

文章编号: 1001-3806(2007)03-0295-03

## 柯林斯公式的近似计算及应用研究

王 敏, 黎 南, 李迅鹏, 李俊昌\*  
(昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

摘要: 为了验证柯林斯公式的一种近似计算方法, 对光波通过方形孔径光阑及一薄透镜时的衍射图像进行理论计算, 并与实验结果进行比较。研究表明, 理论计算与实验结果一致。利用该方法对透镜的焦距进行了测量, 将测量结果与传统方法测得的焦距进行比较, 两者误差不到 1%。

关键词: 激光光学; 柯林斯公式; ABCD 系统; 衍射条纹; 焦距测量

中图分类号: O436.1 文献标识码: A

### Approximate calculation of Collins' formula and application research

WANG Min, LIN Nan, LIXun-peng, LI Jun-chang

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract** In order to validate the approximate algorithm of Collins' formula the diffraction images for a light wave that passes a thin lens from a quadrate aperture were evaluated numerically and compared with the experimental results. It is shown that the experimental results are in agreement with the computation results. Therefore, this approximate method is applied to the measurement of the lens focus and the focus error between the approximate method and traditional method is less than 1%.

**Key words** laser optics; Collins' formula; ABCD system; diffraction stripe; focus measurement

### 引 言

长期以来, 衍射计算一直是光学中遇到的最困难的问题之一<sup>[1]</sup>。近年来, 由于计算机技术的飞速发展, 计算机的应用为完成衍射计算提供了极大的方便。目前, 已经形成许多衍射的计算方法。如 GRAVEL-SAETER 等人<sup>[2]</sup>把相位和振幅线性化的方法应用到基尔霍夫衍射积分中, 近似地获得了积分的解析解。但该方法只适用于矩形孔径的衍射问题。STAMNES 等人<sup>[3]</sup>提出了对一维基尔霍夫公式的振幅和相位因子做二阶抛物面近似, 并提出虽然繁杂但可以计算任意形状孔径的衍射积分。KRAUS<sup>[4]</sup>提出了基尔霍夫衍射积分的线有限元和面有限元公式。其中, 用四次等参数元来分割衍射孔径, 一个任意孔径的衍射问题被分解为若干基元衍射之和, 每一个基元的场分布可以通过数值高斯求积分方法求出。

但是, 以上的衍射计算研究考虑的只是光波在介质空间中传播时从一个空间平面到另一个空间平面的

计算问题, 当光波通过由多个元件及不同性质的介质空间组成的光学系统时, 如果要进行严格的计算, 必须将光学系统分解成可以直接使用基尔霍夫公式为代表的经典标量衍射计算公式的子系统, 通过对各子系统的光波场的空间追迹, 完成衍射计算<sup>[5]</sup>, 在处理实际问题时仍多有不便。1970年, 柯林斯基于矩阵光学及程函理论, 根据菲涅耳衍射积分导出了十分方便的柯林斯公式<sup>[6]</sup>, 当光学系统可以用四矩阵元素 ABCD 描述时, 可以通过一个二重积分表达式完成光波通过光学系统的衍射计算问题。理论分析表明<sup>[5]</sup>, 柯林斯公式也可基于 1896年瑞利提出的出射光瞳衍射近似及菲涅耳衍射积分导出, 并且, 柯林斯公式的数学形式与菲涅耳衍射积分十分相似, 对菲涅耳衍射积分的所有计算方法在原则上也能直接移植于柯林斯公式的计算。

作者首先回顾柯林斯公式的代数运算方法<sup>[5]</sup>, 然后对光波通过方形孔径光阑及一薄透镜时的衍射图像进行理论计算并与实验进行比较, 以对所提出的近似计算方法的可行性作出证明。最后将该近似计算方法用于薄透镜焦距的测量, 并将测量结果与传统的牛顿环法<sup>[7]</sup>进行了比较。

