

文章编号: 1001-3806(2008)01-0109-04

光阑约束和离轴失调 Lohmann 系统的分数傅里叶变换

于永江, 陈建农, 王德法, 郝金光
(鲁东大学 物理与电子工程学院, 烟台 264025)

摘要: 为了研究受硬边光阑约束及失调 Lohmann 光学系统对分数傅里叶变换的影响, 采用了平顶多高斯光束模型模拟硬边光阑, 推导了平面光波在受硬边光阑约束和系统透镜离轴时的 Lohmann 型分数傅里叶变换光学系统中传播的解析表达式; 计算机模拟了受半径为 7.696cm 的硬边光阑约束和透镜离轴失调量时的输出。结果表明, 在有硬边光阑约束和离轴失调时 Lohmann 两种结构并不等效。

关键词: 傅里叶光学与光信号处理; Lohmann 光学系统; 硬边光阑; 失调

中图分类号: O438.2 **文献标识码:** A

Fractional Fourier transform of hard-edge apertured and misaligned Lohmann's optical system

YU Yong-jiang, CHEN Jian-nong, WANG De-fa, HAO Jin-guang
(Department of Physics, Ludong University, Yantai 264025, China)

Abstract: To study the influence of hard-edge apertured and misaligned Lohmann's optical system on fractional Fourier transforms, the flat-topped multi-Gaussian beam model was adopted to simulate hard-edge apertures. The analytical expressions for transformation of plane wave in a hard-edge apertured and off-axis Lohmann's fractional Fourier transform optical system were derived. The numerical simulation for outputs when the system was apertured with aperture radius of 7.696cm and the lenses were off-axis was also given. It is shown that the two Lohmann's setups are not equivalent when they are apertured and misaligned.

Key words: Fourier optics and optical signal processing; Lohmann's optical system; hard-edge aperture; misalignment

引言

1993 年, MENDLOVIC 和 OZAKTAS 等人首次将分数傅里叶变换引入到光学领域中, 在渐变折射率介质 (gradient-index, GRIN) 中实现了分数傅里叶变换^[1-3]。随后 LOHMANN 提出了两种简单的用透镜和自由空间的组合结构来实现分数傅里叶变换系统^[4]。

理想情况下 LOHMANN 提出的两种分数傅里叶变换光学系统是等效的。但实际的光学系统往往带有硬边光阑, 而且由于失调, 透镜存在离轴偏移量和微小倾斜角, 研究受硬边光阑约束及失调 Lohmann 光学系统对分数傅里叶变换的影响是有实际价值的。在有硬边光阑约束时, 衍射积分大多数情况下无法得到解析表达式^[5-6], 只能进行数值积分, 而且运算量较大, 为此需要将孔径函数展开成有限级数项求和。WEN 和

BREAZEALET 提出的孔径函数展开成有限项复高斯函数和的模型已在很多光束变换研究中被有效地应用^[7-8], 但这种模型在孔径边缘存在较大误差^[8], 因此, 在比较两种结构的等效性时是不理想的。文献 [9] 中讨论了另外两种孔径函数展开模型, 其中第 3 种平顶多高斯光束模型在 N 取较大值时可以十分逼近实际孔径。作者将在用平顶多高斯光束模型模拟硬边光阑的基础上以平面波入射为例研究带硬边光阑及离轴失调的两种 Lohmann 型光学系统的分数傅里叶变换, 分别给出了解析表达式, 讨论其两种结构的等效性, 然后通过计算机数值模拟, 进行分析比较。

1 Lohmann 薄透镜光学分数傅里叶变换系统

图 1a 为 Lohmann 型分数傅里叶变换系统, 输入

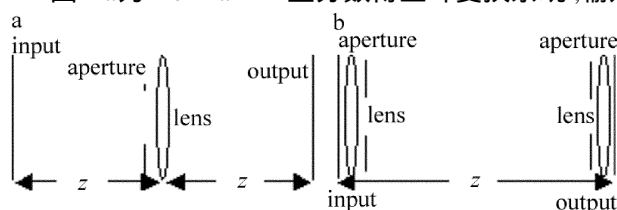


Fig 1 Apertured Lohmann fractional Fourier transform setups

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10604045)

