

文章编号: 1001-3806(2010)05-0712-05

硬边衍射多色部分相干光束谱强度的快速计算

凌农, 赵光普

(宜宾学院 计算物理四川省高校重点实验室, 宜宾 644000)

摘要: 为了在微机上快速地计算各类被硬边光阑衍射后的谱强度, 采用复高斯函数展开模拟硬边衍射效应, 推导出了多色高斯-谢尔模型光束被硬边光阑衍射后谱强度的近似解析表达式, 并将所得结果与传统方法(直接对交叉谱密度函数传输公式数值积分)进行了比较。结果表明, 所得公式在保证计算精度的前提下, 具有大大地节省计算机时的优点, 以平顶高斯光束为例, 证明所采用方法可同样推广用于其它光束被硬边光阑衍射后谱强度的计算。该方法具有普遍意义。

关键词: 激光光学; 快速计算; 复高斯函数展开; 谱强度

中图分类号: TN241 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2010.05.037

A fast algorithm for the spectrum of partially coherent beams diffracted at a hard-edge aperture

LING Nong, ZHAO Guang-pu

(Computational Physics Key Laboratory of Higher Education of Sichuan Province, Yibin University, Yibin 644000, China)

Abstract: In order to calculate the intensity of beams diffracted at a hard-edge aperture, by expanding a hard-edge aperture function into a finite sum of complex Gaussian functions, an approximate expression for the spectrum of polychromatic Gaussian-Schell model beams diffracted at the aperture was derived. Simulation results were compared with those obtained by means of the conventional method, i. e., the direct integral of the cross-spectral density function. It is shown that the computing time is strongly reduced under the condition of satisfying calculation accuracy. Taking flattened Gaussian beams as an example, this method is applicable for calculation of the spectrum of other kinds of beams propagating through a hard-edge aperture.

Key words: laser optics; fast algorithm; complex Gaussian functions expanding; spectral intensity

引言

1986年, WOLF教授首次证明^[1], 当光源的光谱相干度违反定标定律时, 由这种光源辐射的光即使在自由空间中传输时光谱也会发生变化, 即相关诱导的光谱变化^[2]。随后的研究表明, 硬边光阑的衍射也能诱导光谱发生变化, 特定条件下还会产生光谱开关^[3]。迄今, 人们对各种相关和衍射诱导的光谱变化已进行了深入的理论研究和实验证实^[2-12]。研究成果可用于星际测量中^[13-14], 并在光通讯、光互连、光信息编码和传输等方面展现出了诱人的应用前景^[4-5, 9]。然而, 在研究各类光束被硬边光阑衍射后的谱强度时,

除极少情况有解析解(或形式上解析解)存在外, 绝大多数都采用数值积分的方法, 这是相当耗费机时的, 尤其当硬边光阑数较多时, 在微机上计算已不能实现。实际上, 激光束的产生和传输都要或多或少地受到光阑的限制。因此, 研究既能节约机时、又能保证计算精度的各类光束被硬边光阑衍射后谱强度的快速算法是十分必要的。作者用复高斯函数展开模拟硬边衍射效应^[15], 推导出了一类典型的部分相干光——高斯-谢尔模型(Gaussian-Schell model, GSM)光束被硬边光阑衍射后谱强度的近似解析表达式。对运算速度和计算精度作了详细的讨论。最后, 将该方法推广用于平顶高斯光束, 证实了本方法具有普遍意义。

1 解析式推导

假设2维多色部分相干的GSM光束入射到 $z=0$ 平面的硬边光阑上, 光阑为一边长为 $2a$ 的方孔。入射GSM光束交叉谱密度函数为:

$$W^{(0)}(x_1', x_2', z=0, \omega) = S^{(0)}(\omega) \times \exp\left[-\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_1' - x_2')^2}{2\sigma_u^2}\right] \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60678055); 四川省青年科技基金资助项目(03ZQ026-061); 四川省应用基础研究基金资助项目(05JY029-102); 宜宾学院自然科学基金资助项目(2008B04)

