

文章编号: 1001-3806(2011)02-0272-03

泽尔尼克多项式拟合波面中采样点数的研究

谢苏隆, 钟鹰*

(中国空间技术研究院 西安分院重点实验室, 西安 710000)

摘要: 为了研究采样点数目对由泽尔尼克多项式所拟合的波面的拟合精度的影响, 采用不完全归纳法进行了理论分析, 取得了数十个不同的测试函数的采样点与拟合精度之间的数据关系。结果表明, 不同的测试函数遵循相同的规律, 即采样点数目达到一定数目后, 拟合精度随采样点的变化很小; 并通过计算得到了在较高拟合精度时, 采样点数目与泽尔尼克多项式的项数之间的变化规律, 由此得到相关的采样点数目确定的经验公式。这对于泽尔尼克多项式拟合波面具有很好的指导意义。

关键词: 测量与计量; 波面拟合; 不完全归纳法; 泽尔尼克多项式

中图分类号: TH703 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2011.02.035

Research of sampling point number in wave front fitting with Zernike polynomials

XIE Su-long, ZHONG Ying

(Key Laboratory of the Xi'an Division, Chinese Institute of Space Technology, Xi'an 710000, China)

Abstract: In order to study the effect of sampling point number on fitting precision when fitting wave front by Zernike polynomials, it was analyzed by means of the method of inadequate induction, and then the change law of sampling point number and fitting precision of dozens of different test functions was obtained. The results reveal that all test functions follow the same law that fitting precision has little change when sampling point number reach a certain number. In addition, the change law of sampling point number and Zernike polynomials term number was obtained by calculation. Thus, the experiential formula to determinate sampling point number are found, which is of great practical instructional significance in wave front fitting with Zernike polynomials.

Key words: measurement and metrology; wave front fitting; inadequate induction; Zernike polynomials

引言

在光学系统研究中, 经常要对一些被检测光学元件进行波面拟合。通常是选取泽尔尼克多项式作为基底函数系来拟合被检测光学元件波面。这是因为泽尔尼克多项式在单位圆上加权正交, 函数正交的性质使其系数相互独立, 这有利于消除偶然误差的影响, 并且其系数易与光学设计者惯用的 Seidel 像差函数建立联系^[1-8]。实践表明, 泽尔尼克多项式进行波面拟合的收敛性好、精度高, 而且能提供较多的有用信息。

采用泽尔尼克多项式进行波面拟合, 首先需要将被拟合的波面进行采样点的测量, 然后根据采样点的测量结果, 采用一定的拟合方法最终得到较为理想的拟合结果。采样点数目选取较少时, 最终的拟合结果误差较大, 容易受到质疑; 采样点数目选取较多时, 会

使得测量工作量大增, 耗费较多的人力物力。因此, 有必要对泽尔尼克多项式拟合波面时采样点数目进行一定的研究。

1 采用泽尔尼克多项式拟合波面

采用泽尔尼克多项式进行波面拟合是将泽尔尼克多项式作为基底函数系来拟合波面形状^[3]。将被拟合波面用 n 项泽尔尼克多项式表示为:

$$W(x, y) = a_1 Z_1(x, y) + \dots + a_j Z_j(x, y) + \dots + a_n Z_n(x, y) = \mathbf{A}^T \mathbf{Z} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n]^T$ 为拟合得到的波面函数; $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为第 j 个泽尔尼克多项式系数值; $\mathbf{Z} = [Z_1(x, y), Z_2(x, y), \dots, Z_j(x, y), \dots, Z_n(x, y)]$ 为泽尔尼克多项式矩阵; $Z_j(x, y) (j=1, 2, \dots, n)$ 为第 j 个泽尔尼克多项式的函数值; 现有 m 个离散数据点, $W_i(x, y_i) (i=1, 2, \dots, m)$ 表示第 i 个离散数据的在波面上的函数值, 令 $q_j = Z_j(x_i, y_i) (j=1, 2, \dots, n)$ 表示第 i 个离散数据的第 j 个泽尔尼克多项式的函数值。代入(1)式得到矛盾方程组 ($m > n$):