作者简介: 于永江 (1966-), 男, 副教授, 从事自聚焦透镜应用和激光光束变换研究。

E-mail: ldyuyongjiang@yahoo.com.cn

收稿日期: 2006-11-24; 收到修改稿日期: 2007-01-09

面和输出面距透镜的距离均为 z , 透镜的焦距为 f 。当 z 和 f 满足 $z = f_i \tan\left(\frac{p}{4}\right)$, $f = f_i / \sin\left(\frac{p}{2}\right)$ 条件时, 输出函数 $u(x)$ 为输入函数 $u(x_1)$ 的 p 阶分数傅里叶变换。在一维情况下一般定义为:

$$u(x) = \mathbf{F}_p\{u(x_1)\} = \left[-\frac{i}{f_i \sin}\right]^{1/2} u(x_1) \times \exp\left[\frac{i}{f_i \tan} (x_1^2 + x^2) - \frac{i2}{f_i \sin} x_1 x\right] dx_1 \quad (1)$$

式中, λ 是光波波长, f_i 称为标准焦距, 当变换系统确定时为常数。

图 1b 为 Lohmann 型分数傅里叶变换系统。输入面和输出面之间的距离为 z , 透镜的焦距为 f 。当 z 和 f 满足 $z = f_i \sin\left(\frac{p}{2}\right)$, $f = f_i / \tan\left(\frac{p}{4}\right)$ 条件时, 输出函数 $u(x)$ 同样为输入函数 $u(x_1)$ 的 p 阶分数傅里叶变换。当 f_i 和 p 给定后, 两种 Lohmann 分数傅里叶变换装置的系统参数 z 和 f 即可确定。

2 受硬边光阑约束和离轴失调 Lohmann 光学系统的分数傅里叶变换

Lohmann 分数傅里叶变换系统是一个理想系统, 而实际光学系统大都受硬边光阑约束, 透镜孔径本身就是一个硬边光阑, 需考虑硬边光阑对光束传播与变换的影响。另一方面, 由于各种原因造成的失调, 需考虑两种系统中透镜的离轴偏移量和微小倾斜角。对于薄透镜来说, 由于它对倾斜不敏感, 因此仅考虑离轴偏移。

2.1 Lohmann 型分数傅里叶变换光学系统

如图 1a 所示, 考虑一维简单情况, 以单位复振幅平面光波垂直入射, 入射面上的复振幅分布可表示为: $u(x_1) = 1$ 。硬边光阑之前的平面复振幅分布跟入射面上的复振幅分布相同, 即: $u(x_2) = 1$ 。

设硬边光阑的半径为 B , 其孔径函数可表示为:

$$A(x_2) = \begin{cases} 0, & |x_2| > B \\ 1, & |x_2| \leq B \end{cases} \quad (2)$$

那么, 紧靠硬边光阑之后的平面上的复振幅分布为: $u(x_2) = u(x_2)A(x_2) = A(x_2)$ 。假定透镜很薄, 且有一离轴偏移量 z , 其后平面上复振幅分布为:

$$u(x_2) = u(x_2) t(x_2) = A(x_2) t(x_2) = A(x_2) \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_2 + z)^2\right] \quad (3)$$

$k = 2\pi/\lambda$ 为波数。根据自由空间菲涅耳衍射公式, 输出平面上光波的复振幅分布可表示为:

$$u(x) = \frac{1}{i} \frac{\exp(ikz)}{z} A(x_2) \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_2 + z)^2\right] \times$$

$$\exp\left[i\frac{k}{2z}(x - x_2)^2\right] dx_2 \quad (4)$$

受孔径函数的约束, 上式的积分区间实际上为 $(-B, +B)$, 无法进行解析积分, 只能进行数值计算。MAO 等人^[9]分析了孔径函数利用有限项函数叠加的 3 种表示形式, 讨论了各自最佳适用条件, 在孔径较大的情况下, 孔径函数可用平顶多高斯光束模型展开如下:

$$A(x_2) = \sum_{n=-N}^N \frac{\exp[-(x_2/b - n)^2]}{\sum_{n=-N}^N \exp(-n^2)} \quad (5)$$

