

文章编号: 1001-3806(2007)02-0192-04

## 高斯镜平凸非稳腔本征模场的有限元数值计算

范 泛, 杨克成\*, 张 波, 许德胜

(华中科技大学 激光技术与工程研究院, 武汉 430074)

**摘要:** 为了研究激光在高斯镜平凸非稳腔中的模式和相位特征, 在 SEGMAN 分析多元件非稳腔的理论基础上, 采用有限元数值方法计算耦合输出镜镜面反射率为高斯分布的圆镜平凸非稳腔本征模场分布。将光场在腔内一次往返的  $ABCD$  系数代入惠更斯-基尔霍夫衍射积分方程, 可以写出光场往返一次的衍射积分方程。将镜面分割成若干个等宽圆环, 把衍射积分方程转化成矩阵相乘形式, 经过数值计算, 得到理想空腔和非共轴空腔优先起振的光场本征模式分布结果与相位特性。计算结果表明, 当合适选择输出镜半径与高斯反射率分布, 可以得到光斑半径为 0.3cm 的基模高斯光束输出, 此计算结果与实验结果相符。同时也讨论了耦合输出镜对光束质量的影响。

**关键词:** 激光器; 本征模场; 有限元法; 高斯反射率镜

中图分类号: O435 文献标识码: A

### Numerical calculation of mode-fields of the spherical plano-convex unstable resonator with Gaussian reflectivity mirror by means of the finite element method

FAN Fan, YANG Ke-cheng, ZHANG Bo, XU De-sheng

(Institute of Laser Technology and Engineering Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract** In order to study the mode and the phase characteristic of laser in an unstable resonator with Gaussian reflectivity mirrors, a finite element method is presented to numerically calculate mode-fields of the spherical plano-convex unstable resonator with Gaussian reflectivity mirrors which is based on the canonical formulation of SEGMAN's theory for analyzing multi-element unstable resonators. The round-trip cylindrical Huygen's integral is expressed for the resonator in terms of spherical resonator analysis and  $ABCD$  matrix. The Huygen's integral is transformed to a finite sum form by dividing the output mirror into several width equal circles. The eigenmode and phase result of self-reproduce field of perfect empty resonator and misalignment empty resonator are obtained via numerical calculation. The calculation result indicates that when the radius and Gaussian reflectivity of output mirror are appropriately selected, the fundamental mode distribution of Gaussian beam which has a spot radius of 0.3cm can be obtained. The calculation result accords with the experiment result. Simultaneously the influence of the output mirror on the beam quality is also discussed.

**Key words** lasers; mode-fields; finite element method; Gaussian reflectivity mirror

## 引 言

以反射率径向高斯分布的变反射率镜作为输出耦合器的非稳腔对腔内光束有很强的空间限模能力且实现极为方便, 因而得到了广泛的研究<sup>[1~5]</sup>, 并正逐步应用到各种激光介质上以提取接近衍射极限的高亮度激光束。而对于光腔中光场模式分布的研究则是首要的。SILVERSTR I 等采用衍射光学方法计算了超高斯

镜谐振腔腔内光强分布的二维图形<sup>[6]</sup>。国内也有人利用有限元方法对稳定腔进行了分析<sup>[7]</sup>, 并且将有限元法应用在激光棒的热效应分析上<sup>[8]</sup>。但是对含高斯反射率输出镜非稳腔的理论分析还不完善。作者在 SEGMAN 分析多元件非稳腔的理论基础上<sup>[9]</sup>, 针对圆形平凸腔, 结合几何光学及边界有限元方法, 将圆镜平凸非稳腔的衍射积分方程转化为矩阵方程, 并通过矩阵相乘的迭代方法, 来分析求解耦合输出镜反射率为高斯分布的圆镜平凸非稳腔本征模场及相位分布特性。并且比较了理想共轴腔与非共轴失调腔的理论计算结果。为高斯反射率镜非稳腔激光模式的理论计算提供了一个便捷的方法。

作者简介: 范 泛 (1980-), 男, 硕士研究生, 现主要从事新型激光谐振腔理论的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: keyang@hust.edu.cn

