

文章编号: 1001-3806(2010)02-0189-04

## 超短啾啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束的传输式

彭润伍, 唐立军

(长沙理工大学 物理与电子科学学院, 长沙 410004)

**摘要:** 为了研究超短啾啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束合理的物理模型和光束参量对物理模型的影响, 采用复振幅包络表示式和复解析信号表示式推导了这类脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解。对复振幅包络解奇异性的产生进行了详细分析, 讨论了脉冲啾啾、脉冲宽度和模式对复振幅包络解奇异性的影响。计算结果表明, 当脉冲光束存在啾啾时, 啾啾量越大, 复振幅包络解的奇异点位置离光束中心越近, 而复解析信号解在任意大小啾啾的情况下都不存在奇异性; 对于啾啾量相同的脉冲, 脉冲宽度越小或模指数越大其奇异性位置离光束中心越近。因而要建立激光光束合理的物理模型必须根据光束参量采用合适的方法。

**关键词:** 激光光学; 超短脉冲; 啾啾; 复振幅包络; 复解析信号

**中图分类号:** O436 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-3806.2010.02.013

### Propagation presentation of ultrashort chirped pulses with elegant Laguerre-Gaussian transverse modes

PENG Run-wu, TANG Li-jun

(Department of Physics and Electronic Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, China)

**Abstract:** In order to study the physical model of the ultrashort pulses with spatial profiles of elegant Laguerre-Gaussian transverse modes and the effect of beam parameters on the model, complex amplitude envelope (CAE) solution and complex analytical signal (CAS) solution of pulsed beams were derived according to CAE and CAS representations. Generation of the singularity in the CAE solution and effect of the chirp, the pulse duration and the mode on it were analyzed. The results indicate that singularity of the CAE solution closer to the central with larger chirp and the CAS solution doesn't present singularity with any chirp. The singularity is located nearer to the central axis for the pulses with higher order transverse modes and shorter pulse duration. Thus, to obtain reasonable physical model of the laser beams, appropriate method should be adopted according to the beam parameters.

**Key words:** laser optics; ultrashort pulse; chirp; complex amplitude envelope; complex analytical signal

## 引言

自上世纪60年代激光器出现以来, 激光技术得到飞速发展, 目前已经可以产生接近单周期的激光脉冲<sup>[1-2]</sup>。在理论上如何建立合理的脉冲光束物理模型和对光束传输特性的研究一直是颇受关注的课题<sup>[3-10]</sup>。对于脉宽很短或具有一定啾啾的脉冲光束, 脉冲将会有较宽的频谱宽度, 通常的缓变包络近似 (slowly varying envelope approximation, SVEA) 开始失效。如果仍然采用缓变包络近似条件, 得到的复振幅

包络 (complex amplitude envelope, CAE) 表示式将出现空间奇异性<sup>[3-6]</sup>。已有的大量研究结果表明, 采用严格的复解析信号 (complex analytical signal, CAS) 表示式<sup>[11]</sup>, 可以得到消除奇异性的正确表示式<sup>[3-6]</sup>。

高阶高斯空间模式的脉冲光束其时空特性类似于超短脉冲高斯光束<sup>[7-10]</sup>, 近年来是人们感兴趣的研究内容。本文中详细研究了其中之一的超短啾啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束, 推导了超短啾啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束的 CAE 解和 CAS 解。并从物理上解释了 CAE 解奇异性的产生, 并分析了脉冲啾啾、脉冲宽度和模式对奇异性的影响。

## 1 超短啾啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束的传输表示式

脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束在频率域傍轴方程的解析解可以写成:

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (07JJ3112); 长沙理工大学重点学科建设资助项目

作者简介: 彭润伍 (1971-), 男, 副教授, 主要从事高功率激光技术和激光传输的研究。

E-mail: pengrunwu@163.com

收稿日期: 2008-12-22; 收到修改稿日期: 2009-02-11

$$E_{pl}(r, \theta, z, \omega) = -\frac{iz_R}{z - iz_R} \left(\frac{r}{w}\right)^l L_p^l\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \times \exp\left[\frac{ikr^2}{2(z - iz_R)}\right] \exp(i\theta - i\phi) S(\omega) \quad (1)$$