作者简介: 凌农(1962-), 男, 硕士, 主要从事激光束传输与控制的研究。

E-mail: yblo88@163.com

收稿日期: 2009-11-19; 收到修改稿日期: 2010-03-08

式中, $S^{(0)}$ 为源光谱, w_0 为束腰宽度, σ_u 为空间相关长度, x_1' 和 x_2' 是光阑透光孔内任意两点的横向坐标。

在傍轴近似下, 多色 GSM 光束通过硬边光阑 ABCD 光学系统后在 z 平面上的谱强度为:

$$S(x, z, \omega) = \frac{k}{2\pi B} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} W^{(0)}(x_1', x_2', z=0, \omega) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[A(x_1'^2 - x_2'^2) - 2x(x_1' - x_2')]\right\} dx_1' dx_2' \quad (2)$$

式中, $k = \omega/c$ 为波数, x 为场点的横向位置坐标, A 和 B 为光学系统的变换矩阵元。

常用的方法^[3,6-7]是将(1)式代入(2)式进行积分, 利用误差函数定义式:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y}^y \exp(-t^2) dt \quad (3)$$

并假设源光谱是中心频率为 ω_0 、谱宽为 σ_0 的高斯型。最后结果可整理为:

$$S(x, z, \omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \frac{k w_0^2}{4B\sqrt{\pi H}} \times \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left[\left(\frac{i k w_0^2}{B} u - H^* u_1\right) u_1 + \frac{(i k w_0^2 \beta u / B + \beta^2 u_1 - u_1)^2}{4H\beta^2}\right] \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{(\beta^2 - 1) u_1 + 2\beta[i k w_0^2 u / (2B) + H\delta]}{2\sqrt{H\beta}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{(\beta^2 - 1) u_1 + 2\beta[i k w_0^2 u / (2B) - H\delta]}{2\sqrt{H\beta}}\right] \right\} du_1 \quad (4)$$

式中:

$$H = 1 - \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} - \frac{i k A w_0^2}{2B} \quad (5)$$

$$\beta = \left[1 + \left(\frac{w_0}{\sigma_u}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \text{ (空间相关参量)} \quad (6)$$

$$\delta = \frac{a}{w_0}, \text{ (截断参量)} \quad (7)$$

$u = x/w_0, u_1 = x_1'/w_0$ 为横向相对坐标, H^* 为 H 的复共扼。从(4)式可以看到, 一般情况下, 多色 GSM 光束被硬边光阑衍射后的谱强度是一个含误差函数的积分表达式, 要得到衍射场中某点谱强度的具体值, 必须对(4)式进行数值积分。

将硬边光阑的窗口函数展开成复高斯函数的叠加^[14]:

$$\operatorname{rect}(u) = \sum_{n=1}^N F_n \exp\left(-\frac{G_n}{\delta^2} u^2\right) \quad (8)$$

式中, F_n 和 G_n 分别为展开系数和复高斯函数系数, 可由计算机优化得到。当 $N = 10$ 时, F_n 和 G_n 取值见参考文献[15]中的表 1。

将(1)式和(8)式代入(2)式, 积分并整理得到多

色 GSM 光束被硬边光阑衍射后的谱强度近似解析表达式:

$$S(x, z, \omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \frac{k w_0^2}{2B} \sum_{m=1}^M F_m \sum_{n=1}^N F_n \times \frac{1}{\sqrt{(G_m/\delta^2 + H^*)(G_n/\delta^2 + H) - (\beta^2 - 1)^2/4\beta^2}} \times \exp\left\{-\left[\frac{1}{G_n/\delta^2 + H} + \frac{[1 + (\beta^2 - 1)\delta^2/(2\beta G_n + 2\beta H\delta^2)]^2}{G_m/\delta^2 + H^* - (\beta^2 - 1)^2\delta^2/(4\beta^2 G_n + 4\beta^2 H\delta^2)}\right] \times \frac{k^2 w_0^4}{4B^2} u^2\right\} \quad (9)$$

与(4)式比较后发现, (9)式中不含误差函数, 用其计算光场的谱强度只是简单的初等函数求和计算, 避免了数值积分。因此, 可以预计(9)式较(4)式具有明显的快的计算速率。