### 1 柯林斯公式的代数运算

下面首先回顾入射平面是矩形孔的柯林斯公式的代数计算方法, 给出近似计算公式, 为数值计算光衍射

基金项目: 云南省自然科学基金资助项目 (2005F0025M)

作者简介: 王 敏 (1980-), 女, 硕士研究生, 研究方向为衍射的数值计算。

\* 通讯联系人。E-mail: jell@vip.163.com

收稿日期: 2006-02-17; 收到修改稿日期: 2006-03-28

场作准备。

由于任意形状的衍射孔总可以由不同尺寸及不同数量的矩形孔的叠加足够准确地描述,只要研究入射平面上的透光孔是一个任意位置矩形孔的衍射问题,便能根据衍射积分的线性叠加性质综合出入射平面是任意形状透光孔时的柯林斯公式的计算方法。因此,设光学系统的入射平面是一个边长分别为  $2L_x, 2L_y$  的矩形孔,照明光源的复振幅为  $U_0(x_0, y_0)$ , 矩形孔的两边分别与坐标轴平行,中心在  $(x_0, y_0)$  处。

通过数值分析,并引入符号函数  $\text{sgn}()$ , 得出以下计算式<sup>[5]</sup>: 
$$U(x, y) = \frac{\exp(iKL)}{i} \exp\left[i\frac{kC}{2A}(x^2, y^2)\right] \times [U_{00}(x, y) + U_{\alpha}(x, y) + U_{\beta}(x, y)] \quad (1)$$
 式中,

$$U_{00}(x, y) = \frac{1}{2} U_0\left(\frac{x}{A}, \frac{y}{A}\right) \{ [C(\xi_{2i}(x)) - C(\xi_{1i}(x))] + i \text{sgn}(AB) [S(\xi_{2i}(x)) - S(\xi_{1i}(x))] \} \times \{ [C(\eta_{2i}(y)) - C(\eta_{1i}(y))] + i \text{sgn}(AB) [S(\eta_{2i}(y)) - S(\eta_{1i}(y))] \} \quad (2)$$

当  $U_0$  代表未经变换的,直接来自激光设备的激光振幅分布时,光束分布的空间变化率不高,在光学系统的傍轴区,只使用(2)式简明研究光波通过矩形孔衍射时的光场分布,也能够得到很好的结果。(2)式中,  $S(x), C(x)$  是菲涅耳函数,可以近似为<sup>[5]</sup>:

$$S(x) = \begin{cases} x \sin\{0.5567 \exp[-(1.5545x - 1.9941)^2]\}, & (x \leq \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} - \frac{1 - 0.049 \exp[-2(x - \sqrt{2})]}{\pi x} \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right), & (x > \sqrt{2}) \end{cases} \quad (3)$$

$$C(x) = \begin{cases} x \cos(0.6855x^2), & (x \leq 1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1 - 0.121 \exp[-2(x - 1)]}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right), & (x > 1) \end{cases} \quad (4)$$

通过验证,(3)式、(4)式的计算结果与菲涅耳函数准确值的相对误差通常不到 1%,使用这个结果显著提高了计算衍射问题的效率。于是,入射平面透光孔是矩形孔的柯林斯公式可以转化为代数式计算。

根据上述公式,则可以通过下式计算光波经过矩形孔径光阑及 ABCD 系统衍射后的强度分布:

$$I(x, y) = U(x, y)U^*(x, y) \quad (5)$$

可见,对于一个复杂的衍射孔,只要将其分解为若干不同尺寸的矩形孔之和,便能够通过各矩形衍射孔衍射场复振幅的叠加获得其解<sup>[5]</sup>。

当照射光为单位振幅均匀平面波,矩形孔的边长足够大时,利用上述结果,有下述直边衍射条纹的间隔

公式<sup>[5]</sup>。

从几何投影边界算起,第  $n$  个衍射亮条纹到投影边界的距离为:

$$D_{\max}(n) = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+1/2}}{2} \times \sqrt{|\lambda BA|}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