式中^[10],

$$b = \frac{B}{N + 1 - \ln \sum_{m=-N}^N \exp(-m^2)}^{1/2} \quad (6)$$

式中, b 为小高斯函数的半峰全宽, B 为孔径函数的半峰全宽 (指峰值从任一侧下降到 $1/e$ 时的宽度), 即 N 个半峰全宽为 b 的高斯函数按 (5) 式叠加可形成类似孔径函数的半峰全宽为 B 的平顶多高斯光束模型, 如图 2 所示。当 b 确定后, B 可由 (6) 式确定。图 3 表示了 N 取值越大, N 项函数叠加表示的孔径函数越接近实际硬边光阑。

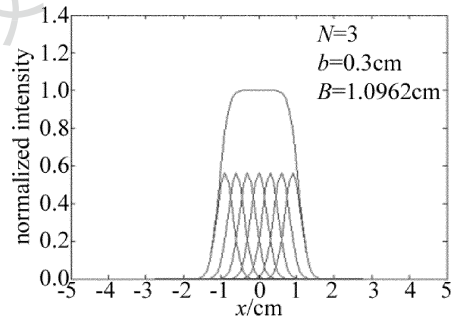


Fig 2 Aperture function illustration

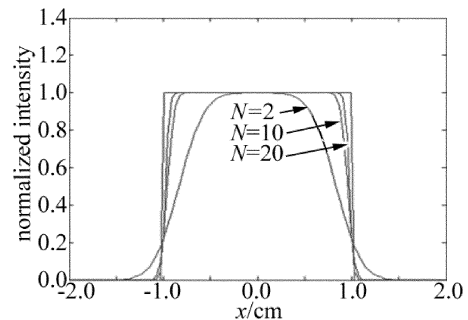


Fig 3 Comparison with real aperture when takes N different values

将 (5) 式代入 (4) 式得:

$$u(x) = \frac{1}{i} \frac{\exp(ikz)}{z} \frac{\sum_{n=-N}^N \exp[-(x_2/b - n)^2]}{\sum_{n=-N}^N \exp(-n^2)} \times \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_2 + z)^2\right] \exp\left[i\frac{k}{2z}(x - x_2)^2\right] dx_2 \quad (7)$$

应用积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-l^2 x^2 - qx) dx = \exp\left(\frac{q^2}{4l}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{l}, [\operatorname{Re} l > 0] \quad (8)$$

将 (7) 式化为：

$$u(x) = \frac{1}{i} \frac{\exp\left[ik\left(z + \frac{x^2}{2z} - \frac{1}{2f} - \frac{(x+z)^2}{2f}\right)\right]}{z} \times \prod_{n=-N}^N \left\{ \exp(-n^2) \exp\left[\frac{ikx}{z} - \frac{2n}{b} + \frac{ik}{f}\right] \exp\left(-\frac{n^2}{4} \frac{1}{b^2} + \frac{ik}{2f} - \frac{ik}{2z}\right) \right\} \times \prod_{n=-N}^N \exp(-n^2) \quad (9)$$

2.2 Lohmann 型分数傅里叶变换光学系统

如图 1b 所示, 单位复振幅平面光波从左边垂直入射, 依次经过单透镜变换、硬边光阑 1、自由空间衍射、硬边光阑 2, 再通过单透镜变换后输出, 假定两个孔径大小不同, 半峰全宽为 B_1 和 B_2 , 而用于模拟两个孔径的小高斯函数半峰全宽为 b_1 和 b_2 。当两个透镜都有离轴失调, 各自失调量为 z_1 和 z_2 时, 那么输出面的复