上述方法也可推广用于其它光束。例如: 经过与前面相同的推导过程, 可得到阶数为 N 的平顶高斯光束被硬边光阑衍射后谱强度的近似解析公式为:

$$S(x, z, \omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \frac{k}{2B} \frac{\omega_0^2}{N+1} \times \left\{ \sum_{m=1}^M A_m \exp\left[-\frac{[kx/(2B)]^2}{(N+1)/\omega_0^2 + ikA/(2B) + B_m/a^2}\right] \times \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(N+1)/\omega_0^2}{(N+1)/\omega_0^2 + ikA/(2B) + B_m/a^2}\right]^{n+1/2} \times H_{2n} \left[\frac{kx/(2B)}{\sqrt{(N+1)/\omega_0^2 + ikA/(2B) + B_m/a^2}}\right] \right\} \times \left\{ \sum_{m=1}^M A_m \exp\left[-\frac{[kx/(2B)]^2}{(N+1)/\omega_0^2 - ikA/(2B) + B_m/a^2}\right] \times \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(N+1)/\omega_0^2}{(N+1)/\omega_0^2 - ikA/(2B) + B_m/a^2}\right]^{n+1/2} \times H_{2n} \left[-\frac{kx/(2B)}{\sqrt{(N+1)/\omega_0^2 - ikA/(2B) + B_m/a^2}}\right] \right\} \quad (10)$$

2 误差与计算速度的讨论

为说明所得近似解析公式具有兼顾计算精度和节省机时, 且具有普适性的优点, 以硬边光阑自由空间光学系统为例, 用(9)式和(10)式对多色 GSM 和平顶高斯光束的轴上谱强度作了计算(虚线), 并在相同计算参量的情况下, 与(4)式数值积分结果(实线)进行了比较。对(4)式数值积分采用的是 MATHEMATICA5.0 软件默认的计算语句(NIntegrate), 可根据精度要求设计程序改变积分区间的步长, 计算时间也将发生变化。图 1 ~ 图 6 中, $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}, \sigma_0 = 0.6 \times$

10^{15} s^{-1} ; 图7中, $\omega_0 = 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $\sigma_0 = 0.01 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ 。其它计算参量见图标。本文中的所有计算都是在联想锋行5052微机上用MATHEMATICA5.0软件完成的。

图1是当 $\delta = 0.8$, $\beta = 0.6$ 时,用(9)式计算的轴

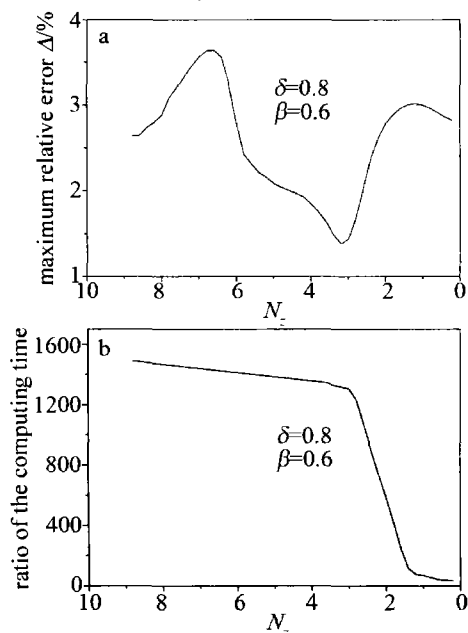


Fig. 1 a—maximum relative error on-axis by using Eq. (9) b—ratio of the computing time on-axis by using Eq. (4) and Eq. (9)

上谱强度最大相对误差 Δ 和用(4)式、(9)式计算轴上谱强度所用计算机机时比随菲涅耳数 N_z ($N_z = \omega_0^2 / (\lambda_0 z)$, λ_0 为源光谱的中心频率 ω_0 对应的波长)的变化曲线。最大相对误差 Δ 定义为 $\Delta = (S_{\max} - S_{a,\max}) / S_{\max}$, S_{\max} , $S_{a,\max}$ 分别为(4)式和(9)式计算的谱强度最大值。由图1知, Δ 不随 N_z 单调变化,用(4)式和(9)式计算轴上谱强度所用计算机机时比随 N_z 的减小而减少。当 $N_z = 6.6$ 时, Δ 有最大值 $\Delta_{\max} = 3.6\%$;当 $N_z = 3.2$ 时, Δ 有最小值 $\Delta_{\min} = 1.4\%$ 。机时比分别为1370:1和1317:1。图2为 $\delta = 0.8$, $\beta = 0.6$ 和 $\beta = 1$