式中,  $r$  是径向距离,  $z$  是传播方向距离,  $\omega$  是频率,  $\theta$  是横截面上的辐角,  $p$  和  $l$  是模指数,  $z_R = kw_0^2/2$  是瑞利长度,  $\phi = (2p + l + 1) \tan^{-1}(z/z_R)$  是戈维相位,  $w = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$  是光束宽度,  $L_p^l$  是拉盖尔多项式。本文中仅讨论节线数  $l=0$  的情况, 对于  $l \neq 0$  的情况, 除横截面上强度分布沿辐角方向有明暗变化外, 以下的讨论和得出的结果是类似的。

脉冲拉盖尔-高斯光束在时间域的场分布可由(1)式得到:

$$E_p(r, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_p(r, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2)$$

式中,  $t$  是时间, 将(1)式代入(2)式得到

$$E_p(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{iz_R}{z - iz_R} L_p\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \times \exp\left[-i\omega\left[t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2c(z - iz_R)}\right] - i\phi\right] S(\omega) d\omega \quad (3)$$

对于等衍射长度脉冲,  $z_R$  与频率无关<sup>[12]</sup>, 从而(3)式可改写为:

$$E_p(r, z, t) = -\frac{iz_R}{z - iz_R} L_p\left(\frac{r^2}{w^2}\right) S(\tau') \exp(-i\phi) \quad (4)$$

其中,

$$S(\tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(-i\omega\tau') d\omega \quad (5)$$

$$\tau' = \tau - \frac{r^2}{2c(z - iz_R)} \quad (6)$$

另外,  $\tau = t - z/c$  是本地时间。

考虑一个正弦振荡脉冲, 其实部为:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (7)$$

式中,  $\varphi_0$  是初始相位。为简单起见, 令  $\varphi_0$  为一个与时间无关的常数。对于啁啾高斯脉冲,  $A(t)$  的形式为:

$$A(t) = \exp\left[-a_G^2(1 + iC) \frac{t^2}{T_p^2}\right] \quad (8)$$

式中,  $a_G = \sqrt{2\ln 2}$ ,  $C$  是脉冲啁啾量,  $T_p$  是半峰全宽的脉冲宽度。在缓变包络近似下, 采用复振幅包络表示式来表示(7)式的复函数, 即:

$$S_{p,CAE}(t) = \exp\left[-a_G^2(1 + iC) \frac{t^2}{T_p^2}\right] \exp(-i\omega_0 t + i\varphi_0) \quad (9)$$

将(9)式直接代入(4)式可以得到脉冲拉盖尔-高斯光束的 CAE 解:

$$E_{p,CAE}(r, z, t) = -\frac{iz_R}{z - iz_R} L_p\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \times$$

$$\exp\left[-i(\omega_0\tau' + \varphi) - a_G^2(1 + iC) \frac{\tau'^2}{T_p^2}\right] \quad (10)$$

式中,  $\varphi = \varphi_0 + \phi$ 。严格来说, (7)式的复函数应该用复解析信号表示式来表示, 用单边傅里叶变换表示为:

$$S_{CAS}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} S(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (11)$$

其中,  $S(\omega)$  为:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{2} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)] \quad (12)$$

其中:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(i\varphi_0) \exp(i\omega t) dt \quad (13)$$

因而可以得到:

$$S_{CAS}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)] \exp(-i\omega t) d\omega \quad (14)$$

对于窄带脉冲 ( $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ ),  $g(\omega - \omega_0)$  仅仅在很小的范围内有可观的数值, 从而可以忽略  $g^*(-\omega - \omega_0)$ , 并将积分扩展至  $-\infty$ <sup>[3]</sup>。因而从(12)式可得到:

$$S_{CAE}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \omega_0) \exp(-i\omega t) d\omega = A(t) \exp(i\varphi_0) \exp(-i\omega_0 t) \quad (15)$$

