

文章编号: 1001-3806(2011)04-0562-04

# 余弦平方-高斯光束通过像散透镜的焦开关

牟国强, 王莉, 王喜庆\*

(西南交通大学 物理科学与技术学院, 成都 610031)

**摘要:** 为了研究余弦平方-高斯光束通过像散透镜后的焦开关现象,应用 Collins 公式推导出了聚焦余弦平方-高斯光束轴上光强分布的表达式,通过数值运算得到了像散参量对轴上光强分布的影响。结果表明,在给定光束参量和光束菲涅耳数的条件下,光束入射面位置不同时,余弦平方-高斯光束通过像散透镜后的相对焦移随像散参量变化而变化,确定了在此条件下,产生双焦开关时光束入射位置的范围。

**关键词:** 激光光学;焦开关;Collins 公式;像散;余弦平方-高斯光束

**中图分类号:** O435 **文献标识码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1001-3806.2011.04.030

## Focal switch of cosine-squared Gaussian beams passing through an astigmatic lens

MU Guo-qiang, WANG Li, WANG Xi-qing

(College of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In order to analyze the focal switch phenomena of cosine-squared Gaussian beams passing through an astigmatic lens, the expression for the axial irradiance distribution of focused cosine-squared Gaussian beams was derived based on the Collins formula. By means of numerical calculation, effect of astigmatic parameter on the axial irradiance was obtained. The dependence of the relative focal shift on the astigmatic parameter was studied at different positions of the beam's incident plane for a particular beam parameter and Fresnel number; the range of the beam's incident position of dual focal switches under this condition was determined and the focal switch due to the astigmatism was interpreted.

**Key words:** laser optics; focal switch; Collins formula; astigmatism; cosine-squared Gaussian beams

### 引言

由于在激光材料加工、激光医学等实际应用中,常需要将激光光束准确地聚焦,因此,对激光光束聚焦特性的研究是很重要的。1996年, MARTINEZ 和 CLIMENT 发现焦开关这一现象后,人们对激光光束经聚焦后的焦开关现象做了大量的研究<sup>[1-6]</sup>。在实际工作中,光学系统和光束会出现各种像差,如球差、像散和慧差等<sup>[7-8]</sup>,其中像散光学系统对光场的影响可用一个相位因子项  $\exp(-ik\phi)$  描述<sup>[9]</sup>。近年来,关于像散对光束聚焦特性的影响越来越引起人们的关注<sup>[4,6,9]</sup>,作者研究了余弦平方-高斯光束通过像散透镜聚焦后的焦开关现象,主要讨论了在光学系统几何参量  $\delta$  取不同值时,随像散参量  $\alpha$  的变化所产生的焦开关现象,分析了产生双焦开关现象时  $\delta$  的取值范围,并对像散引起焦开关现象的物理原因做出了解释。

作者简介:牟国强(1986-),男,硕士研究生,主要从事激光传输与变换的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: xqwang@home.swjtu.edu.cn

收稿日期:2010-10-19;收到修改稿日期:2011-01-17

### 1 理论模型

如图1所示,波长为  $\lambda$  的余弦平方-高斯光束通过

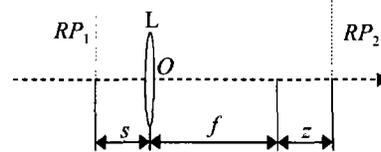


Fig. 1 Output pulse train of the mode-locked fiber laser

焦距为  $f$  的像散透镜  $L$ 。设入射余弦平方-高斯光束的束腰位于入射面  $RP_1$  处,入射面与透镜距离为  $s$ ,光学系统几何参量  $\delta = s/f$ 。从入射面  $RP_1$  到出射面  $RP_2$  的光束变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z/f & (-z/f)s + f + z \\ -1/f & 1 - s/f \end{bmatrix} \quad (1)$$