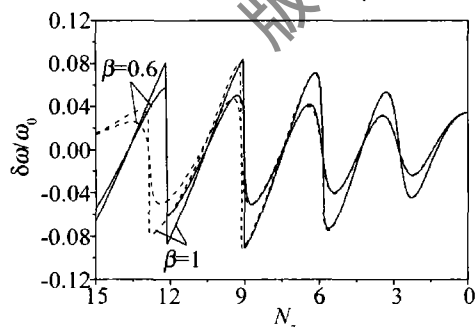


Fig. 2 The relative spectral shift $\delta\omega/\omega_0$ versus N_z for $\delta = 0.8$, $\beta = 0.6$ and $\beta = 1$, dashed curves are the results by using Eq. (9)

时,用(4)式计算的谱强度相对移动 $\delta\omega/\omega_0$ ($\delta\omega/\omega_0 = (\omega_{\max} - \omega_0) / \omega_0$, ω_{\max} 为光谱最大值对应的频率)随菲涅耳数 N_z 的变化曲线,虚线为(9)式计算结果。图3为 $\delta = 0.8$, $\beta = 0.6$, N_z 分别为15, 9, 6.6和3.2时,(4)

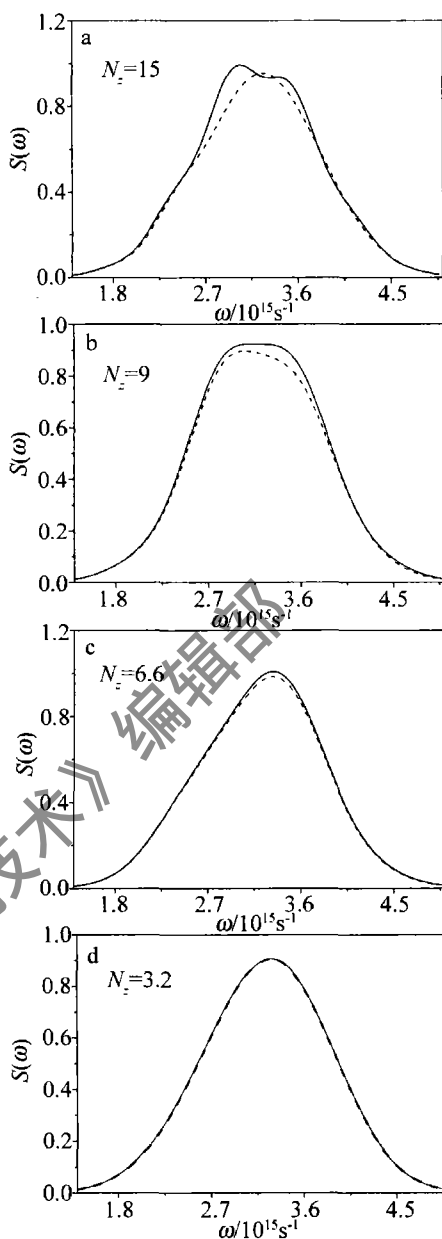


Fig. 3 Spectra $S(\omega)$ for $\delta = 0.8$, $\beta = 0.6$, $N_z = 15, 9, 6.6$ and 3.2 , “—” by using Eq. (4), “- - -” by using Eq. (9)

式(实线)和(9)式(虚线)计算的轴上谱强度。由图2得到,在距光阑较近的轴上点($N_z \geq 9$), (4)式和(9)式计算的谱强度相对移动会产生较大的偏差, S_{\max} 和 $S_{a,\max}$ 不在同一频率处出现,即用(4)式和(9)式计算的谱强度曲线轮廓不同(见图3a和图3b), (9)式结果不再有效,所得结论与参考文献[14]中的一致。对于完全空间相干的情况($\beta = 1$), (4)式和(9)式计算的光谱相对移动仍然在 $N_z \geq 9$ 时出现明显的偏离。由此可见, (9)式成立的首要条件是其计算的光谱相对移动与(4)式结果要有足够的精度,即保证谱强度曲线轮廓基本一致(见图3c和图3d)。图4为 β 取0.6, δ 为0.5, 0.8和1.2时,用(4)式计算的谱强度相对移动 $\delta\omega/\omega_0$ 随菲涅耳数 N_z 的变化曲线和与之对应的(9)式计算结果(虚线),内插图为 $\delta = 2$ 的情况。图5为