因而可以推导出(9)式, 从而得到(10)式 CAE 解。对于宽带脉冲,  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$  的条件不再成立, 因而 SVEA 失效,  $g^*(-\omega - \omega_0)$  不能忽略, 因此, 必须从严格的复解析信号表示式出发推导解析解, 将(12)式代入(4)式后积分, 得到脉冲拉盖尔-高斯光束的 CAS 解:

$$E_{p,CAS}(r, z, t) = -\frac{iz_R}{z - iz_R} L_p\left(2 \frac{r^2}{w^2}\right) \times \exp\left[-i(\omega_0\tau' + \varphi) - a_G^2(1 + iC) \frac{\tau'^2}{T_p^2}\right] \eta \quad (16)$$

其中,

$$\eta = \frac{1}{2} \exp\left[2i\left(a_G^2 C \frac{\tau'^2}{T_p^2} + \omega_0\tau' + \varphi\right)\right] \times \left\{1 - \operatorname{erf}\left[ia_G(1 - iC)^{1/2} \frac{\tau'}{T_p} + \frac{(\omega_0\tau' + \varphi)T_p}{2a_G(1 - iC)^{1/2}\tau'}\right]\right\} + \frac{1}{2} \left\{1 - \operatorname{erf}\left[ia_G(1 + iC)^{1/2} \frac{\tau'}{T_p} - \frac{(\omega_0\tau' + \varphi)T_p}{2a_G(1 + iC)^{1/2}\tau'}\right]\right\} \quad (17)$$

式中,  $\operatorname{erf}$  是误差函数。与 CAE 解相比较, CAS 解多出一项  $\eta$ , 这是由于推导 CAS 解的过程中没有忽略  $g^*(-\omega - \omega_0)$  的缘故, 该项对是否出现奇异性起决定作用。

## 2 奇异性的产生和物理解释

基于 CAE 解研究了复宗量拉盖尔-高斯光束当  $p=1, M=1.5$  时, 在  $z=0$  和  $\tau = -0.1t_0$  的强度分布, 如图 1 所示。其中脉冲周期数  $M$  定义为  $M = T_p/t_0, t_0$

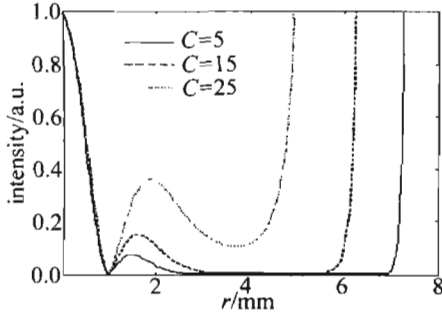


Fig. 1 Radial intensity distributions of CAE solution with  $p=1$  and  $M=1.5$  at  $z=0$  and  $\tau = -0.1t_0$

为一个脉冲周期。从图中可以看出, 复宗量拉盖尔-高斯光束的 CAE 解出现奇异性, 即径向强度分布在径向距离增大到一定值时未趋于 0, 而是出现无限增大的现象。奇异性的出现导致在一定范围内强度分布失去物理意义, 因而 CAE 解也就不能正确描述脉冲光束。但是对于啁啾量较小的脉冲光束, 强度已经趋于 0 后, 在径向距离较长时才出现奇异性, 而靠近光束中心一定范围内 CAE 解还是能正确描述脉冲光束。对于啁啾量较大的脉冲光束, 在强度还未趋于 0 就已经出现奇异性, CAE 解完全不能正确描述脉冲光束。如果采用严格的 CAS 解则不会出现奇异性, 图 2 是 CAS 解当

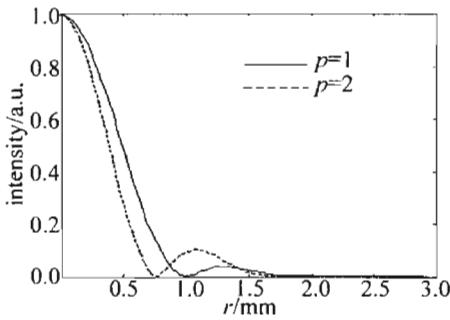


Fig. 2 Radial intensity distributions of CAS solution with  $C=25$  and  $M=1.5$  at  $z=0$  and  $\tau = -0.1t_0$