振幅分布为：

$$u(x) = \frac{1}{i} \frac{\exp\left[ik\left(z + \frac{x^2}{2z} - \frac{1}{2f} - \frac{(x+z)^2}{2f}\right)\right]}{z} \times \prod_{n=-N}^N \left\{ \exp(-n^2) \exp\left[\frac{ikx}{z} - \frac{2n}{b_1} + \frac{ik}{f_1}\right] \exp\left(-\frac{n^2}{4} \frac{1}{b_1^2} + \frac{ik}{2f_1} - \frac{ik}{2z}\right) \right\} \times \prod_{n=-N}^N \exp(-n^2) \quad (10)$$

3 计算机模拟结果

图 4a、图 4c、图 4e、图 4g 是 (9) 式计算机模拟结果; 而图 4b、图 4d、图 4f、图 4h 是 (10) 式计算机模拟结果。其中激光波长 $\lambda = 0.00006328 \text{ cm}$, 其它参数设定如下: $b = 0.3 \text{ cm}$, $b_1 = 0.3 \text{ cm}$, $b_2 = 1 \text{ cm}$, $N = 25$, $f_1 = 100 \text{ cm}$, $z_1 = -2 \text{ cm}$, $z_2 = 1 \text{ cm}$, 由 (6) 式可得相应的光阑半峰全宽 B, B_1, B_2 分别为: 7.696 cm ,

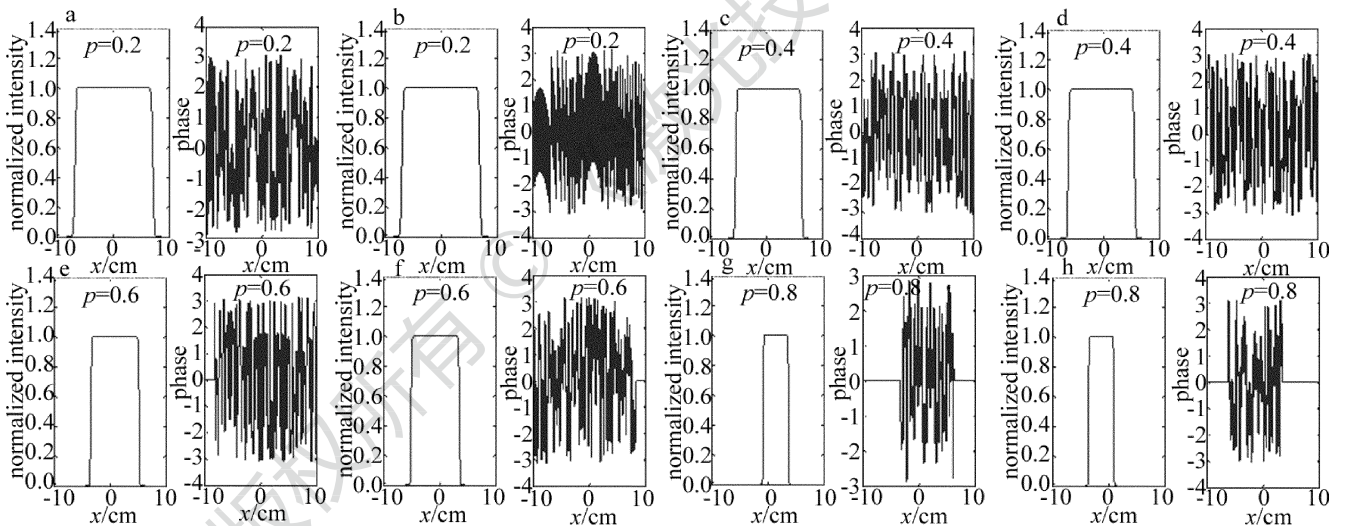


Fig 4 Transformation results of plane wave input of apertured and off-axis Lohmann's fractional Fourier transform system