若入射面上余弦平方-高斯光束光场分布为<sup>[10]</sup>:

$$E_0(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \times \cos^2(\Omega_0 x) \cos^2(\Omega_0 y) \quad (2)$$

式中,  $w_0$  为相应基模高斯光束束腰宽度,  $\Omega_0$  是与余弦项相关的参量。则由柯林斯公式可得出射面  $RP_2$  处光场分布为:

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda B} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x_0^2}{w_0^2} + \frac{y_0^2}{w_0^2}\right)\right] \cos^2(\Omega_0 x_0) \times \cos^2(\Omega_0 y_0) \exp[-ikC_6(x_0^2 - y_0^2)] \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) - 2(x_0x + y_0y) + D(x^2 + y^2)]\right\} dx_0 dy_0 \quad (3)$$

式中,  $\exp[-ikC_6(x_0^2 - y_0^2)]$  为像散透镜的简单像散

$$E(x, y, z) = \frac{i\pi N_w}{4} \frac{1}{\sqrt{[Q + i2\pi N_w(\alpha Q - z/(2f))][Q - i2\pi N_w(\alpha Q + z/(2f))]}} \times \exp\left[-\frac{[i\pi N_w(1 - s/f)Q - 2\pi^2 N_w^2(1 - s/f)(\alpha Q - z/(2f))]x^2}{w_0^2[Q + i2\pi N_w(\alpha Q - z/(2f))]Q}\right] \times \left\{1 + \exp\left[-\frac{Q\beta^2}{[Q + i2\pi N_w(\alpha Q - z/(2f))]} \cosh\left[\frac{2N_w\beta\pi x}{[Q + i2\pi N_w(\alpha Q - z/(2f))]w_0}\right]\right]\right\} \times \exp\left[-\frac{[i\pi N_w(1 - s/f)Q + 2\pi^2 N_w^2(1 - s/f)(\alpha Q + z/(2f))]y^2}{w_0^2[Q - i2\pi N_w(\alpha Q + z/(2f))]Q}\right] \times \left\{1 + \exp\left[-\frac{Q\beta^2}{[Q - i2\pi N_w(\alpha Q + z/(2f))]} \cosh\left[\frac{2N_w\beta\pi y}{[Q - i2\pi N_w(\alpha Q + z/(2f))]w_0}\right]\right]\right\} \quad (5)$$

式中,  $Q = (1 - s/f)z/f + 1$ ,  $\alpha = C_6 f$  表示像散参量,  $N_w = w_0^2/(\lambda f)$  为相应基模高斯光束的非涅耳数,  $\beta = \Omega_0 w_0$

因子<sup>[9]</sup>,  $C_6$  为像散系数。A, B, C, D 为平面  $RP_1$  至平面  $RP_2$  的变换矩阵元素。利用积分公式<sup>[11]</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \quad (4)$$

由(3)式经积分运算,得到出射面  $RP_2$  处光场分布为:

为光束参量。令  $x = 0, y = 0$ , 由(5)式可得余弦平方-高斯光束通过像散透镜聚焦后的轴上光强分布为:

$$I(0, 0, z) = \frac{\pi^2 N_w^2}{16\sqrt{MN}} \left\{1 + \exp\left[-\frac{2Q^2\beta^2}{M}\right] + 2\exp\left[-\frac{Q^2\beta^2}{M}\right] \cos\left[\frac{Q2\pi N_w\beta^2(\alpha Q - z/(2f))}{M}\right]\right\} \times \left\{1 + \exp\left[-\frac{2Q^2\beta^2}{N}\right] + 2\exp\left[-\frac{Q^2\beta^2}{N}\right] \cos\left[\frac{Q2\pi N_w\beta^2(\alpha Q + z/(2f))}{N}\right]\right\} \quad (6)$$

式中,  $M = Q^2 + 4\pi^2 N_w^2 [\alpha Q - z/(2f)]^2$ ,  $N = Q^2 + 4\pi^2 N_w^2 [\alpha Q + z/(2f)]^2$ , (6) 式为本文中所得到的主要解析结果。