$C=25, p=1$  和  $p=2, M=1.5$  时, 在  $z=0$  和  $\tau = -0.1t_0$  的强度分布。可以看出, 即使啁啾量较大也不会出现奇异性。因而 CAS 解是严格的解, 只不过其表示式比较复杂。

为了解释啁啾对奇异性的影响, 将 (10) 式改写为以下形式:

$$|E_{p,CAS}(r, z, t)| = \frac{z_R^2}{z^2 + z_R^2} \exp\left[ -\frac{r^2}{w_0^2} \left( 1 + \frac{a_C^2 C \tau}{\omega_0 T_p^2} \right) - \frac{a_C^2 \tau^2}{T_p^2} + \frac{a_C^2 r^4}{\omega_0^2 w_0^4 T_p^2} + \text{Re} \left\{ \ln \left[ L_p \left( \frac{r^2}{w^2} \right) \right] \right\} \right] \quad (18)$$

式中的  $r^4$  项直接导致了奇异性的产生, 随径向距离增大该项使强度出现无限增大的现象。因为  $r^2$  项中包含有啁啾量  $C$ , 因而啁啾量发生变化时奇异性出现的位置  $r_s$  也会改变。图 3 中显示了 CAE 解当  $M=1.5$  时, 在  $z=0$  和  $\tau = -0.1t_0$  的奇异性位置  $r_s$  随啁啾量  $C$

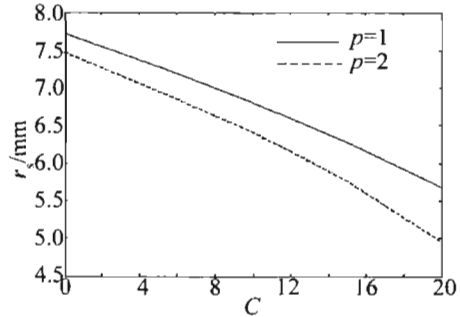


Fig. 3 The singularity position  $r_s$  of CAE solution with  $M=1.5$  versus chirp parameter  $C$  at  $z=0$  and  $\tau = -0.1t_0$

的变化。图中曲线表明, 啁啾增大时奇异性位置更靠近光束中心。(18) 式中  $r^2$  项还包括了参量  $\tau$ , 因而  $r^2$  项的值是正还是负依赖于  $C\tau$  的符号。显然,  $C\tau < 0$  时啁啾增大使奇异性位置更靠近光束中心, 而  $C\tau > 0$  时啁啾增大使奇异性位置远离光束中心。但实际上, 啁啾的增大导致奇异性位置更靠近光束中心的现象总是存在的。只是,  $C\tau < 0$  时, 这种现象出现在以  $\tau = 0$  为分界点的脉冲前沿, 而  $C\tau > 0$  时, 则出现在脉冲后沿。

## 3 脉冲宽度和光束模式对奇异性的影响

在 (18) 式中,  $r^4$  项包含有脉冲宽度  $T_p$ , 因而  $T_p$  也是影响奇异性的重要因素。图 4 中给出了  $C=0, z=0$

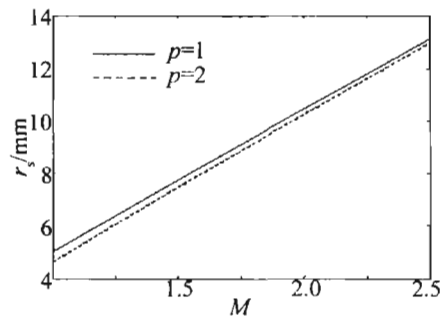


Fig. 4 The singularity position  $r_s$  of CAE solution versus cycle number  $M$  with  $C=0$  at  $z=0$  and  $\tau = 0$