收稿日期: 2006-01-25; 收到修改稿日期: 2006-03-24

# 1 衍射积分方程的有限元数值计算

## 1.1 理想情况下的有限元数值计算

使用  $ABCD$  矩阵来描述激光在谐振腔中的往返是谐振腔理论的基础。如图 1 所示, 设一参考平面紧靠

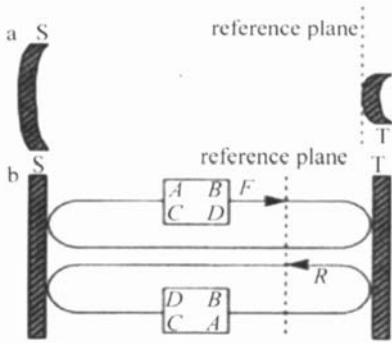


Fig 1 Matrix model of  $ABCD$  matrix representation of an unstable resonator  
S 镜面处, S 与 T 镜面距离为  $L$ , S 与 T 镜面的曲率半径分别为  $R_S$  和  $R_T$ 。则从参考平面出发的光经  $F$  路径在腔中往返一次的总矩阵  $M$  为:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_S} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_T} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1)$$

按照矩阵的乘法规则, 可以求出:  $A = -[2L/R_T - (1 - 2L/R_S)(1 - 2L/R_T)]$ ,  $B = 2L(1 - LR_S)$ ,  $C = -[2/R_T + 2/R_S(1 - 2L/R_T)]$ ,  $D = (1 - 2L/R_S)$ 。

在圆形镜平凸共轴非稳腔中, 自再现方程可写为:

$$V_{lp}^{(s+1)}(r_2) = \frac{2\pi}{M_g B} \int_0^\infty \frac{\rho(r_1 M_g) V_{lp}^{(s)}(r_1 M_g)}{M_g} \times \int \left[ \frac{2\pi r_1 r_2}{M_g B} \right] \exp\left[-\frac{j\pi}{M_g B} (r_1^2 + r_2^2)\right] r_1 dr_1 \quad (2)$$

式中,  $s$  代表光场在腔中往返次数,  $M_g$  为非稳腔的光学放大因子,  $\rho$  为输出镜面上反射率高斯分布函数,  $r_1, r_2$  是输出镜和反射镜的半径,  $J_l$  为第一类贝塞尔函数,  $V_{lp}$  为输出镜面上沿径向分布的光场, 下标  $p$  和  $l$  分别表示光场的径向分布模数与角向分布模数。

同时由 (1) 式得  $B = 2L(1 - LR_S)$ 。由此方程出发, 可以得到光场在输出镜上的强度与相位分布。

设输出镜的半径为  $a$ , 利用有限元法, 把出射镜面分割成  $N$  个等宽的圆环, 取  $r_{1i} = iaM_g/N$ ,  $r_{2k} = kaM_g/N$  ( $k$  的取值为  $0 \sim N$ ), 将积分转化为求和:

$$V_{lp}^{(s+1)}(kaM_g/N) = \frac{2\pi a^2}{\lambda B} \times \sum_{i=0}^N \left\{ i\rho(iaN) V_{lp}^{(s)}(iaN) J_l \left[ \frac{2\pi ika^2 M_g}{\lambda BN^2} \right] \times \exp\left[-\frac{j\pi M_g a^2}{\lambda BN^2} (i^2 + k^2)\right] N^2 \right\} \quad (3)$$

令: 
$$Y_{lp} = \frac{2\pi a^2}{\lambda B}, f_{ik} = i\rho(iaN) \times J_l \left[ \frac{2\pi ika^2 M_g}{\lambda BN^2} \right] \exp\left[-\frac{j\pi M_g a^2}{\lambda BN^2} (i^2 + k^2)\right] N^2 \quad (4)$$

则有:

$$V_{lp}^{(s+1)}(kaM_g/N) = Y_{lp} \sum_{i=0}^N \left[ V_{lp}^{(s)}(iaN) f_{ik} \right] \quad (5)$$

记  $V_{lp}^{(s+1)}(kaM_g/N) = V_{lp,k}^{(s+1)}$ ,  $V_{lp}^{(s)}(iaN) = V_{lp,i}^{(s)}$ , 则 (5) 式可写为以下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} V_{lp,1}^{(s+1)} \\ V_{lp,2}^{(s+1)} \\ \dots \\ V_{lp,N}^{(s+1)} \end{bmatrix} = Y_{lp} \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,N} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N,1} & f_{N,2} & \dots & f_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{lp,1}^{(s)} \\ V_{lp,1}^{(s)} \\ \dots \\ V_{lp,N}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

简记为:  $V_{lp}^{(s+1)} = Y_{lp} F V_{lp}^{(s)}$  (7)