以零级衍射亮条纹为基准,相邻衍射亮条纹与零级衍射亮条纹的间隔为:

$$S(n) = \frac{1}{2} \sqrt{|\lambda BA|} \times [\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+1/2} - \sqrt{1} - \sqrt{1/2}] \quad (7)$$

不难看出,(7)式简明地描述了直边衍射条纹分布与 ABCD 系统参数的关系,它是由柯林斯公式的代数运算方法得出,因此,可以利用(7)式来计算衍射条纹间隔并通过与实验结果比较,以证明近似计算的可行性。在稍后的讨论中可以看出,该式可以应用于透镜焦距的测量。

## 2 模拟结果和实验的比较

为了验证上述近似计算的可行性,先对如图 1 所示的光路的衍射图样进行数值模拟。图中,准直后的

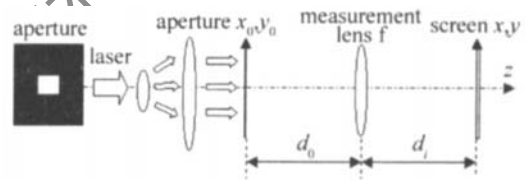


Fig 1 The optical system for the experiment

He-Ne 激光经扩束镜扩束后,形成平行光照射到具有一个方孔的光阑上,方孔边长 10mm,透过光阑的光波传播到待测透镜  $f$  并穿过透镜到达观测屏。其中,  $d_0$  和  $d_i$  分别为光阑平面到待测透镜平面的距离以及待测透镜到观察屏的距离。根据矩阵光学理论,无透镜  $f$  情况时的光学矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_0 + d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

插入透镜  $f$  后光学矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d_i/f & d_0(1 - d_i/f) + d_i \\ -1/f & 1 - d_0/f \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中,  $f$  为待测透镜焦距。令照明光阑的光波是波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  的均匀平面波,根据(8)式、(9)式及实验测量确定的矩阵元素后,代入(5)式及相关各式,可求得观测平面衍射场的强度分布。将计算结果处理成 0~255 等级的强度后,用计算机形成相应灰度等级的模拟衍射图像,如图 2 所示。

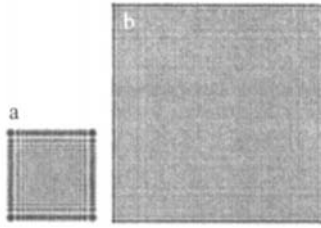


Fig 2 The simulated diffraction images

a—the diffraction image before the thin lens in optical system (size 1 cm × 1 cm,  $d_0 + d_i = 141.5\text{ cm}$ ) b—the diffraction image after the thin lens in optical system (size 5.1 cm × 5.1 cm,  $d_0 = 15.5\text{ cm}$ ,  $d_i = 126.0\text{ cm}$ )

然后根据图 1 的实验光路做了两组实验。第 1 组实验是在光路中不放入待测薄透镜  $f$  移动 3 次观察屏, 得到 3 张衍射图; 第 2 组实验是在光路中放入待测薄透镜  $f$  固定  $d$  的位置, 只移动观察屏, 再得到 3 张衍射图。在观测平面上用全息干版记录衍射光波场的强度分布。全息干版经曝光、显影、定影、漂洗及干燥后, 可以通过所记录的灰度图像观测衍射场的强度分布。作为实例, 图 3 是两幅实测图像。

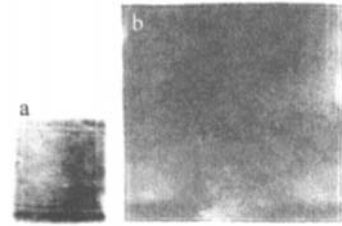


Fig 3 The diffraction images getting from the experiment

a—the diffraction image before the thin lens in optical system (real size 1 cm × 1 cm,  $d_0 + d_i = 141.5\text{ cm}$ ) b—the diffraction image after the thin lens in optical system (real size 5.1 cm × 5.1 cm,  $d_0 = 15.5\text{ cm}$ ,  $d_i = 126.0\text{ cm}$ )