7.696cm, 25.654cm, 而 p 分别为 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 时的输出光强和位相分布。如前所述, 当 f_1 和 p 给定后, 两种 Lohmann 分数傅里叶变换装置的系统参数 z 和 f 即可确定。首先从图中光强分布得出结论, 输出光强分布与孔径函数一样, 不存在孔径边缘误差较大的现象。由于有限项复高斯函数和的模型, 边缘存在较大的误差^[7], 由此, 模型得出的输出光强分布将引入较大的边缘误差。故顶多高斯光束模型模拟硬边光阑优于展开成有限项复高斯函数和的模型。 $N = 25$ 时, (5) 式对硬边光阑的模拟已非常精确, 因此, 该模

型适合于研究光学系统的差异, 分析误差来源等情况。比较图中同一 p 值时, 两种系统输出光强分布与位相分布可以看出: 当实际光学系统存在硬边光阑和透镜离轴失调时, 两种系统的分数傅里叶变换结果无论是振幅还是位相都有差异, 但在 p 较小时, 差异相对较小。因此, 两种系统已不再等效。图 5 是其它参数不变, $b = 0.00005 \text{ cm}$ 和 $b_1 = 0.00005 \text{ cm}$ 时输出光强分布和位相分布。此时光阑半峰全宽 B, B_1 均为: 0.0013 cm 。可以认为是小孔衍射光强分布的分数傅里叶变换。这时硬边光阑对输出光强分布的影响起决

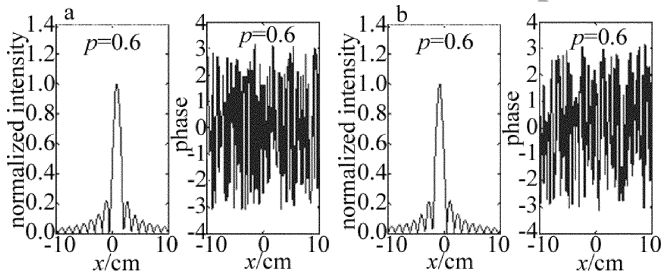


Fig 5 Transformation results of plane wave input of micro-apertured and off-axis Lohmann's fractional Fourier transform system

定和主导作用的是衍射效应。从图5可以看出,输出光强分布已完全不是平面光波。但透镜离轴失调仍然使光强分布和位相分布发生变化。故两种系统仍然不等效。

4 结论

对LOHMANN提出的两种分数傅里叶变换光学系统,在受硬边光阑约束和透镜离轴失调时分数傅里叶变换特点进行了研究,在选择硬边光阑平顶多高斯光束模型展开式的基础上,得到了平面波输入时分数傅里叶变换的高精度解析表达式,并给出了计算机模拟结果。可以看到,在受硬边光阑约束和透镜离轴失调时,两种分数傅里叶变换光学系统是有差异的,无论是光强分布还是位相分布都将不同。从解析表达式和计算机模拟结果可以看出其中的决定因素。这些结论对Lohmann系统在光学信息处理如分数相关,特征识别

中的应用有一定的意义。

参考文献

(上接第52页)

始脉冲峰值功率最佳值;当初始脉冲中心波长位于反常色散区时,正啁啾有利于光谱展宽,负啁啾则不利于光谱展宽,对给定的光纤长度可得出一个光谱最宽的啁啾点。这些结论对优化超连续谱提供了理论依据。