由 (7) 式可知, 光场在谐振腔中往返 1 次, 光场分布 (模式分布) 仅需乘上 1 个矩阵  $A$ 。计算时以一系列均匀平面波作为腔内出射镜面上的初始激发波, 由于重要的只是振幅和相位的相对分布, 因此, 可以认为整个镜面为等相位面, 且镜面上各点波的振幅均为 1。每进行 1 次矩阵乘法就对结果进行归一化, 当  $s$  足够大即光场实现自再现时, 就可以计算出达到稳定时的光场分布。当其取不同的数值时, 可以通过计算得到与之对应的稳态光场分布。当  $l=0$  时, 可以得到基模高斯分布的光场。根据几何光学理论<sup>[3]</sup>, 由于光束放大因子的作用, 高阶模在腔中往返多次后的损耗非常大, 可知含高斯出射镜的非稳腔能够在腔内形成稳定的基模高斯光束。

## 1.2 非共轴情况下的有限元数值计算

非稳腔对腔镜的共轴程度要求很高, 但是在实际实验中由于条件和设备的限制, 腔镜往往不能完全共轴, 使输出光束的光束质量受到影响。用理论计算的方法来研究非共轴情况下的光场模式分布特性, 对实验有重要的指导作用。

在非共轴非稳平凸腔情况下, 光场 1 次往返的  $ABCD$  矩阵近似满足 (1) 式。设输出镜的几何中心与腔的光轴在二维方向上偏离  $\Delta x, \Delta y$ , 则输出镜上的高斯反射率函数相对于光轴中心的分布为:

$$\rho(r) = \rho(r) \exp[2r\Delta r \cos(\theta - \alpha) / w^2] \quad (8)$$

式中,  $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $\cos\alpha = \Delta x / \Delta r$ ,  $\theta$  为镜面极坐标系的方向角,  $w$  为高斯反射率分布函数的束腰半径。同时 (2) 式应该改写为:

$$V_{lp}^{(s+1)}(r_2, \theta_2) = \frac{2\pi}{M_g B} \times$$

$$\iint \left( \frac{r_1}{M_g} \right) \exp \left[ 2r_1 \Delta r \frac{\cos(\theta_1 - \alpha)}{w^2 M_g} \right] V_{lp} \left( \frac{r_1}{M_g}, \theta_1 \right) \times J_l \left( \frac{2\pi r_1 r_2}{M_g B} \right) \exp \left[ -\frac{j\pi}{M_g B} (r_1^2 + r_2^2) \right] r_1 dr_1 d\theta_1 \quad (9)$$

按照 1.1 节中所述有限元方法, 并且将  $\theta$  分成  $M$  个微元角, 则根据 (9) 式可求得非共轴情况下的光场模式分布特性。

## 2 计算结果分析

### 2.1 理想情况下高斯反射率圆镜非稳腔的计算结果分析

根据 1.1 节中的理论分析, 计算了圆镜平凸非稳腔腔型的输出光场的本征模式。(3) 式中的  $l$  取值为 0。计算中选择的腔参数如下: 输出镜半径 1cm, 凸面朝腔内, 内外曲率半径相等且为 1.5m。镜面镀高斯分

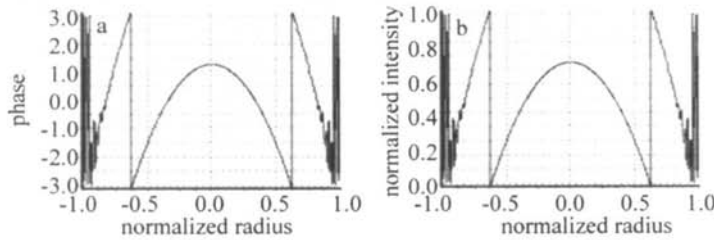


Fig. 3 Distribution after one hundred round-trip iterative a—phase b—intensity c—3-D intensity

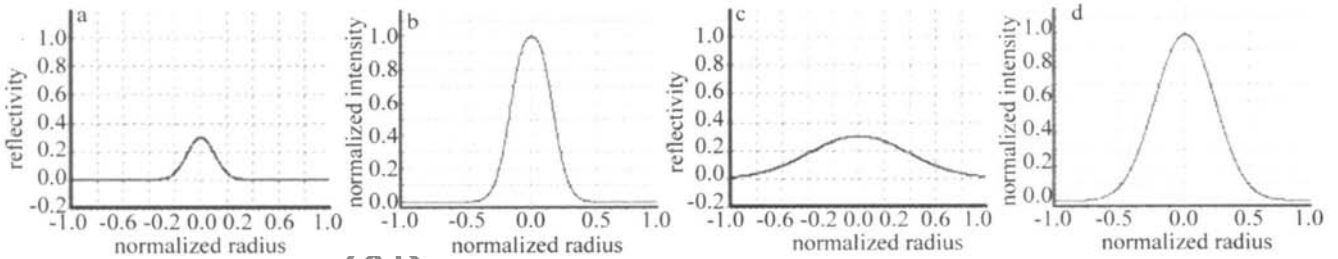


Fig. 4 Different intensity distribution caused by different Gaussian reflectivity