和  $t=0$  时  $r_s$  随  $M$  的变化。从图中可以看出, 在其它参量相同的情况下, 脉冲宽度越大的脉冲, 其 CAE 解的奇异性出现的位置离光束中心越远。令  $C=0, z=0$  和  $t=0$ , 简化 (18) 式为:

$$|E_{p,CAS}(r, 0, 0)| = \exp\left[ -\frac{r^2}{w_0^2} + \frac{a_C^2 r^4}{\omega_0^2 w_0^4 T_p^2} + \text{Re} \left\{ \ln \left[ L_p \left( \frac{r^2}{w^2} \right) \right] \right\} \right] \quad (19)$$

从 (19) 式很清楚看到脉冲宽度对奇异性的影响。式

中  $r^4$  项的分子包含有参量  $T_p, T_p$  越大,使  $r^4$  项的值越小,导致奇异性出现的位置越远,反之奇异性出现的位置越近。

从图3和图4还可以看出,脉冲光束的模式不同也会引起 CAE 解的奇异性出现的位置不一样。在其它参量相同的情况下,模式阶次越高,奇异性越靠近光束中心。这同样可以从(19)式得到解释:阶次越高,(19)式中包含拉盖尔多项式的指数项的值越大,从而使(19)式的值更快趋于无穷大,导致奇异性出现的位置越靠近光束中心。

#### 4 结 论

推导了超短啁啾脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束的解析解,并详细研究了其复振幅包络解的奇异性。复解析信号解是严格的解,不论何种情况都不存在奇异性,但其表示式比较复杂,不利于进一步研究。复振幅包络解存在奇异性,并且脉冲啁啾量、脉冲宽度和模式影响奇异性出现的位置。当奇异性出现在远离光束中心的位置至可以忽略奇异性时,可以采用具有简洁表示式的复振幅包络解来描述脉冲光束,这样有利于进一步的研究。因而在构造脉冲光束的物理模型时,需要根据具体情况进行正确选取。

#### 参 考 文 献

- [1] YAMANE K, ZHANG Z G, OKA K, *et al.* Optical pulse compression to 3.4 fs in the monocycle region by feedback phase compensation[J]. *Opt Lett*, 2003, 28(22): 2258-2260.
- [2] SHVERDIN M Y, WALKER D R, YAVUZ D D, *et al.* Generation of a single-cycle optical pulse [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 94(3): 033904.
- [3] PORRAS M A. Ultrashort pulsed Gaussian light beams [J]. *Phys Rev*, 1998, E58(1): 1086-1093.
- [4] FU X Q, GUO H, HU W, *et al.* Invalidation of the slowly-varying envelope approximation and producing and eliminating of the spatial singularity for ultrashort pulsed-beam propagation in free space [J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(9): 1693-1698 (in Chinese).
- [5] PENG R W, FAN D Y. Comparison of complex amplitude envelope representation with complex analytic signal representation in studying pulsed Gaussian beams [J]. *Opt Commun*, 2005, 246(4/6): 241-248.
- [6] PENG R W, QIAN L J, FAN D Y. Analytical propagation expressions of hyperbolic secant pulsed beams with narrowband and broadband [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2005, 32(5): 637-641 (in Chinese).
- [7] FENG S, WINFUL H G. Higher-order transverse modes of ultrashort isodiffracting pulses [J]. *Phys Rev*, 2001, E63(4): 046602/1-046602/9.
- [8] ZHENG Zh, LIU Y X, LÜ B D. Propagation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beams [J]. *Laser Technology*, 2005, 29(6): 641-644 (in Chinese).
- [9] GAO Z H, ZOU Q H, LÜ B D. Propagation of complex argument Laguerre-Gaussian beams passing through rectangular aperture [J]. *Laser Technology*, 2006, 30(2): 152-154 (in Chinese).
- [10] YANG Z F, YANG Z J, HU W. Ultrashort pulsed complex argument sinc-Gaussian beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(2): 859-862 (in Chinese).
- [11] BORN M, WOLF E. *Principles of optics* [M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999: 461-465.
- [12] HEYMAN E, MELAMED T. Certain considerations in aperture synthesis of ultrawideband/short-pulse radiation [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, 42(4): 518-525.