见, 当  $\delta = 0.2$  时, 轴上光强在几何焦点 ( $z/f = 0.0$ ) 左侧有两个极大值, 设靠近几何焦点的极大值为  $I_1$ , 远离几何焦点的极大值为  $I_2$ ; 当  $\alpha = 0.0$  时,  $I_2 > I_1$ ,  $I_2$  对应位置为实际焦点位置; 当  $\alpha = 0.19$  时,  $I_1 = I_2$ ; 当  $\alpha = 0.3$  时,  $I_1 > I_2$ ,  $I_1$  对应位置为实际焦点位置, 即轴上光强实际焦点位置发生变换。当  $\delta = 1.8$  时, 由图 2b 可以看出, 轴上光强在几何焦点右侧出现两个极大值。比较图 2b 和图 2a 发现, 随  $\alpha$  取值的不同, 图 2b 中轴上光强两极大值的变化情况与图 2a 中轴上光强两极大值的变化情况关于几何焦点完全对称。由以上分析可知, 当  $N_w, \beta, \delta$  一定时, 改变  $\alpha$  的取值可以使实际焦点的位置发生变换; 且  $\delta < 1.0$  时, 实际焦点的位置变换发生在几何焦点左侧; 而  $\delta > 1.0$  时, 实际焦点的位置变换发生在几何焦点右侧。

## 2 数值运算与分析

图 2 为余弦平方-高斯光束通过像散透镜后的轴上光强分布曲线, 其中,  $N_w = 1.5, \beta = 2.0$ 。由图 2a 可

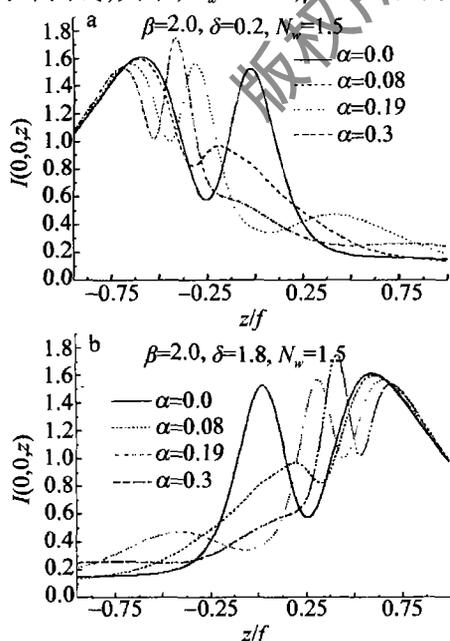


Fig. 2 Axial irradiance distribution of focused cosine-squared Gaussian beams passing through an astigmatic lens

图 3 为当光学系统几何参量  $\delta$  取不同值时, 余弦平方-高斯光束通过像散透镜后的相对焦移  $\Delta z_f$  ( $\Delta z_f = z_{max}/f$ , 即轴上最大光强点位置与透镜焦距之比) 随像散参量  $\alpha$  的变化曲线, 其中,  $N_w = 1.5, \beta = 2.0$ , 由图 3a 可见, 当  $\delta = 0.2$ , 且  $0 \leq \alpha < 0.19$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  随  $\alpha$  的增大而增大, 当  $\alpha = 0.19$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  产生一次跃变, 即产生焦开关现象, 当  $\alpha > 0.19$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  仍随  $\alpha$  的增大而增大; 当  $\delta = 0.4$ , 且  $0 \leq \alpha <$