将实验图像与模拟图像进行比较, 获得满意结果。不难看出, 如果忽略照明光强度分布及全息片感光或化学处理引入的不均匀性, 模拟计算与实验测量十分相似, 特别是理论模拟的干涉条纹分布与实验测量吻合甚好。为定量说明这一点, 表 1 是对两个不相同探测距离得到的衍射图样, 分别以零级衍射条纹为基准, 给出直边衍射亮纹间距的理论计算与实验测量的比较。

表 1 中, 第 2 第 6 列为根据柯林斯公式的近似计

Table 1 Compared between theory and experiment results for bright striape of diffraction at different detection location

$d_i = 1260\text{mm}$	theory interval of	experiment interval	relative error/%	$d_i = 1459\text{mm}$	theory interval	experiment interval	relative error/%
	stripe/mm	of stripe/mm			of stripe/mm	of stripe/mm	
S(1)	0.986	0.978	0.8	S(1)	1.130	1.131	0.1
S(2)	1.627	1.624	0.2	S(2)	1.865	1.896	1.7
S(3)	2.142	2.152	0.5	S(3)	2.456	2.497	1.7
S(4)	2.584	2.637	2.0	S(4)	2.962	2.992	1.0
S(5)	2.978	3.021	1.4	S(5)	3.414	3.480	1.9

算, 由 (7) 式得到的亮条纹间距结果, 第 3 第 7 列为实际测量得出的亮条纹间距结果。可以看出, 理论计算与实际测量之间的相对误差最大只有 2%, 因此, 这种代数近似计算方法是可行的。

### 3 薄透镜焦距的测量

以上验证了这种柯林斯公式近似计算方法的可行性, 因此, 可以把它应用于薄透镜焦距的测量。

根据 (9) 式有:

$$AB = d_0(1 - d_i/f)^2 + d_i(1 - d_i/f) \quad (10)$$

由于 (7) 式建立了衍射条纹间距与 ABCD 光学系统中矩阵元素 A 和 B 乘积的关系, 且光波通过矩形孔或直边衍射孔后衍射图像上的衍射条纹间距容易测量, 因此, (10) 式中 AB 的值能够通过衍射亮条纹的间距  $S(n)$  求出,  $d_0$ ,  $d_i$  的值可以直接测量, 因而可以解方程 (10) 求出薄透镜焦距  $f_0$ 。表 2 是一组测量薄透镜焦距的实验数据及测量结果。

根据 3 张实验衍射图, 最终得到薄透镜焦距的平均值  $f = 20.7\text{ cm}$ 。

Table 2 The experiment data and results about focus measurement

$d_0 = 15.5\text{ cm}$ , $d_i = 126.0\text{ cm}$	$\bar{S}(1)$	$\bar{S}(2)$	$\bar{S}(3)$	$\bar{S}(4)$	$\bar{S}(5)$
	$S(n)/\text{mm}$	0.978	1.624	2.152	2.637
$ AB /\text{m}$	2.344	2.375	2.405	2.482	2.452
focus $f/\text{cm}$	20.2	20.5	20.8	21.8	21.4

为对所求焦距测量的可靠性进行验证, 用牛顿环测透镜曲率半径的方法<sup>[7]</sup>对同一透镜进行了测试, 得出透镜的焦距为  $f = 20.55\text{ cm}$ 。可见, 测量结果是可靠的。

### 4 讨论与结论

对柯林斯公式的一种近似计算方法进行了计算机模拟和实验验证, 通过对模拟结果和实验结果比较, 证明了这种近似方法的可行性。另外, 由于所研究的衍射近似计算方法是把柯林斯公式转化为代数式, 因此, 该近似计算方法大大提高了计算效率。最后, 将该计算方法导出的直边衍射条纹公式应用到透镜焦距的测量, 并对测量结果进行了讨论。期望所做的工作能为衍射计算研究及光学测量提供有益的参考。

