

文章编号: 1001-3806(2008)06-0651-04

光纤布喇格光栅动态响应特性的计算和分析

黄 沛, 曹建林, 宋 宁*

(上海交通大学 区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 利用传输矩阵法和龙格-库塔法分析光纤布喇格光栅的反射谱和时延特性, 无法得到输入信号变化时光栅的动态响应。为了计算光纤光栅的动态响应, 利用坐标变换结合有限差分法求解耦合波方程, 在此基础上计算了光纤布喇格光栅在连续波与高斯脉冲输入的动态响应特性, 并与龙格-库塔法比较, 结果证明了此算法的正确性。可以利用本文中提出的方法分析输入信号在光纤光栅中的动态传输特性。

关键词: 光纤光学; 光纤布喇格光栅; 耦合波方程; 坐标变换; 有限差分法

中图分类号: TN253 **文献标识码:** A

Analysis of dynamic response characteristic of fiber Bragg grating

HUANG Pei, CAO Jian-lin, SONG Ning

(State Key Laboratory on Fiber Optical Communication Networks and Advanced Optical Communication Systems, Shanghai JiaoTong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Because it is impossible to use the matrix method and Runge-Kutta method to acquire the dynamic response of fiber Bragg grating (FBG) when analyzing the reflection spectrum and time-delay characteristic of FBG, it is proposed to compute the dynamical response characteristic of FBG with respect to the input of continual wave (CW) and Gaussian pulse, by means of coordinate transformation combined with finite difference method. The acquired reflectivity under conditions of the input of CW keeps in accord with that acquired by the Runge-Kutta method, which proves the validity of this method.

Key words: fiber optics; fiber Bragg grating; coupled mode equation; coordinate transformation; finite difference

引 言

光纤布喇格光栅 (fiber Bragg grating, FBG) 作为一种线性无源器件, 具有插入损耗小、与光纤全兼容、体积小、精度高、易掩埋等优点, 在光通信领域和光传感领域已经得到越来越广泛的应用, 例如色散补偿器、滤波器、密集波分复用系统中的光分插复用器、温度传感器、压力传感器等^[1-4]。

在光纤光栅的各种应用中, 大多数是利用 FBG 的耦合反射特性和色散特性^[5-6]。对于 FBG 器件的分析, 则多采用传输矩阵法和龙格-库塔法求解静态的耦合波方程得到光栅的反射谱和时延特性^[7-8], 即 FBG 在恒定输入下当输出稳定时的结果, 如果想得到 FBG 在任意给定输入下透射与反射信号随时间变化的趋势, 这两种方法都无能为力。

作者基于参考文献 [9] 中的坐标变换结合有限差分算法, 给出了一种避开坐标变换的具体实现, 并计算

作者简介: 黄 沛 (1983-), 男, 硕士研究生, 从事光纤光栅非线性研究。

* 通讯联系人。E-mail: dr_nsong@gmail.com

收稿日期: 2007-09-03; 收到修改稿日期: 2007-11-20

均匀 FBG 在连续波输入条件下的动态响应和高斯脉冲输入条件下的输出波形, 计算结果与龙格-库塔法吻合。

1 光纤光栅的耦合波理论

假设光纤光栅的折射率满足如下分布:

$$n(z) = \bar{n} + n_1(z) \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\Lambda}z + \phi(z)\right] + n_2|E(z)|^2 \quad (1)$$

式中, \bar{n} 为光纤光栅的平均折射率, $n_1(z)$ 为折射率调制深度, Λ 为布喇格周期, n_2 为非线性 Kerr 系数, $\phi(z)$ 为调制相位, $E(z)$ 为电场强度, 则光纤光栅中电场强度可以表示为:

$$E(z, t) = [A_+(z, t) \exp(ik_B z) + A_-(z, t) \exp(-ik_B z)] \exp(-i\omega_0 t) \quad (2)$$