作者简介: 谢苏隆 (1977-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为航天器的设计。

* 通讯联系人。E-mail: xsllinlin@163.com

收稿日期: 2010-04-12; 收到修改稿日期: 2010-05-04

$$\begin{cases} q_{11}a_1 + q_{12}a_2 + \dots + q_{1n}a_n = W_1 \\ q_{21}a_1 + q_{22}a_2 + \dots + q_{2n}a_n = W_2 \\ \vdots \\ q_{m1}a_1 + q_{m2}a_2 + \dots + q_{mn}a_n = W_m \end{cases} \quad (2)$$

该矛盾方程一般不存在通常意义下的解,得到的是最小二乘解。在实际应用中,特别是在所处理的数据量较大的情况,通过上面方法直接构造的方程组往往是严重病态的,造成计算误差,使得拟合失败。为改善方程组的条件矩阵,发展了两种算法,一是从基底函数入手,通过变换函数族的基底来改善方程组状态^[9-11];二是直接从矛盾方程入手,应用 Householder 变换把系数正交三角化,直接求解拟合系数^[9]。

2 采样点数目对拟合结果的影响研究

由第 1 节可以看出,拟合反射面需要对反射面进行采样。采样点的数目过少时,拟合得到的泽尔尼克多项式所表示的反射面与实际反射面形状之间的误差过大;采样点的数目过多,会使得采样的工作量大增,耗费较多的人力物力。本节中将针对这一问题加

以分析研究。

整个研究方法是基于不完全归纳法进行的。分析过程分以下几个步骤:(1)建立一个波面测试函数来表示反射面形状;(2)拟合得到的泽尔尼克多项式所表示的反射面与实际反射面形状之间的误差用均方根值(root mean square, RMS)来表示,计算得到 RMS 与采样点数的关系图,以及 RMS 与采样点数目、泽尔尼克多项式的项数的关系图,并总结相关的规律;(3)换一个新的波面测试函数来表示反射面形状,重复步骤(1)和(2),总结得到的相同规律。

首先,在直角坐标系上建立一个波面测试函数:

$$f(x, y) = x^2 + 3y^3 + 5y, (0 \leq x, y \leq 1) \quad (3)$$

式中, x, y 为波面在直角坐标系中 X 轴和 Y 轴方向的值, $f(x, y)$ 为波面在直角坐标系中 Z 轴方向的函数值。测试函数中 x, y 均为归一化后的值,无量纲,并在 X 轴和 Y 轴方向均匀采样,相应计算得到的 RMS 值也是无量纲的值。得到的采样点数目与 RMS 值的关系图见图 1, 曲线 1~曲线 16 分别代表泽尔尼克项数为 4, 6, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, 72, 90, 98, 144, 200, 242, 288 时的情况。

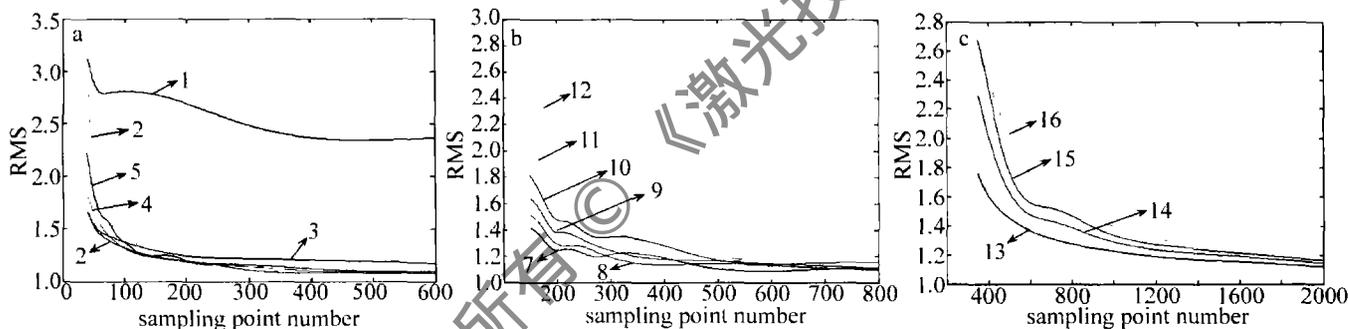


Fig. 1 Relation between RMS and sampling point number

a—Zernike polynomials term number is 4, 6, 8, 12, 18, 24, respectively b—Zernike polynomials term number is 32, 40, 50, 72, 90, 98, respectively c—Zernike polynomials term number is 144, 200, 242, 288, respectively