(下转第 305 页)

效果,然而由于其机理复杂,影响因素众多,目前,国际上对其机理的研究还很不深入,我国在这方面的研究才刚刚开展,研究细微颗粒的短脉冲激光清除对于我国工业技术创新和学术理论的丰富完善有着重要意义。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] ZHAO Zh M. The application of laser cleaning technology in micro electronics in industry field [ J ]. *Cleaning Technology*, 2004, 2( 8 ): 29~ 34( in Chinese ).
- [ 2 ] ZHENG Y W, LUK YANCHUK B S, LU Y F *et al*. Dry laser cleaning of particles from solid substrates experiments and theory [ J ]. *J A P*, 2001, 90( 5 ): 2137~ 2142
- [ 3 ] TAM A C, LEUNG W P, ZAPKA W *et al*. Laser-cleaning techniques for removal of surface particulates [ J ]. *J A P*, 1992, 71( 7 ): 3515~ 3523
- [ 4 ] LU Y F, SONG W D, LOW T S. Laser cleaning of micro-particles from a solid surface— theory and applications [ J ]. *Materials Chemistry and Physics* 1998, 54( 1 ): 181~ 185.
- [ 5 ] FOURRER T, SCHREMS G, MUHLBERGER T *et al*. Laser cleaning of polymer surfaces [ J ]. *Appl Phys* 2001, A72( 1 ): 1~ 6.
- [ 6 ] KERRY JD, STUFFM IHOVUS F E *et al*. Removal of small particles from surfaces by pulsed laser irradiation. [ J ]. *Proc SPIE*, 1991, 1415 211~ 219
- [ 7 ] LU Y F, ZHENG Y W, SONG W D. Laser induced removal of spherical particles from silicon wafers [ J ]. *J A P*, 2000, 87( 3 ): 1534~ 1539
- [ 8 ] SONG W D, HONG M H, LEE SH *et al*. Real-time monitoring of laser cleaning by an airborne particle counter [ J ]. *Applied Surface Science*, 2003, 208( 2 ): 306~ 310.
- [ 9 ] DOBLER V, OLTRA R, BOQUILLON J P *et al*. Surface acceleration during dry laser cleaning of silicon [ J ]. *Appl Phys* 1999, A69( 7 ): 335~ 337.
- [ 10 ] LI J Ch. Calculation of laser diffraction and heat interaction [ M ]. Beijing: Science Press, 2001. 341~ 432( in Chinese ).
- [ 11 ] TAM A C, PARK H K, GRIGOROPOULOS G P. Laser cleaning of surface contaminants [ J ]. *Applied Surface Science* 1998, 127( 3 ): 721~ 725.
- [ 12 ] LU Y F, SONG W D, ANG B W *et al*. A theoretical model for laser removal of particles from solid surfaces [ J ]. *Appl Phys* 1997, A65( 1 ): 9~ 13
- [ 13 ] LEE JM, WATKINS K G, STEEN W M. Angular laser cleaning for effective removal of particles from a solid surface [ J ]. *Appl Phys* 2000, A71( 6 ): 671~ 674.
- [ 14 ] VEREECKE G, ROHRE, HEYNS M M. Influence of beam incidence angle on dry laser cleaning of surface particles [ J ]. *Applied Surface Science*, 2000, 157( 1 ): 67~ 73
- [ 15 ] SONG W D, HONG M H, KOH H L *et al*. Laser-induced removal of plate-like particles from solid surface [ J ]. *Applied Surface Science* 2002, 186( 1 ): 69~ 74
- [ 16 ] KM T, LEE JM, CHO SH *et al*. A acoustic emission monitoring during laser shock cleaning of silicon wafers [ J ]. *Optics and Laser in Engineering* 2005, 43( 9 ): 1010~ 1020.
- [ 17 ] LEE SH, PARK J G, LEE JM *et al*. Si wafer surface cleaning using laser-induced shock wave a new dry cleaning methodology [ J ]. *Surface and Coatings Technology*, 2003, 169( 1 ): 178~ 180.
- [ 18 ] LM H, KM D. Optical diagnostics for particle-cleaning process utilizing laser-induced shockwave [ J ]. *Appl Phys* 2004, A79( 5 ): 965~ 968.
- [ 19 ] LUK B S, WANG Z B, SONG W D *et al*. Particle on surface 3-D-effects in dry laser cleaning [ J ]. *Appl Phys* 2004, A79( 4 ): 747~ 751.
- [ 20 ] MOSBACHER M, MUNZERTH J, ZMMERMANN J. Optical field enhancement effects in laser-assisted particle removal [ J ]. *Appl Phys* 2001, A72( 1 ): 41~ 44.
- [ 21 ] ZHENG Y W, LU Y F, SONG W D. Angular effect in laser removal of spherical silica particles from silicon wafers [ J ]. *J A P*, 2001, 90( 1 ): 59~ 63
- [ 22 ] MOSBACHER M, CHAOUIN, SEGEL J *et al*. A comparison of ns and ps steam laser cleaning of Si surface [ J ]. *Appl Phys* 1999, A69( 7 ): 331~ 334.
- [ 23 ] LU Y F, ZHANG Y, WAN Y H *et al*. Laser cleaning of silicon surface with deposition of different liquid films [ J ]. *Applied Surface Science* 1999, 138( 1 ): 140~ 144
- [ 24 ] MOSBACHER M, DOBLER V, BONEBERG J *et al*. Universal threshold for the steam laser cleaning of sub-micron spherical particles from silicon [ J ]. *Appl Phys* 2000, A70( 6 ): 669~ 672.
- [ 25 ] JIN R X, HUA IX L, LIU D Y. The applicability of classical theory for rapid transient explosive boiling [ J ]. *Journal of Engineering Thermo Physics* 2003, 24( 6 ): 1013~ 1015( in Chinese ).
- [ 26 ] LANG F, MOSBACHER M, LEIDERER P. Near field induced defects and influence of the liquid layer thickness in steam laser cleaning of silicon wafers [ J ]. *Appl Phys* 2003, A77( 1 ): 117~ 123
- [ 27 ] CAO B Q, ZENG X Y. Review of patents in laser processing in China and America [ J ]. *Laser Technology*, 2004, 28( 4 ): 346~ 351( in Chinese ).