式中, z, t 表 z 轴, t 轴, k_B 为布喇格波数, $A_+(z, t)$, $A_-(z, t)$ 分别代表正向波和反向波的包络, 设 $k = \bar{n}\omega_0/c$, ω_0 为载波中心频率, c 为真空中的波速, 则失谐量 δ 定义为:

$$\delta = k - k_B \quad (3)$$

正向波与反向波满足如下的耦合波方程:

$$\begin{cases} +i\frac{\partial A_+}{\partial z} + i\frac{1}{v_g}\frac{\partial A_+}{\partial z} + \delta A_+ + \kappa A_- = 0 \\ -i\frac{\partial A_-}{\partial z} + i\frac{1}{v_g}\frac{\partial A_-}{\partial z} + \delta A_- + \kappa^* A_+ = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中, v_g 为群速度, $\kappa = \pi n_1(z)/\lambda_B$ 为线性耦合系数,

$\lambda_B = 2\bar{n}\Delta$ 为布喇格波长。边界条件如下:

$$\begin{cases} A_+(0, t) = A_0(t) \\ A_-(L, t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中, L 为光栅长度, $A_0(t)$ 为光纤光栅入射端的输入信号, 初始条件为:

$$\begin{cases} A_+(z, 0) = 0 \\ A_-(z, 0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2 耦合波方程的数值求解算法

上述的初边值问题可采用有限差分的方法直接求解, 在沿光栅方向对内点采用中心差分, 对右端点采用前项差分, 在时间方向采用前项差分, 这一方法实现简单, 但是精度和数值稳定性都无法和文献 [10] 中的坐标变换结合有限差分的方法相比, HA RER^[10] 采用的是一种隐式龙格-库塔法, 这一算法具有良好的精度与数值稳定性, 算法如下。

对于 (4) 式的耦合波方程, 先通过坐标变换, 令:

$$\begin{cases} \xi = (z + v_g t) / 2 \\ \tau = (z - v_g t) / 2 \end{cases} \quad (7)$$

则 (4) 式可化为:

$$\begin{cases} \partial A_+ / \partial \xi = i\delta A_+ + ikA_- = G(A_+, A_-, \xi, \tau) \\ \partial A_- / \partial \tau = i\delta A_- + ik^* A_+ = H(A_+, A_-, \xi, \tau) \end{cases} \quad (8)$$

得到关于 ξ, τ 的“常微分方程”。

对于形如 $y' = f(x, y)$ 的常微分方程, 可采用隐式龙格-库塔法求解^[10]。差分公式如下:

$$\begin{cases} y_{n+1/2} = y_n + h \cdot \left[\frac{5}{24} f(x_n, y_n) + \frac{1}{3} f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) - \frac{1}{24} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right] \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{4}{6} f(x_n, y_n) + \frac{2}{3} f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + \frac{1}{6} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right] \\ y_{n+1}^{(0)} = y_n + h \cdot \left[\frac{3}{8} f(x_n, y_n) + \frac{9}{8} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right] \\ y_{n+1}^{(1)} = y_n + h \cdot \left[\frac{4}{3} f(x_n, y_n) - \frac{8}{3} f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + \frac{10}{3} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right] \end{cases} \quad (9)$$

其中, (9) 式为迭代公式, (10) 式为外推公式。

若直接按照文献 [1] 中的算法, 求解 (8) 式得到的结果需要经过 (7) 式的逆变换才得到原坐标系下的结果。可用如下处理, 直接得到原来坐标系下的结果。

对求解区域进行均匀网格剖分, 如图 1 所示。 z 轴与 t 轴方向的步长满足 $\Delta t \cdot v_g = \Delta z = h = L/N$, L 为光栅长度, N 为 z 向网格数, M 为 t 向网格数, 则总时间 $T = (L \cdot M) / (v_g \cdot N)$ 。 A_+, A_- 离散后为: $A_+(n\Delta z,$