从图 4 可以得出, 当谐振腔为平凸非稳腔型时, 输出镜上高斯反射率的束腰越窄, 则输出光束的光斑半径越小。此结果与几何光学得出的结论相符。

实验中选择的腔参数如下: 输出镜半径 1cm, 凸面朝腔内, 内外曲率半径相等且为 1m。镜面镀高斯分布率反射膜, 反射率分布见图 4a 腔长 37.7cm, 实验中

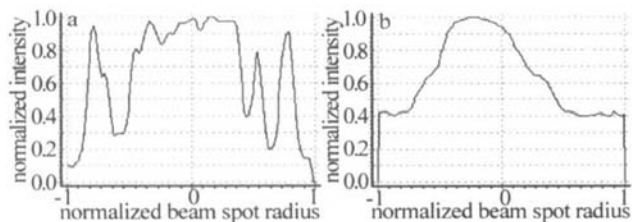


Fig 5 a—near field beam section b—far field beam section from experiment

得到的光斑图样见图 5 其中近场光斑半径为 0.25cm, 与理论计算的结果相符合。由于输出镜曲率半径为

布率反射膜, 反射率最大值 0.3 最小值 0.01, 腔长 37.7cm。

在进行一次迭代后的场相位与振幅分布曲线见图 2 可见腔内还未形成自再现。但是从场强分布可以看

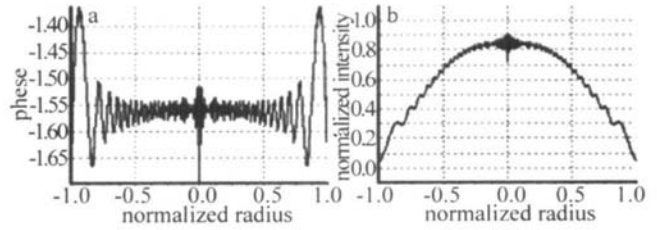


Fig 2 Distribution after one round-trip iterative a—phase b—intensity

出, 非稳腔对高阶模式的抑制作用开始显现。

图 3 为迭代 100 次后的场振幅曲线, 此时腔内光场已经实现自再现。可见已经建立起稳定的基模高斯激光输出。



1m 的谐振腔模体较大, 其近场光斑中由激光棒边缘衍射产生的衍射环也更加明显, 但是从远场光斑可看出其对高阶模的抑制更强。

### 2.2 非共轴情况下的光场模式计算结果

根据 1.2 节中的理论分析, 计算了非共轴情况下的输出光场模式。输出镜中心与光轴中心偏离  $\Delta x = 0.1$  cm,  $\Delta y = 0.1$  cm, 反射率最大值 0.3 最小值  $10^{-9}$ , 见图 6。谐振腔的其它参数与 2.1 节中理论计算部分相同。

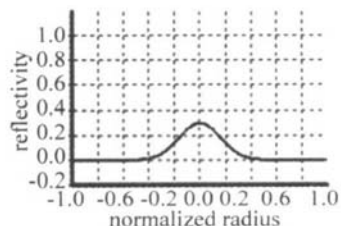


Fig 6 Gaussian reflectivity distribution on the output mirror

在进行一次迭代后输出光场振幅三维与二维分布见图 7。可见,腔镜的不共轴对输出光场的影响较大。

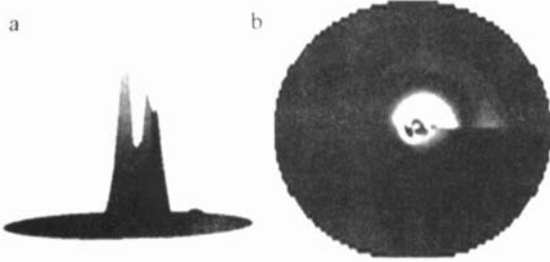


Fig 7 Distribution after one round-trip iterative  
a—3-D intensity b—2-D intensity