(上接第 297 页)

### 参 考 文 献

- [ 1 ] BORN M, WOLF E. Optics principle [ M ]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005. 352( in Chinese ).
- [ 2 ] GRAVELSAETER T, STAMNES J J. Diffraction by circular apertures I: method of linear phase and amplitude approximations [ J ]. *Appl Opt* 1982, 21( 20 ): 3644~ 3651.
- [ 3 ] STAMNES J J, SPJELKAVIK B, PEDERSEN H M. Evaluation of diffraction integrals using local phase and amplitude approximations [ J ]. *Optica Acta* 1983, 30( 2 ): 207~ 222.
- [ 4 ] KRAUSH G. Finite element area and line integral transforms for generalization of aperture function and geometry in Kirchhoff scalar diffraction theory [ J ]. *Opt Engng* 1993, 32( 2 ): 368~ 383.
- [ 5 ] LI J Ch. Diffraction of laser and calculation on thermal acting [ M ]. Beijing: Science Press, 2002. 81~ 97( in Chinese ).
- [ 6 ] LING D X, LI J Ch, LIX Y. Numerical simulation of laser field across the diffraction-limited optics system [ J ]. *Laser Technology*, 2002, 26( 4 ): 284~ 286( in Chinese ).
- [ 7 ] TAO Y Q. Physical experiment of university [ M ]. Kunming: Yunnan Science and Technology Press, 2002. 126~ 131( in Chinese ).