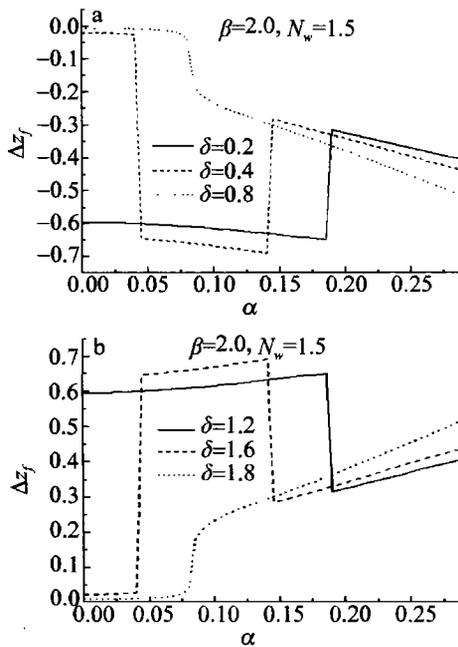


Fig. 3 Relative focal shift  $\Delta z_f$  versus astigmatic parameter  $\alpha$

0.04 时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  随  $\alpha$  的增大而增大, 当  $\alpha = 0.04$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  产生一次跃变, 即产生焦开关现象, 当  $0.04 < \alpha < 0.14$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  仍随  $\alpha$  的增大而增大, 当  $\alpha = 0.14$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  产生第 2 次跃变, 即又产生一次焦开关现象, 当  $\alpha > 0.14$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  仍随  $\alpha$  的增大而增大; 当  $\delta = 0.8$  时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  随  $\alpha$  的增大而增大, 无焦开关现象产生。由图 3b 可见当  $\delta$  分别为 1.2, 1.6, 1.8 时, 相对焦移  $|\Delta z_f|$  随  $\alpha$  的变化与  $\delta$  分别为 0.8, 0.4, 0.2 时完全相似, 只是焦开关现象出现在几何焦点右侧。综合以上分析可知, 当光学系统几何参量  $\delta$  取不同值时, 随像散参量  $\alpha$  的变化可以产生一次焦开关现象, 两次焦开关现象, 或者不产生焦开关现象, 且当  $\delta$  离开几何焦点的距离相等时, 焦开关现象关于几何焦点对称。

为得出当  $N_w = 1.5, \beta = 2.0$ , 随像散参量  $\alpha$  的变化产生双焦开关现象的  $\delta$  取值范围, 分析了  $\delta$  取不同值时, 图 2a 中轴上光强极大值  $I_1$  与的  $I_2$  差值随  $\alpha$  变化的曲线, 设  $D = I_1 - I_2$ , 由图 4 可见, 当  $\delta = 0.2$ , 且  $\alpha = 0$  时,  $D < 0$ , 随  $\alpha$  的增大,  $D$  由负变正, 实际焦点位置发

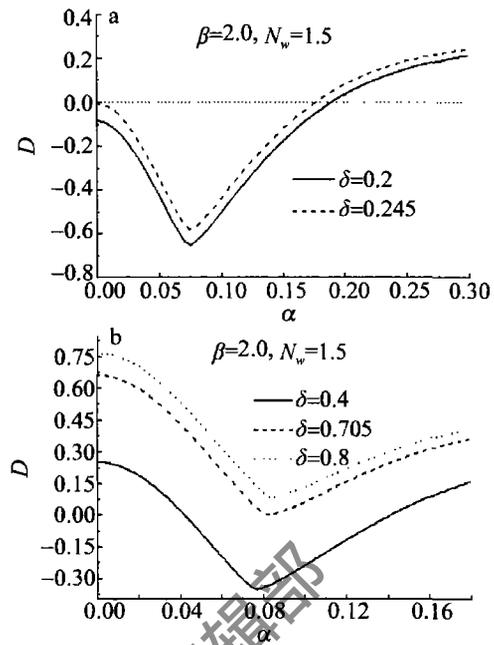


Fig. 4 The difference between  $I_1$  and  $I_2$  versus astigmatic parameter  $\alpha$