图 8 为迭代 100 次后输出光场振幅三维分布,输出光场强度分布发生非常明显的变化。其光场强度双



Fig 8 3-D intensity distribution after one hundred round-trip iterative

峰值之间间隔为 0.12 cm。说明非稳腔对共轴要求特别高,如果腔镜未完全对准,则输出光场光束质量会受到严重的影响。在相同腔参数情况下,非共轴实验得到的近场光斑图样与其场强三维分布见图 9。其光场

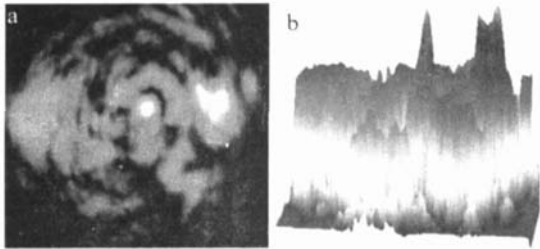


Fig 9 a—near field beam section from experiment b—3-D field intensity distribution

强度双峰值之间距离约为 0.1 cm。实验结果符合理论计算结果。

### 3 结 论

有限元数值计算方法是一种分析激光谐振腔输出光场模式和相位的理想方法。通过该方法不仅可以计

算出高斯输出镜平凸腔空腔情况下输出光场与相位的精确分布,而且还可计算出腔镜非共轴效应对输出光场的影响。并且 2.1 节中的计算结果与文献 [3] 中给出的结果一致,而 2.2 节中计算得到的是新结果。根据文中给出的输出光场的三维分布图,可以直观地了解高斯输出镜平凸腔的输出光场分布情况。理论分析表明,合适地选择平凸腔参数,可以得到接近衍射极限的基横模激光输出,同时非稳腔的非共轴现象会严重影响输出光束的光束质量。对于更加接近实际的理论分析,如增益介质的热透镜效应、腔镜失调效应和腔镜畸变效应等,只需改变光学传输矩阵参数或反射率分布矩阵参数,利用有限元方法,也可以得到精确的结果。通过以上分析,可以对采用高斯镜腔的激光器的设计与实验提供一些比较直观的参考。

### 参 考 文 献

- [1] SAGHAFI S W, ITHFORD M, LATIFIH *et al*. Beam propagation analysis in unstable laser resonators (ULR) [J]. Proc SPIE, 2003, 4829: 8~9.
- [2] MORIN M. Graded reflectivity mirror unstable laser resonators [J]. Opt & Quant Electron, 1997, 29(1): 819~866.
- [3] CORBETT B, JUSTICE J, LAMBKIN P. High brightness lasers based on internal focus unstable resonators [J]. SPIE, 2004, 5365: 164~172.
- [4] NIKOLOV I P, BUCHVAROV I, GUBANOVA L A *et al*. High-power Nd:YAG lasers with variable reflectivity mirrors [J]. SPIE, 2001, 4397: 49~53.
- [5] MAKKIS S, LEGER J. Mode shaping of a graded reflectivity mirror unstable resonator with an intracavity phase element [J]. IEEE J Q E, 2001, 37(1): 80~86.
- [6] SILVERSTRIS D, MAGNIV, SVELTO O *et al*. Lasers with super-Gaussian mirrors [J]. IEEE J Q E, 1990, 26(9): 1500~1509.
- [7] LING D X. Numerical calculation of field distribution of confocal spherical resonator by the finite element method [J]. Applied Laser, 1999, 19(2): 69~72 (in Chinese).
- [8] CHEN Z L, MA L K, JIANG Z F *et al*. Finite element analysis of the thermal effect of LD endpumped laser medium [J]. Laser Technology, 2005, 29(5): 543~545 (in Chinese).
- [9] ANTHONY E, SIEGMAN A. Canonical formulation for analyzing multi-element unstable resonators [J]. IEEE J Q E, 1976, QE12(1): 35~40.

• 简 讯 •

### 关于对姜宇一稿多投行为的处理通报

哈尔滨工程大学信息与通信学院的姜宇不负责任地将“轴向预负载对细薄钢管激光弯曲机制的影响”一文分别发表在了《激光技术》、《光电子·激光》和《大气与环境光学学报》上!为此给这几个刊物造成了难以挽回的损失,影响非常恶劣。现将本刊处理结果公布如下: 1. 对姜宇的此种行为进行曝光、批评,并通报国内光学类刊物。 2. 今后将不接受和刊出姜宇的稿件。 3. 通报姜宇所在单位。

特此通报,望广大作者引以为戒,共同抵制这种学术界的歪风邪气!

《激光技术》编辑部

2007年 2月