仔细观察图 1 可以得到以下的规律:(1)随着采样点数目的增大,RMS 值不断的减小,而且,一般存在一个拐点,当采样点数目大于该拐点时,RMS 值减小的速度变的非常缓慢;(2)当拟合反射面所采用的泽尔尼克多项式的项数太少时,RMS 值太大,采样点数目的增大不能使得 RMS 值降低至一个令人满意的数值;(3)当泽尔尼克多项式的项数大于一定值后,在相同的采样点数目情况下,泽尔尼克多项式的项数越多,RMS 值越大,或者说,在相同的 RMS 值要求下,泽尔尼克多项式的项数越多,需要的采样点的数目也越多;(4)随着采样点数目增大,不同项数泽尔尼克多项式所产生的 RMS 值之间的差别也越来越小。

由规律(2)和(3)可以看出,对于一个需要拟合的

反射面来说,存在一个最为适合的泽尔尼克多项式的项数。当拟合所用的泽尔尼克多项式的项数小于这个合适值时,RMS 值比较大,一般不能满足实际的拟合精度要求。当拟合所用的泽尔尼克多项式的项数大于这个合适值时,拟合所用的泽尔尼克多项式的项数越大,RMS 值也越大,因此,要尽可能地选用较少的泽尔尼克多项式的项数来进行波面拟合。

由规律(3)可知,在相同的 RMS 值要求下,泽尔尼克多项式的项数越多,需要的采样点的数目也越多。当以采样点数目与泽尔尼克多项式项数的比值作为自变量,RMS 为因变量时,得到的样项比(采样点数目与泽尔尼克多项式项数的比值)与 RMS 值的关系图见图 2。曲线 1~曲线 16 分别代表泽尔尼克项数为 4, 6, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, 72, 90, 98, 144, 200, 242, 288 时

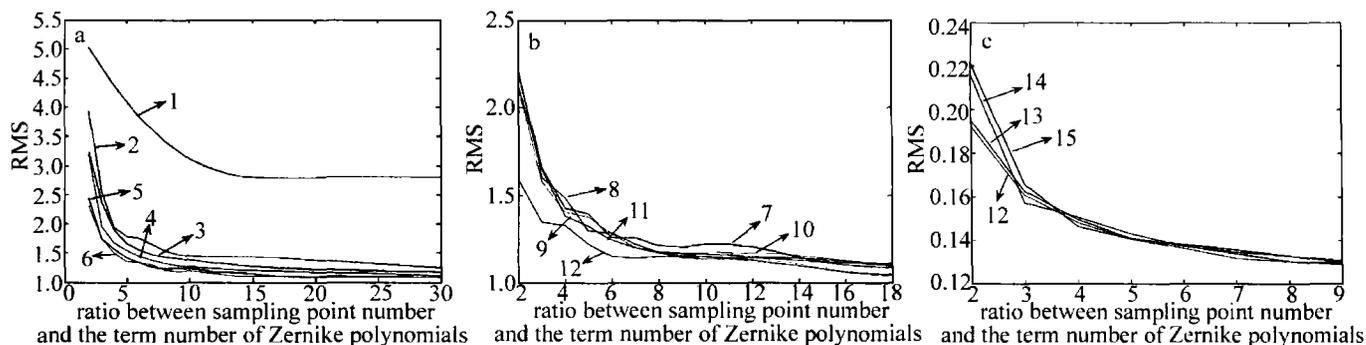


Fig. 2 Relation between RMS and the ratio between sampling point number and the Zernike polynomials term number

a—Zernike polynomials term number is 4, 6, 8, 12, 18, 24, respectively
 b—Zernike polynomials term number is 32, 40, 50, 72, 90, 98, respectively
 c—Zernike polynomials term number is 144, 200, 242, 288, respectively