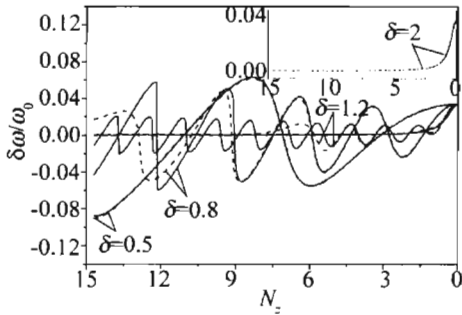


Fig. 4 The relative spectral shift $\delta\omega/\omega_0$ versus N_z for $\beta=0.6$, $\delta=0.5, 0.8, 1.2$ and 2 , dashed curves are the results by using Eq. (9)

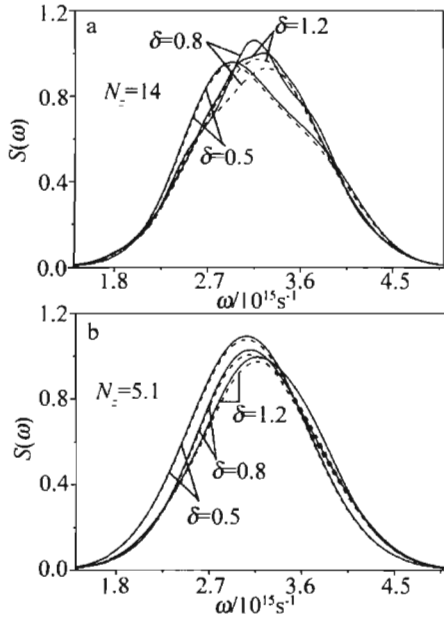


Fig. 5 Spectra $S(\omega)$ for $\beta=0.6, \delta=0.5, 0.8, 1.2$ and $N_z=14, 5.1$, “—” by using Eq. (4), “- - -” by using Eq. (9)

$\beta=0.6, \delta$ 取 $0.5, 0.8, 1.2$ 和 N_z 为 $14, 5.1$ 时,用(4)式计算的谱强度(实线)和(9)式计算结果(虚线)。由图4可知,当光阑衍射效应不能忽略时,对于 δ 为 $0.5, 0.8$ 和 1.2 , (4)式计算的谱强度相对移动 $\delta\omega/\omega_0$ 较(9)式结果分别在 $N_z \geq 14, 9$ 和 5.1 的范围出现较大偏差,即(9)式成立的菲涅耳数 N_z 的取值范围随截断参量 δ 的增加而减小。例如: $N_z=14$ (见图5a), 只有 $\delta=0.5$ 时, (4)式计算的谱强度与(9)式结果趋于一致, $\Delta=1.6\%$, 机时比为 $5365:1$, 而 δ 为 0.8 和 1.2 时, 两者之间均存在较大差异; $N_z=5.1$ 时 (见图5b), 对于 δ 为 $0.5, 0.8$ 和 1.2 , (4)式与(9)式计算的谱强度曲线相近, 机时比为 $3293:1, 1480:1$ 和 $1200:1$ 。但(4)式和(9)式计算的光谱相对移动的振荡幅度随 δ 的增加而减小, 当 $\delta=2$ 时, 在 $4.5 \leq N_z \leq 15$ 的范围内, 两式计算的光谱相对移动趋于 0 (见图4中内插图), (4)式和(9)式的计算结果一致。当 N_z 为 15 和 1 时, 与此对应的谱强度被示于图6中。最大相对误差 Δ 为 2.5% 和 3.2% , 机时比为 $19944:1$ 和 $12000:1$ 。分析表明, 当光阑影响较弱时, 使(9)式成立的菲涅耳数 N_z

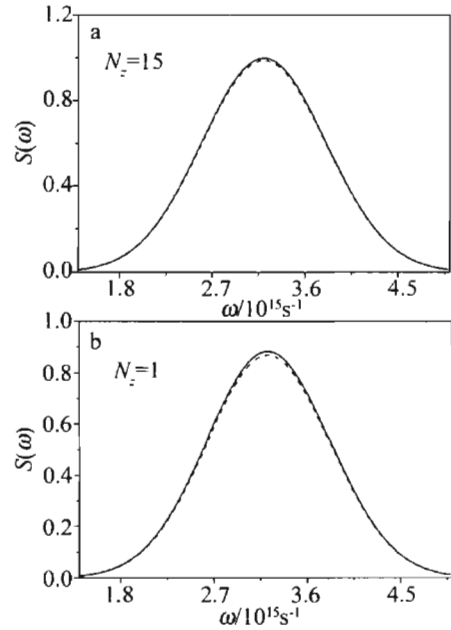


Fig. 6 Spectra $S(\omega)$ for $\beta=0.6, \delta=2, N_z=15$ and $N_z=1$, “—” by using Eq. (4), “- - -” by using Eq. (9)

