right] \right\} \quad (20)$$

式中 $w(z) = w_0 \sqrt{1 + [2z/(kw_0^2)]^2}$, $R(z) = z \{ 1 + [2z/(kw_0^2)]^2 \}^{-1}$, $\varphi(z) = (1 + m + n) \arctan [2z/(kw_0^2)]$, $k = 2\pi/\lambda$, w_0 为基模高斯光束的束腰半径, $C_{m,n}$ 是一个与 m 和 n 无关的常量, $z=0$ 为光腰所在平面, H 为厄米特多项式。设记录平面大小为 $20.48\text{mm} \times 20.48\text{mm}$, 采样点数为 $N_x = N_y = 1024$, 对于 $\lambda = 632.8\text{nm}$ 的 HG_{1,0}模的光束, $w_0 = 0.23\text{mm}$, 传输距离 $z = 300\text{mm}$ 。据此将(20)式进行离散化,并用本文中提出的 GT 数值算法对离散化后的 HG_{1,0}模分别施行角度为 $0, \pi/8, 3\pi/16, \pi/4, 5\pi/16, 3\pi/8$ 和 $\pi/2$ 的 GT, 各个结果的相位和归一化的强度如图1所示(显示计算结果的中央半径为56个点的圆形区域)。从图1中可以看到,通过 GT, HG_{1,0}模逐渐变换为 LG_{0,1}模的过程:图1a为 HG_{1,0}模自身,其相位图反映出球面波的相位结构;图1d是 HG_{1,0}模经过角度为 $\pi/4$ 的 GT 后得到 LG_{0,1}模,具有与参考文献[2]和参考文献[13]中的 LG_{0,1}模相同的强度分布形状,其相位分布如参考文献[2]和参考文献[12]中指出的那样为螺旋型相位结构;图1g是 HG_{1,0}模经过角度为 $\pi/2$ 的 GT 后得到的 LG_{0,1}模,其相位结构是明显的球面波的相位结构。图2显示了图1d的螺旋型相位分布的3维结构。参考文献[2]和参考文献[13]中指出, HG_{1,0}模经过角度为 $\pi/4$ 的 GT 后成为 LG_{0,1}模,本文中所提算法的计算结果与之吻合。

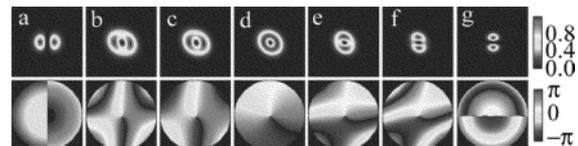


Fig. 1 GT result of HG_{1,0} mode at different angles (the upper row is intensity map, the lower row is phase map)
a— $\alpha=0$ b— $\alpha=\pi/8$ c— $\alpha=3\pi/16$ d— $\alpha=\pi/4$ e— $\alpha=5\pi/16$ f— $\alpha=3\pi/8$ g— $\alpha=\pi/2$

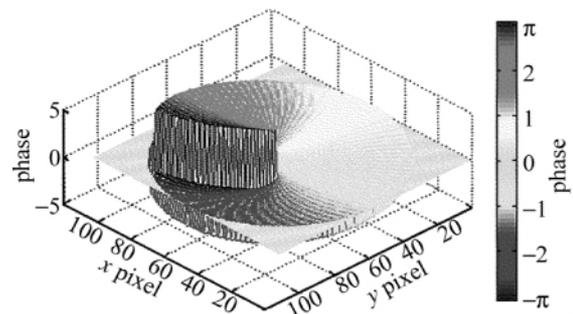


Fig. 2 Spiral type phase distribution of the result obtained from HG_{1,0} mode through GT at $\pi/4$

2.2 GT 域的图像滤波

GT 的可加性和可逆性可以从其在图像处理^[4,9]的应用中得到验证。较为典型的应用是 GT 域的图像滤波。图像 $f(x, y)$ 在 GT 域中的滤波过程可用下

式描述:

$$f'(x, y) = G^{-\alpha} \{ G^{\alpha} \{ f(x, y) \} W(u, v) \} \quad (21)$$

式中, $W(u, v)$ 为 GT 域的滤波器函数, $f'(x, y)$ 为滤波后复原的图像。参考文献 [4] 和参考文献 [9] 中指出, GT 对双曲线型的噪声信号 $\exp [j(\tau_1 xy + \tau_2 x + \tau_3 y)]$ (其中 τ_1 , τ_2 和 τ_3 为任意实常数) 有较强的处理能力。在本文中构造可加性噪声信号 $n(x, y)$ 作用于图像 $f(x, y)$, 其中 $n(x, y) = 128 \times \{ 1 + \exp [j\pi(2(x-300) \times (y-300) - x + y)] \}$, $f(x, y)$ 为 256×256 的灰度图像 (见图 3a); 将 $n(x, y)$ 按照采样间隔为 1, 采样点数为 1024×1024 进行离散化, 取中央 256×256 的区域与 $f(x, y)$ 相加, 得到受 $n(x, y)$ 污染的图像 $g(x, y)$, 见图 3b; 应用本文中所提算法, 对 $g(x, y)$ 进行角度为 $\pi/3$ 的 GT, 得到的强度图像见图 3c, 图中矩形区域为 $f(x, y)$ 在 GT 域中强度分布, 十字星形的分布为 $n(x, y)$ 的 GT 的结果, 可以看到, 在 GT 域中信号和噪声分离开了; 对 $g(x, y)$ 的 GT 结果进行 GT 域中的矩形低通滤波, 得到图 3d; 对低通滤波结果进行角度为 $-\pi/3$ 的逆 GT, 得到图 3e, 即复原的图像, 可以看到, 图像除了有轻微的平滑以外, 图像的细节 (如帽子的褶皱等) 都较为清晰; 图 3f 为 $g(x, y)$ 的 FT 结果, 噪声的频谱与信号的频谱交叠, 在 FT 域进行滤波, 要完全滤去噪声且又保证图像的清晰度是非常困难的。