的情况。

由图2可以看出,当泽尔尼克多项式的项数小于30、样项比大于10以后,RMS值的变化已经很小,因此,一般可以采用样项比等于10来确定拟合所需要的采样点的数目;当泽尔尼克多项式的项数为30~100、样项比大于6以后,RMS值的变化已经很小,因此,一般可以采用样项比等于6~10来确定拟合所需要的采样点的数目,泽尔尼克多项式的项数越趋于100,所选取的样项比越趋于6;当泽尔尼克多项式的项数为100~300、样项比大于4以后,RMS值的变化已经很小,因此,一般可以采用样项比等于4~6来确定拟合所需要的采样点的数目,泽尔尼克多项式的项数越趋于300,所选取的样项比越趋于4。

为了使结论更加具有一般性,通过对诸如下面两个公式等数十个不同的波面测试函数加以对比验证,发现它们同样遵循上面所得到的变化规律:

$$z(x, y) = \sin(2x^3 + 3x^2 + 2y^4 + y^3 + 5y) \quad (4)$$

$$z(x, y) = \arctan(x^2 + 2x + 2y^3 + y) + e^{0.1x + 0.03y^2} + 2x^{1.9} + 7y^{3.8} \quad (5)$$

为了更加清晰地表达出拟合波面时应该选取的采样点数目与泽尔尼克多项式的项数之间的关系,经过对数十个测试函数中大量数据进行拟合得到如下的经验公式:

$$\begin{cases} N = 35 \times M^{0.63}, & (30 \leq M \leq 300) \\ N = 300, & (M < 30) \end{cases} \quad (6)$$

式中, N 为拟合波面时应取的采样点数目, M 为泽尔尼克多项式的总项数。

该经验公式具有较好的精度。例如,对于图1中的曲线10,泽尔尼克项数为 $M = 72$,带入经验公式计算得到 $N = 518$ 。从图1中可以看出,曲线8在采样点过了500以后已经变得非常平缓,说明拟合精度随采样点数目的增长变化很小。对于图1中的曲线12,泽尔尼克项数为 $M = 98$,带入经验公式计算得到 $N = 628$ 。从图1中还可以看出,曲线10在采样点过了600

以后也已经变得非常平缓,说明拟合精度随采样点数目的增长也变化很小。这些都证实了经验公式(6)式的可靠性。

3 结论

采样点数目对于泽尔尼克多项式拟合波面具有重要的实际意义。作者通过不完全归纳法,建立不同的波面测试函数,研究采样点数目与RMS、样项比的变化关系。发现虽然测试函数不同,但它们遵循相同的变化规律:当泽尔尼克多项式的项数小于30时,采样点的数目可以取为10倍泽尔尼克多项式的项数;当泽尔尼克多项式的项数为30~100时,采样点的数目可以取为6~10倍泽尔尼克多项式的项数,所取采样点数目与泽尔尼克多项式项数为反变化关系;当泽尔尼克多项式的项数为100~300时,采样点的数目可以取为4~6倍泽尔尼克多项式的项数,如采样点的数目大于上述的值,对波面拟合精度没有很显著的改善。并由该规律总结得到采用泽尔尼克多项式拟合波面时应该选用的采样点数目的经验公式(6)式。

本文中的创新点在于定量地分析了采样点数目对泽尔尼克多项式拟合波面的影响,并将其与泽尔尼克多项式的项数结合在一起,得到了拟合精度较好的情况下,采样点数目与泽尔尼克多项式项数之间的定量关系。所得到的经验公式对于在泽尔尼克多项式拟合反射面时确定采样点的数目具有很好的实际指导意义。

参考文献

[1] YANG H F, JIANG Z F. Research of Zernike modal wavefront reconstruction of 19-element Hartmann-Shack wavefront sensor[J]. Laser Technology, 2005, 29(5): 484-487 (in Chinese).
 [2] HOU X, WU F, YANG L, et al. Wavefront fitting with Zernike annular polynomials for circular and annular pupils[J]. Infrared and Laser Engineering, 2006, 35(5): 523-526 (in Chinese).
 [3] LUO Zh F, CHENG H X, DING L. Wavefront measurement and reconstruction of small phase-distortion on laser beam[J]. Laser Journal, 2006, 27(3): 35-36 (in Chinese).