的取值范围较光阑影响较强时大。

图7中虚线为用(10)式计算的多色平顶高斯光

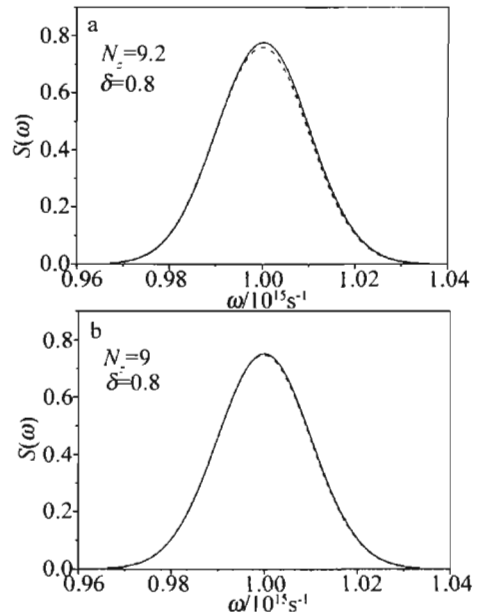


Fig. 7 Spectra $S(\omega)$ of polychromatic flattened Gaussian beams on-axis, dashed curves are the results by using Eq. (10)

束通过硬边光阑自由空间光学系统轴上点的谱强度, 实线是将平顶高斯光束的交叉谱密度函数代入(2)式的数值积分结果(为省略篇幅, 公式从略), 阶数 $N=15$ 。对应图7a和图7b, (10)式计算的谱强度最大相对误差为 4.2% 和 1.5% 。数值积分与近似解析公式的机时比为 $110672:1$ 和 $3292:1$ 。表明该方法也可用于平顶高斯光束被硬边光阑衍射后谱强度的计算, 且同样具有节省计时的优点。

3 结 论

用复高斯函数展开模拟硬边衍射效应, 推导出了

多色 GSM 光束被硬边光阑衍射后谱强度的近似解析公式。通过对近似公式数值计算与直接对交叉谱密度函数传输公式数值积分结果的比较,证实了所得近似公式在保证计算精度的前提下,具有大大地节省机时的优点。改变空间相关参量 β 对所得近似公式成立的菲涅耳数 N_2 的取值范围影响不大。当光阑效应不可忽略时,近似公式成立的 N_2 的取值范围随截断参量 δ 的增加而减小。出现误差的原因是由于复高斯函数不能完全准确地描述硬边光阑的窗口函数^[14],可以通过对硬边光阑窗口函数更好的拟合来提高计算精度。该方法也可用于其它光束被硬边光阑衍射后谱强度的计算,且使得在微机上计算光束被多个硬边光阑衍射后的谱强度成为可能。