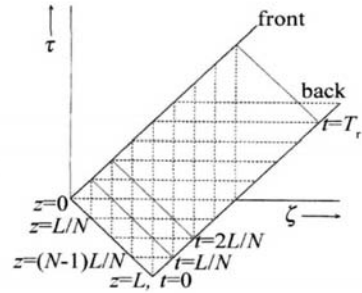


Fig 1 Gridding given area

$m\Delta t) = A_f(n, m), A_-(n\Delta z, m\Delta t) = A_b(n, m), (n=0, 1, \dots, N; m=0, 1, \dots, M)$ 。下标 f, b 分别为正向波和反向波。由图 1 可知, 当满足 $\Delta t \cdot v_g = \Delta z$ 时, 特征线簇的交点恰与网格的格点重合, 此时, 设 t, z 坐标下 $A_+(n\Delta z, m\Delta t) = A_{+,t}(\xi, \tau), A_{+,t}(\xi, \tau)$ 为 ξ, τ 坐标下正向波, 由坐标变换知:

$$\xi = (n\Delta z + v_g \cdot m\Delta t) / 2 \quad (11)$$

$$\tau = (n\Delta z - v_g \cdot m\Delta t) / 2$$

则 $n = n + 1, m = m + 1$ 时:

$$\begin{cases} [(n+1)\Delta z + v_g \cdot (m+1)\Delta t] / 2 = \xi + h \\ [(n+1)\Delta z - v_g \cdot (m+1)\Delta t] / 2 = \tau + 0 \end{cases} \quad (12)$$

故:
$$\frac{A_f(n+1, m+1) - A_f(n, m)}{h} = \frac{A_{+,t}(\xi+h, \tau) - A_{+,t}(\xi, \tau)}{h} \quad (13)$$

由此可知, 在 z, t 坐标下用 $A_f(n, m), A_f(n+1, m+1)$ 即可计算 ξ, τ 坐标下的 (8) 式。这里 A_+, A_- 的值均由沿坐标轴方向的下标索引, 但计算的方向却是沿特征线方向进行, 故省去了计算后对数据的坐标变换。

当 $m=0$ 时, $A_f(n, m), A_b(n, m)$ 由初始条件和边界条件给定, 由于迭代公式 (9) 式为隐格式, 必须预先给出 (9) 式中的迭代初始值, 参考文献 [1] 中没有给出具体的值, 这里采用前向差分:

$$\begin{cases} A_{f, n+1/2, m+1/2}^{(0)} = A_{f, n, m} + h/2 \cdot G_{n, m}, (n=0, \dots, N) \\ A_{b, n-1/2, m+1/2}^{(0)} = A_{b, n, m} + h/2 \cdot H_{n, m}, (n=1, \dots, N+1) \\ A_{f, n+1, m+1}^{(0)} = A_{f, n, m} + h \cdot G_{n, m}, (n=0, \dots, N) \\ A_{b, n-1, m+1}^{(0)} = A_{b, n, m} + h \cdot H_{n, m}, (n=1, \dots, N+1) \end{cases} \quad (14)$$

因计算区域的限制, 据 (14) 式无法计算 $A_{f, 0, m+1}^{(0)}$ 和 $A_{b, N+1, m+1}^{(0)}$, 故需由边界条件在 $m+1$ 时刻的值给出。经 (9) 式迭代若干次后, 可求得 $A_f(n, m+1)$ 与 $A_b(n, m+1), (n=0, \dots, N+1)$, 再经外推公式 (10) 式, 求得 $A_{f, n+3/2, m+3/2}^{(0)}, A_{b, n+3/2, m+3/2}^{(0)}, A_{f, n+2, m+2}^{(0)}$ 和 $A_{b, n+2, m+2}^{(0)}, (n=2, 3, \dots, N-1)$ 。参考文献 [10] 中没指出, 当 $n=0$ 和 $N+1$ 时, 由边界条件给出; 当 $n=1$ 和 N 时, 由 (14) 式给出。

当 $m=1$ 时, 大部分隐格式迭代的初值由前一时刻的外推公式 (10) 式给出, 无法由外推公式 (10) 式给

出的点由 (14) 式和边界条件给出,至此可递推得到每个时刻各格点的值。

3 数值仿真结果与讨论

3.1 连续波输入

利用 FBG 的窄带滤波特性,可将其用作激光器的频率选择器件,此时不仅需要考虑到 FBG 对通带以外频率的抑制能力,还需要考虑当进入 FBG 的信号发生变化时反射率的变化,以保证激光器输出的稳定。