(下转第277页)

最大延迟偏差小于 0.04° 。参考文献[9]中设计的特殊角度入射的延迟器件,在 $365\text{nm} \sim 1150\text{nm}$ 的光谱区域内最大延迟偏差为 0.4° ,与其相比,新设计的延迟器件由于经过两个方面的改进,不仅消色差范围变宽,而且消色差精度有了较大的提高。

4 误差分析

在实际使用中,由于器件的加工误差和外入射角微小偏差,都将影响器件的消色差精度。

首先,对材料的加工而言,现在已经有了很精密的加工技术,但仍存在一定的误差,实际角度加工的误差 $\Delta\alpha \leq 0.01^\circ$ 。当 $\Delta\alpha = 0.01^\circ$,其延迟量在 $350\text{nm} \sim 2000\text{nm}$ 的光谱区域内最大延迟偏差小于 0.08° ;即使加工误差 $\Delta\alpha = 0.05^\circ$ 时,最大延迟偏差也小于 0.19° 。

其次,在使用过程中,外入射角微小偏差也会对器件的延迟量产生影响。实际使用中外入射角的误差 $\Delta i \leq 0.02^\circ$ 。当 $\Delta i = 0.02^\circ$,其延迟量在 $350\text{nm} \sim 2000\text{nm}$ 的光谱区域内最大延迟偏差小于 0.1° ;即使误差 $\Delta i = 0.1^\circ$ 时,最大延迟偏差也小于 0.2° 。

综合考虑器件的加工误差和外入射角微小偏差对器件消色差精度的影响,当 $\Delta\alpha \leq 0.01^\circ$ 和 $\Delta i \leq 0.02^\circ$ 时,其延迟量在 $350\text{nm} \sim 2000\text{nm}$ 的光谱区域内最大延迟偏差小于 0.09° 。即使误差达到 $\Delta\alpha = 0.05^\circ$ 和 $\Delta i = 0.1^\circ$ 时,其延迟量最大延迟偏差也小于 0.31° 。参考文献[9]中设计的特殊角度入射的延迟器件,在 $365\text{nm} \sim 1150\text{nm}$ 的光谱区域内理论上最大延迟偏差为 0.4° ,与其相比,新设计的器件具有极大的优越性。

5 结论

在设计菱体型消色差 $\lambda/4$ 延迟器件时,由于使延迟误差为正负偏差,在整个光谱区域内有两个波长点相位延迟同时达到 90° ;同时选择较大的折射率设计点 n_0 来设计,因此延迟器的性能有了较大提高。相比

常规延迟器,不仅扩大了消色差范围,而且提高了消色差精度。采用LaK2玻璃新设计的延迟器件,其延迟曲线显示,在 $350\text{nm} \sim 2000\text{nm}$ 的光谱区域内延迟偏差小于 0.04° ,且延迟量在两个波长处为 90° ,消色差精度有了较大的提高。当然,在实际使用中为获得更好的消色差精度,应尽量减小器件的加工误差和外入射角入射偏差。