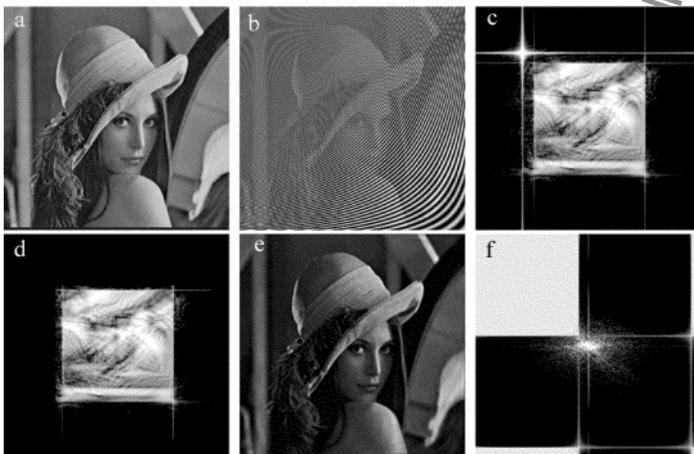


Fig. 3 Image filtering in GT domain

a—original image b—image with noise c—GT of Fig. 3b $\alpha = \pi/3$ d—low pass filtering in GT domain e—inverse GT after filtering f—FT of Fig. 3b

由此, 可以看到, 本文中所提算法在图像滤波中的应用, 与参考文献 [4] 中的结果是一致的。

3 结论

在量纲归一化的条件下, 推导出了 gyrator 变换数值计算的采样间隔, 并提出了一种新的基于 FFT 算法的 GT 快速算法, 该算法不涉及尺度变换, 仅用两次 FFT 即可完成计算。本算法的数值计算结果与参考文献 [2] 和参考文献 [4] 中的算例的结果一致。GT 作为一种新的变换, 将在光学信息处理和光波模式变换等相关领域成为一种有用的理论工具, 而 GT 的快速算法则是其有力的实践工具。

参 考 文 献

- [1] LOHMANN A W. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transforms [J]. Journal of the Optics Society of America, 1993, A10(10): 2181-2186.
- [2] RODRIGO J A, ALIEVA T, CALVO M L. Gyrator transform: properties and applications [J]. Optics Express 2007, 15(5): 2190-2203.
- [3] RODRIGO J A, ALIEVA T, CALVO M L. Experimental implementation of the gyrator transform [J]. Journal of the Optics Society of America, 2007, A24(10): 3135-3139.
- [4] RODRIGO J A, ALIEVA T, CALVO M L. Applications of gyrator transform for image processing [J]. Optics Communications 2007, 278(2): 279-284.
- [5] LI H J, WANG Y R. Information security system based on iterative multiple-phase retrieval in gyrator domain [J]. Optics and Laser Technology, 2008, 40(7): 962-966.
- [6] LI H J, WANG Y R. Double-image encryption based on iterative gyrator transform [J]. Optics Communications 2008, 281(23): 5745-5749.
- [7] LI H J. Image encryption based on gyrator transform and two-step phase-shifting interferometry [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2009, 47(1): 45-50.
- [8] LIU Z, GUO Q, XU L, et al. Double image encryption by using iterative random binary encoding in gyrator domains [J]. Optics Express, 2010, 18(11): 12033-12043.
- [9] PEI S Ch, DING J J. Properties, digital implementation, applications, and self image phenomena of the gyrator transform [C] // 17th European Signal Processing Conference. Glasgow, Scotland: European Signal Processing Federation 2009: 441-445.
- [10] LIU Zh J, CHEN D Zh, MA J P, et al. Fast algorithm of discrete gyrator transform based on convolution operation [J]. Optik, 2011, 122(10): 864-867.
- [11] OZAKTAS H M, ANKAN O, KUTAY M A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [12] ALLEN L, BEIJERSBERGEN M W, SPREEUW R J C, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes [J]. Physics Review, 1992, A45(11): 8185-8189.
- [13] VISSER J, NIENHUIS G. Orbital angular momentum of general astigmatic modes [J]. Physics Review, 2004, A70(1): 013809.