这里,以从信号进入 FBG 到输出不再变化为例,取 $n_1 = 4 \times 10^{-4}$, $n = 1.45$, $L = 0.001\text{m}$, $\lambda_B = 1.55 \times 10^{-6}\text{m}$, $N = 300$, $M = 3000$, 中心波长 $\lambda_1 = 1.5501 \times 10^{-6}\text{m}$ (在带隙内),左边界条件 $A_0(t)$ 为参考文献 [1] 中提到的平滑变化的阶跃函数,计算反射率 $r(0, t) =$

$$\frac{A_-(0, t)}{A_+(0, t)}$$

如图 2 所示。

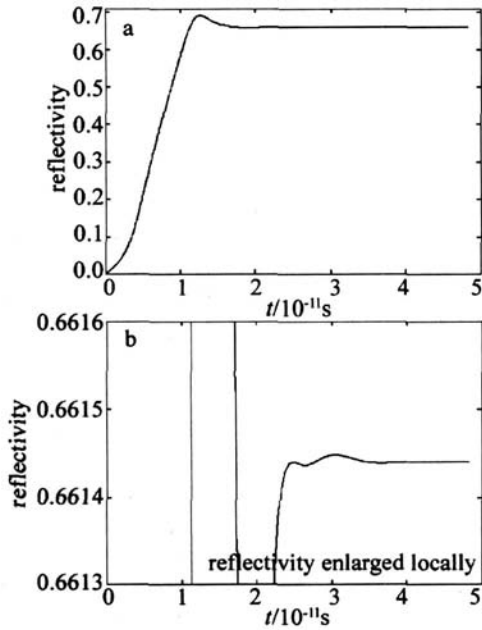


Fig 2 Reflectivity of the grating at $\lambda_1 = 1.5501 \times 10^{-6}\text{m}$

图 2b 为图 2a 在局部放大的结果。由图可知:入射光刚进入光栅时,反射率随着光功率急剧增长,达到峰值后,便上下波动,趋于一个恒定值。表 1 中给出的是不同的 M 值下最终时刻的反射率,即用龙格-库塔

Table 1 Final reflectivity under different M at $\lambda_1 = 1.5501 \times 10^{-6}\text{m}$

M	1200	2000	3000
r	0.660398	0.661446	0.661440
final reflectivity	0.6614111		

法求得的反射率。由表 1 可知,此算法在带隙内可以保证 4 位有效数字的精度,且需经过足够长的时间,所得反射率才能稳定。

当 $\lambda_2 = 1.5504 \times 10^{-6}\text{m}$ 时 (在带隙外),结果见图 3,不同 M 值下,反射率如表 2 所示。

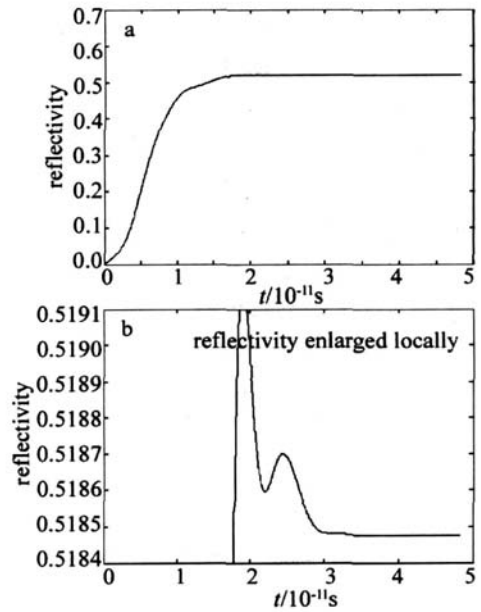


Fig 3 Reflectivity of the grating at $\lambda_2 = 1.5504 \times 10^{-6}\text{m}$

Table 2 Final reflectivity under different M at $\lambda_2 = 1.5504 \times 10^{-6}\text{m}$

M	1200	2000	3000
final reflectivity	0.519153	0.518481	0.518476
final reflectivity	0.518354		