生一次变换; 当  $\delta = 0.245$ , 且  $\alpha = 0$  时,  $D = 0$ , 即  $I_1 = I_2$ , 随  $\alpha$  的增大,  $D$  先变为负而后由负变正, 实际焦点位置发生一次变换; 当  $\delta = 0.4$  时, 随  $\alpha$  的增大,  $D$  先由正变负而后又由负变正, 实际焦点位置发生两次变换, 即产生双焦开关现象, 这与图 3a 中  $\delta = 0.4$  时的焦开关现象相相对应。当  $\delta = 0.705$  时,  $D$  随  $\alpha$  的增大, 最小值为 0, 实际焦点位置不发生变换。当  $\delta = 0.8$  时, 随  $\alpha$  的增大,  $D$  始终大于 0, 实际焦点位置也不发生变换, 这与图 3a 中  $\delta = 0.8$  时的曲线对应。由以上分析可知, 当  $N_w = 1.5, \beta = 2.0$  且  $\delta < 1$  时, 轴上光强实际焦点位置随  $\alpha$  的增大出现两次变换的现象, 即产生双焦开关现象时,  $\delta$  的取值在 0.245 ~ 0.705 之间。并且根据对图 3 的分析可以得出, 当  $\delta$  的取值在 1.295 至 1.755 之间时, 轴上光强随  $\alpha$  的增大也会产生双焦开关现象。

结合光场分布 (5) 式可以看出, 轴上光强分布 (6) 式可重写为:

$$I(0, 0, z) = I_x(0, z) \times I_y(0, z) \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} I_x(0, z) = \frac{\pi N_w}{4 \sqrt{M}} \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{2Q^2\beta^2}{M}\right] + 2\exp\left[-\frac{Q^2\beta^2}{M}\right] \cos\left[\frac{Q2\pi N_w\beta^2(\alpha Q - z/(2f))}{M}\right] \right\} \\ I_y(0, z) = \frac{\pi N_w}{4 \sqrt{N}} \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{2Q^2\beta^2}{N}\right] + 2\exp\left[-\frac{Q^2\beta^2}{N}\right] \cos\left[\frac{Q2\pi N_w\beta^2(\alpha Q + z/(2f))}{N}\right] \right\} \end{cases} \quad (8)$$

由此可见, 像散的存在使薄透镜系统类似  $x$  方向与  $y$  方向焦距不相等的双焦系统, 它的影响使得  $x$  方向与  $y$  方向上的轴上光强分布不再一致, 所以当连续改变  $\alpha$  时, 轴上光强  $I(0, 0, z)$  的分布随  $x$  方向与  $y$  方

向轴上光强分布  $I_x(0, z)$  和  $I_y(0, z)$  的叠加不断变化, 使得余弦平方-高斯光束轴上光强的两个极大值相互竞争从而产生焦开关现象。

### 3 结 论

推导出了余弦平方-高斯光束通过像散透镜聚焦后的光场分布函数及轴上光强分布的解析表达式,应用数值运算研究了余弦平方-高斯光束通过像散透镜后的焦开关现象。结果表明,光学系统几何参量 $\delta$ 取不同值时,随像散参量 $\alpha$ 的变化可以产生一次、两次,或者不产生焦开关现象,且当 $\delta$ 离开几何焦点的距离相等时,焦开关现象关于几何焦点对称; $N_w = 1.5, \beta = 2.0$ 时,只有当 $\delta$ 的取值在 $0.245 \sim 0.705$ 及 $1.295 \sim 1.755$ 之间时,随像散参量 $\alpha$ 的增大才能够产生双焦开关现象;像散引起焦开关现象的物理原因是:由于像散的存在使得薄透镜对光束 $x$ 方向与 $y$ 方向的聚焦能力不同,而引起轴上光强两极大值的相互的竞争,产生焦开关现象。