参考文献

- [1] JEAN-BAPTISTE M, GUILHEM G. Terahertz chromatic quarter waveplates[J]. Applied Optics, 2006, 31(2):265-267.
- [2] McINTYRE C M. Achromatic waveplates for the visible spectrum[J]. Journal of the Optical Society of America, 1968, 58(12):1575-1580.
- [3] CHUN Y. Construction of an optical rotator using quarterwave plates and optical retarders[J]. Optical Engineering, 1995, 34(10):3031-3035.
- [4] SONG L K, LI G H. Design of the three-element combination achromatic retarder made of mica and quartz[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2000, 11(1):51-53(in Chinese).
- [5] YUN M J, LI G H, WANG W, et al. Three-in-one composite achromatic $\lambda/4$ wave-plate[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2001, 12(6):562-564(in Chinese).
- [6] LI J Zh. Optical handbook[M]. Taiyuan: Science and Technology Press of Shanxi, 1986:576-580(in Chinese).
- [7] LI G L, SONG L K, HAO D Zh, et al. Optical design of rhomb-type achromatism retarder[J]. Laser Technology, 2006, 30(5):539-540(in Chinese).
- [8] LI G L, SONG L K, HAO D Zh, et al. Sensitivity of rhomb-type phase retarders to the input angle[J]. Laser Technology, 2008, 32(2):157-158(in Chinese).
- [9] ZHAO P T, LI G H, WU F Q. New design of high precision achromatic phase retarder[J]. Acta Optica Sinica, 2005, 25(7):980-983(in Chinese).
- [10] WANG X, WU F Q, LIANG Zh X. A new $\lambda/4$ phase retarder insensitive to the angle of incidence[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2000, 11(2):154-156(in Chinese).
- [11] NAGIB N N. Phase retarders with variable angles of total internal reflection[J]. Applied Optics, 1994, 33(7):1218-1222.
- [12] NAGIB N N. Phase retarders highly insensitive to the input angle[J]. Applied Optics, 1998, 37(7):1231-1235.
- [13] HOU X, WU F, YANG L, et al. Effect analysis of edge errors in wavefront fitting with zernike polynomials[J]. Infrared and Laser Engineering, 2006, 35(s2):89-94(in Chinese).
- [14] DUAN H F, YANG Z P, WANG Sh Q, et al. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by zernike polynomials[J]. Chinese Journal of Lasers, 2002, 29(6):66-70(in Chinese).
- [15] YANG P, AO M W, LIU Y, et al. Adaptive optics genetic algorithm based on zernike mode coefficients[J]. Chinese Journal of Lasers, 2008, 35(3):11-16(in Chinese).
- [16] HOU X, WU F, YANG L, et al. Optimum analysis of seidel aberrations calculated with Zernike circle polynomials for the obscured aspherical primary mirror[J]. Journal of Optoelectronics · laser, 2006, 17(5):568-572(in Chinese).
- [17] LIU J P, LIANG L P, JIN Sh L, et al. Testing large curvature surface of optical element with spatial carrier heterodyne interferometry[J]. Infrared and Laser Engineering, 2009, 38(1):134-139(in Chinese).
- [18] WANG F G, YANG H B, LI H Zh, et al. Application and algorithm research of active optics in thin mirrors[J]. Infrared Technology, 2007, 29(12):704-707(in Chinese).
- [19] QI Y Ch, AN Y, JIN G, et al. Optical/mechanical integration of hyper-thin membrane mirror with large aperture[J]. Semiconductor Optoelectronics, 2006, 27(5):563-565(in Chinese).
- [20] WANG Zh Y, WU Zh H. Using binary optical phase plate to correct the error of interferometer[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 1995, 6(6):369-375(in Chinese).

(上接第274页)

- [4] HOU X, WU F, YANG L, et al. Effect analysis of edge errors in wavefront fitting with zernike polynomials[J]. Infrared and Laser Engineering, 2006, 35(s2):89-94(in Chinese).
- [5] DUAN H F, YANG Z P, WANG Sh Q, et al. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by zernike polynomials[J]. Chinese Journal of Lasers, 2002, 29(6):66-70(in Chinese).
- [6] YANG P, AO M W, LIU Y, et al. Adaptive optics genetic algorithm based on zernike mode coefficients[J]. Chinese Journal of Lasers, 2008, 35(3):11-16(in Chinese).
- [7] HOU X, WU F, YANG L, et al. Optimum analysis of seidel aberrations calculated with Zernike circle polynomials for the obscured aspherical primary mirror[J]. Journal of Optoelectronics · laser, 2006,