由上可知,在带隙外,可以保证 3 位有效数字。综合以上两种情况,可以验证此算法的正确性。

3.2 线性条件下高斯脉冲输入

FBG 另一个重要应用就是作为色散补偿器,即补偿由于色散造成的脉冲展宽。传输矩阵和龙格-库塔法都是求解静态的耦合波方程,因而无法给出 FBG 在脉冲输入下的响应。这里以高斯脉冲为例,应用本文中所述的算法,解得不同波长的高斯脉冲输入下的响

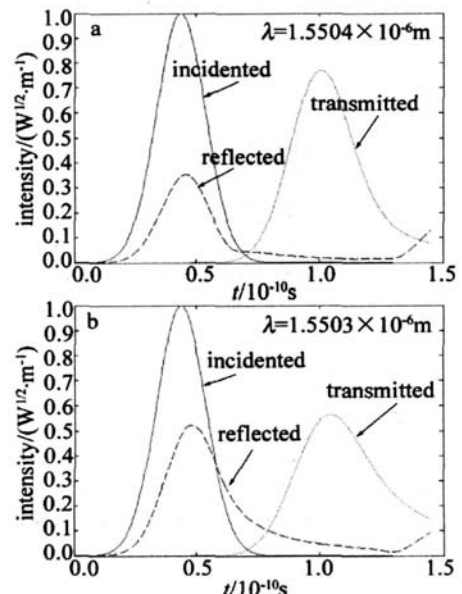


Fig 4 Reflected, transmitted and incident waves of the grating with the input of pulse of different wavelength

应。取 $n_1 = 4 \times 10^{-4}$, $\bar{n} = 1.45$, $L = 0.01\text{m}$, $\lambda_B = 1.55 \times 10^{-6}\text{m}$, $N = 300$, $M = 900$, 脉冲宽度为 20ps , 在 $\lambda = 1.5504 \times 10^{-6}\text{m}$ 和 $\lambda = 1.5503 \times 10^{-6}\text{m}$ 的情况下, 入射光、输出光与反射光的波形分别如图 4 所示。

由图可知, 由于色散的影响, 脉冲被展宽, 且波长偏离布喇格波长越远, 输出脉冲展宽幅度越小, 基于这一特性, FBG 可作为色散补偿器件。

3.3 非线性条件下高斯脉冲输入

如果考虑非线性效应, (4) 式变为:

$$\begin{aligned} & + i \frac{\partial A_+}{\partial z} + i \frac{1}{v_g} \frac{\partial A_+}{\partial z} + \delta A_+ + \kappa A_+ + \\ & \Gamma A_+^2 A_+ + 2\Gamma A_-^2 A_+ = 0 \\ & - i \frac{\partial A_-}{\partial z} + i \frac{1}{v_g} \frac{\partial A_-}{\partial z} + \delta A_- + \kappa^* A_- + \\ & \Gamma A_-^2 A_- + 2\Gamma A_+^2 A_- = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $\Gamma = 2\pi n_2 / \lambda_B$ 为非线性参量, n_2 为非线性 Kerr 系数, 取 $n_2 = 3.2 \times 10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$, 脉冲幅度为 $1 \times 10^8 \text{W}^{1/2}/\text{m}$, $\lambda = 1.5508 \times 10^{-6}\text{m}$ (位于光栅带隙内, 靠近带隙边缘), 其它参量同上, 得到的波形如图 5 所示。

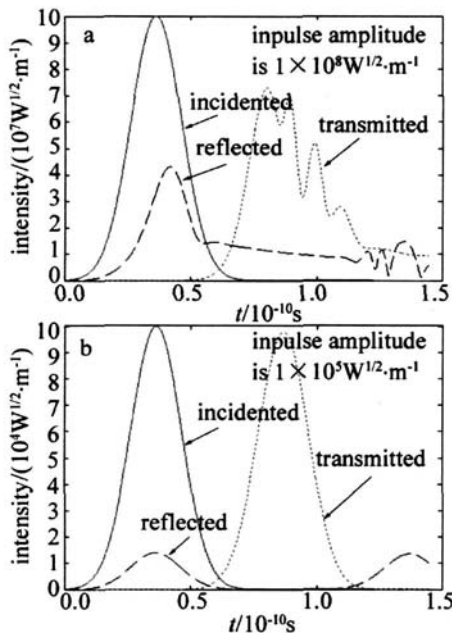


Fig 5 Reflected, transmitted and incident waves of the grating with the input of pulse of different intensity