#### 参 考 文 献

- [1] LIU X Y, PU J X. Focal shift and focal switch of partially coherent light in dual focus [J]. Journal of Huaqiao University, 2006, 27(2): 137-140 (in Chinese).
- [2] JI X L, LÜ B D. Focal switch of cosine-Gaussian beams focused by a thin lens without aperture [J]. Laser Technology, 2005, 29(6): 654-656 (in Chinese).
- [3] PENG R W, LÜ B D. Focal switch of Hermite-Gaussian beams [J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(11): 2795-2802 (in Chinese).
- [4] TAO X Y, JI X L, WANG Ch F, *et al.* Focal switch of astigmatic Hermite-Gaussian beams [J]. Optics Communications, 2004, 24(1): 429-435.
- [5] WANG L, LI M, WANG X Q, *et al.* Focal switch of partially coherent modified Bessel-Gaussian beams passing through an astigmatic lens with circular aperture [J]. Optics and Laser Technology, 2009, 41(5): 586-589.
- [6] LI M, WANG L, WANG X Q. Focal switch of Hermite-cosine-Gaussian beams passing through an astigmatic lens [J]. Chinese Journal of Lasers, 2008, 35(10): 1510-1515 (in Chinese).
- [7] HOPKINS H H. Wave theory of aberration [M]. London: Oxford University, 1990: 1-169.
- [8] WELLFORD W T. Aberrations of the symmetric optical system [D]. New York: Academic Press, 1974: 1-240.
- [9] PAN L Zh, LÜ B D. Focusing properties of partially coherent light passing through an astigmatic lens [J]. Laser Technology, 2003, 27(4): 374-376 (in Chinese).
- [10] KONG R X, WANG L, WANG X Q. The beam waist width and its location of the elegant cosh-squared-Gaussian beams [J]. Laser Journal, 2004, 25(1): 41-42 (in Chinese).
- [11] GRADSBTEYN I S, RYZBIK L M. Table of integral, series and products [M]. New York: Academic Press, 2000: 333.
- [4] DEUZE J L, BREON F M, DESCHAMPS P Y, *et al.* Polarization measurements with the airborne version of the POLDER instrument [J]. Proceedings of SPIE, 1992, 1747: 178-187.
- [5] DINER D J, CHIPMAN R A. An integrated multiangle, multispectral, and polarimetric imaging concept for aerosol remote sensing from space [J]. Proceeding of SPIE, 2005, 5659: 88-96.
- [6] DEUZE J L, GOLOUB P, HERMAN M, *et al.* Aerosol retrieval using the POLDER instrument preliminary results [J]. Proceedings of SPIE, 1997, 3121: 347-355.
- [7] CAIRNS B, EDGAR E R, JOSEPH D L, *et al.* Research scanning polarimeter and airborne usage for remote sensing of aerosols [J]. Proceedings of SPIE, 2003, 5158: 33-44.
- [8] TRAVIS L D. Remote sensing of aerosols with the earth observing scanning polarimeter [J]. Proceedings of SPIE, 1992, 1747: 154-164.
- [9] CHEN L G, HONG J, QIAO Y L, *et al.* Accuracy analysis on a sort of polarized measurement in remote sensing [J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2008, 28(10): 2384-2387 (in Chinese).
- [10] LUO R Z, QIAO Y L, DUAN L F. Polarization analysis of optical system in airborne multi-band polarization CCD camera system [J]. Proceedings of SPIE, 2003, 4891: 442-448.
- [11] WALUSCHKA E, SILVERGLATE P, FTACLAS C, *et al.* Polarization sensitivity analysis of an earth remote sensing instrument; the MODIS-N Phase B study [J]. Proceedings of SPIE, 1992, 1746: 96-103.
- [12] CAO H, SONG L K, PENG H D, *et al.* The study of the relationship between polarized light's incident azimuth and intermediary reflectance [J]. Laser Technology, 2005, 29(1): 104-105 (in Chinese).
- [13] CHEN L G, HONG J, QIAO Y L, *et al.* Accuracy analysis of polarimetric measurement based on double Wollaston prisms [J]. Laser Technology, 2008, 32(5): 468-470 (in Chinese).
- [14] CHIPMAN R A. The mechanics of polarization ray tracing [J]. Proceedings of SPIE, 1992, 1746: 62-75.

(上接第561页)