参考文献

- [1] YU Y Q, RUAN Sh Ch, ZENG J Ch, *et al* Supercontinuum generation in photonic crystal depends on pump wavelengths [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, 34 (9): 1293-1296 (in Chinese).
- [2] ZHENG Y, ZHANG Y P, HUANG X J, *et al* Supercontinuum generation with 15fs pump pulses in a microstructured fiber with combination random and core distributions [J]. *Chinese Physics Letter*, 2004, 21 (4): 750-753.
- [3] KNIGHT J C, ARRAGA J, BRKS T A. Anomalous dispersion in photonic crystal fiber [J]. *Photonics Technology Letters*, 2000, 12 (7): 807-809.
- [4] PAN Y Zh, ZHANG J, HU G J, *et al* Photonic crystal fiber and laser [J]. *Laser Technology*, 2004, 28 (1): 48-51 (in Chinese).
- [5] UDEM T, HOLZWARTH R, HANSCH T W. Optical frequency metrology [J]. *Nature*, 2002, 416 (6877): 233-237.
- [6] HARLL I, LIX D, CHUDOBAC. Ultrahigh resolution optical coherence tomography using continuum generation in an airsilica microstructure optical fiber [J]. *Opt Lett*, 2001, 26 (9): 608-610.

- [1] MENDLOVIC D, OZAKTAS H M. Fractional Fourier transforms and their optical implementation [J]. *J O S A*, 1993, A10 (9): 1875-1881.
- [2] OZAKTAS H M, MENDLOVIC D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation [J]. *J O S A*, 1993, A10 (12): 2522-2531.
- [3] OZAKTAS H M, MENDLOVIC D. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation [J]. *Opt Commun*, 1993, 101: 163-169.
- [4] LOHMANN A W. Image rotation, wigner rotation, and fractional Fourier transform [J]. *J O S A*, 1993, A10 (10): 2181-2186.
- [5] ZHAO G P, LÜB D. Propagation of Gaussian beams passing through complicated ABCD optical system with internal hard-edge aperture [J]. *Laser Technology*, 2003, 27 (4): 299-301 (in Chinese).
- [6] LIU Y X, JI X L, LÜB D. Comparative study of simulation algorithm for hard-edge optics [J]. *Laser Technology*, 2004, 28 (6): 652-654 (in Chinese).
- [7] LU H Zh, XU R W, LIU L R, *et al* Far-field approximation and divergence of Gaussian beam with phase aberrations diffracted by a circular aperture [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, 26 (1): 131-135 (in Chinese).
- [8] SUN D, ZHAO D W. Wigner distribution function of Hermite-cosine-Gaussian beams through an apertured optical system [J]. *J O S A*, 2005, A22 (8): 1683-1690.
- [9] MAO H D, ZHAO D W. Different models for a hard-aperture function and corresponding approximate analytical propagation equations of a Gaussian beam through an apertured optical system [J]. *J O S A*, 2005, A22 (4): 647-653.
- [10] TOVAR A A. Propagation of flat-topped multi-Gaussian laser beams [J]. *J O S A*, 2001, A18 (8): 1897-1904.

- [7] HUSAKOU A V, HERMANN J. Supercontinuum generation of higher-order solitons by fission in photonic crystal fibers [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87 (20): 203901. 1-203901. 4.
- [8] HERRMANN J, GRIBNER U, ZHAVORONKOV N, *et al* Experimental evidence for supercontinuum generation by fission of higher-order solitons in photonic crystal fibers [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 88 (17): 173901. 1-173901. 4.
- [9] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optics and applications of nonlinear fiber optics [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2002: 32 (in Chinese).
- [10] JIAN Y Q, YAN P G, LÜK Ch, *et al* Experimental study and numerical analysis of femtosecond pulse propagation and supercontinuum generation in highly nonlinear photonic crystal fiber [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55 (4): 1809-1814 (in Chinese).
- [11] CHENG Ch F, WANG X F, LU B. Nonlinear propagation and supercontinuum generation of a femtosecond pulse in photonic crystal fibers [J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53 (6): 1826-1830 (in Chinese).
- [12] SCHREIBER T, LMPERT J, ZELLMER H. High average power supercontinuum generation in photonic crystal fibers [J]. *Opt Commun*, 2003, 228: 71-78.
- [13] LIU W H, WANG Y Sh, LIU H J, *et al* Effect of initial chirp on supercontinuum generation by femtosecond pulse in photonic crystal fibers [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55 (4): 1815-1820 (in Chinese).