由上可知, 在非线形情况下, 如果脉冲幅度超过一定值, 输出脉冲会发生脉冲分裂的现象。

4 结论

介绍了利用坐标变换和有限差分法求解耦合波方程的算法, 并给出了一个简单的实现以避开计算后的坐标变换, 进而数值计算了线性情况下均匀 FBG 在连续波输入条件下反射率的动态响应以及高斯脉冲输入下的波形。与龙格-库塔法得到的结果相比, 本文中算法在计算一定的时间间隔后可以得到与之相符的结果, 足以证明算法的正确性。同时计算了考虑非线性效应条件下高斯脉冲, 得到了脉冲分裂的波形。

参考文献

- [1] WANG L B, ZHANG B M, WANG Y F, *et al* A kind of fiber Bragg grating strain sensor with jacket [J]. Laser Technology, 2002, 26(5): 385-387 (in Chinese).
- [2] GUO M J, JIANG D Sh, YUAN H C, *et al* Study on fiber Bragg grating pressure sensors on two different diaphragms [J]. Laser Technology, 2005, 29(6): 611-614 (in Chinese).
- [3] YU D K, QIAO X G, JIA Zh A, *et al* The fiber Bragg grating temperature and pressure sensing system applied in oil pipeline [J]. Laser Technology, 2007, 31(1): 12-14 (in Chinese).
- [4] PENG W B, WU D L, LI H Y. Analysis of response of optical fiber Bragg grating sensors in non-homogeneous strain fields [J]. Optical Technique, 2003, 29(2): 188-190 (in Chinese).
- [5] LI Y J, HU Sh Zh. Study of the nonlinear characteristics of fiber Bragg gratings by transfer matrix method [J]. Science Mosaic, 2005(2): 16-21 (in Chinese).
- [6] LIU Y M, YU Ch Y, YANG H B, *et al* The investigation of the nonlinear characteristics of fiber Bragg gratings [J]. Laser Technology, 2006, 30(1): 101-103 (in Chinese).
- [7] LIU Y, YE Zh Q. Differences between using Runge-Kutta method and matrix method to analyse linear chirped optical fiber grating [J]. Optical Communication Technology, 2002, 26(1): 54-56 (in Chinese).
- [8] YE Zh Q, ZOU D W, ZOU L J, *et al* Analysis of apodized and chirped Bragg fiber gratings using matrix method [J]. Acta Photonica Sinica, 2001, 30(2): 184-187 (in Chinese).
- [9] de STERKE C M, JACKSON K R, ROBERT B D. Nonlinear coupled-mode equations on finite interval: a numerical procedure [J]. J O S A, 1991, 8(2): 403-412.
- [10] HÄRER E, NÖRSETT S P, WANNER G. Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems [M]. 2nd ed Beijing: Science Press, 2006: 211-214 (in Chinese).

(上接第 650 页)

- [4] LIU J Y, YAMAGUCHI I. Fringe locking in a laser diode interferometer by optical feedback during modulation of injection current [J]. Optical Review, 1999, 6(2): 100-103.
- [5] XIE Sh J, CHEN Sh T, LOU Sh T. Application of digital PD algorithms in brushless DC motor [J]. Modern Electronics Technique, 2004, 2(1): 59-61 (in Chinese).
- [6] YU M W. Optical holography and its applications [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996: 402-407 (in Chinese).
- [7] LIC M, WU J H, ZHU Y Y, *et al* The method and device to stabilize holographic interference fringe: China, 200610039967. 6 [P]. 2006-10-11 (in Chinese).
- [8] BORN M, WOLF E. Principles of optics [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005: 247-249 (in Chinese).
- [9] LIU Q, WU J H, LIC M. Design of beam sampling grating and study on its diffraction action [J]. Laser Technology, 2005, 29(4): 398-400 (in Chinese).