参 考 文 献

- [1] WOLF E. Invariance of the spectrum of light on propagation[J]. Phys Rev Lett, 1986, 56(13):1370-1372.
- [2] WOLF E, JAMEST D F V. Correlation-induced spectral changes[J]. Reports on Progress in Physics, 1996, 59(6): 771-818.
- [3] PU J X, ZHANG H H, NEMOTO S J. Shifts and spectral switches of partially coherent light passing through an aperture[J]. Opt Commun. 1999,162(8): 57-63.
- [4] YATAGAI T, KAWAI S, HUANG H. Optical computing and interconnects[J]. Proc IEEE,1996,84(2):825-852.
- [5] POPESCU G, DOGARIU A. Spectral anomalies at wave-front dislocations[J]. Phys Rev Lett, 2002,88(18): 183902/1-183902/4.
- [6] ROYCHOWDHURY H, WOLF E. Effects of spatial coherence on near-field spectra[J]. Opt Lett, 2003,28(3):170-172.
- [7] YADAV B K, RIZVI S A M, KANDPAL H C. Experimental observation of spectral changes of partially coherent light in Young's experiment[J]. Journal of Optics, 2006, A8(1):72-76.
- [8] ZHAO G P, LÜ B D. Influence of hard-edge aperture on the spectral switch of polychromatic vector beams[J]. Laser Technology, 2006,30(2):142-144(in Chinese).
- [9] YADAV B K, RIZVI S A M, RAMAN S, et al. Information encoding by spectral anomalies of spatially coherent light diffracted by an annular aperture[J]. Opt Commun,2007, 269(9):253-260.
- [10] ZHAO G P, LÜ B D. Spectral switches and effect in singular optics with polychromatic light field[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(4): 2229-2235(in Chinese).
- [11] ZHAO G P, ZHANG E T, LÜ B D. Spectral switches of partially coherent nonparaxial beams diffracted at an aperture[J]. Opt Commun,2009, 282(2):167-171.
- [12] ZHAO G P, LÜ B D. The influence of nonparaxiality on the spectral behavior in Young's experiment illuminated by partially coherent light[J]. Chinese Physics,2009, B18(8):3466-3472.
- [13] WOLF E, SHIRAI T, CHEN H, et al. Coherence filters and their uses: 1. Basic theory and examples[J]. Journal of Modern Optics, 1997, 44(7): 1345-1354.
- [14] SHIRAI T, WOLF E, CHEN H, et al. Coherence filters and their uses:2. One-dimensional realizations[J]. Journal of Modern Optics, 1998, 45(4): 799-816.
- [15] WEN J J, BREAZEALE M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. J Acoust Soc Amer, 1988, 83(5):1752-1756.
- [11] CHU X Ch, LU H B, ZHAO Sh H. Wide range grating interferometer with nanometer resolution [J]. Opto-electronic Engineering, 2008,35(1):56-59(in Chinese).
- [12] MA X Sh, FEI Y T, CHEN X H, et al. Theory study of a new nanometrology grating [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2006, 27(2):159-164(in Chinese).
- [13] CHAN H M, YEN K S, RATNAM M M. Crack displacement sensing and measurement in concrete using circular grating Moiré fringes and pattern matching[J]. Proc SPIE, 2008, 7155:715529/1-715529/8.
- [14] PARK Y C, KIM S W. Optical measurement of spindle radial motion by Moiré technique of concentric-circle gratings [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1994,34(7):1019-1030.
- [15] LATIME P. Talbot plane patterns: grating image or interference effects[J]. Appl Opt, 1993, 32(7):1078-1083.
- [16] XIA H J, FEI Y T. Error analysis of 2-D diffraction grating interferometer for high-resolution displacement measurement[J]. Proc SPIE, 2008, 7130:13052-13055.
- [17] WANG X Z, DONG X H, GUO J, et al. Two-dimensional displacement sensing using a cross diffraction grating scheme[J]. Journal of Optics,2004, A6(1):106-111.
- [18] ZHAO B, YAN L, HAO D F. Experimental study about a type of gratings interferometer[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2001, 22(1):271-274(in Chinese).
- [19] ZHU M Ch, ZHOU Zh F, ZHANG T. Research of the He-Ne laser-wave interferometer[J]. Laser Technology, 2004, 28(5):531-533(in Chinese).
- [20] LEE J Y, CHEN H Y, HSU C C, et al. Optical heterodyne grating interferometry for displacement measurement with subnanometric resolution[J]. Sensors and Actuators, 2007,137(1):185-191.
- [21] FERHANOGLU O, TOY M F, UREY H. Two-wavelength grating interferometry for MEMS sensors[J]. Photonics Technology, 2007, 19(21/24):1895-1897.
- [22] WANG F, QI X D. Grating heterodyne interferometer of high accuracy controlling photoelectric grating ruling engine[J]. Laser Technology, 2008, 32(5):474-476(in Chinese).
- [23] QIAO N Sh, ZHAO H J, CAI X H, et al. Study of profilometry based on two-frequency grating[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2008, 19(1):74-77(in Chinese).
- [24] WANG X H, HE X D, FU Y J. The real-time measurement by two-frequency grating[J]. Laser Technology, 2007, 31(4):384-387(in Chinese).

(上接第 664 页)