

文章编号: 1001-3806(2006)06-0667-03

## 基于二阶差分的加权最小费用流相位展开算法

杨锋涛<sup>1</sup>, 吕晓旭<sup>2</sup>, 王殿元<sup>1</sup>, 江长双<sup>1</sup>

(1. 九江学院 理学院, 九江 332005 2 华南师范大学 信息光电子科技学院, 广州 510631)

**摘要:** 相位展开是光学干涉相位测量技术中的重要步骤, 由于噪声、欠采样等因素的影响, 精确的相位展开变得非常困难。将相位的二阶差分 and 最小费用流算法结合, 提出一种以相位的二阶差分作为最小费用流权重的相位展开算法。模拟计算表明, 该算法既可有效地避免枝切法由于连接的枝切形成闭合区域导致局部相位不能展开的问题, 又可减小最小二乘法近似逼近带来的较大误差。相对于未设置权值的最小费用流算法, 提高了其相位展开的精度。对三维形貌测量中的实验数据相位展开结果, 证明了该算法的有效性。

**关键词:** 信息光学; 相位展开; 最小费用流; 二阶差分

**中图分类号:** O438 **文献标识码:** A

### Weighted minimum cost flow phase unwrapping algorithm based on second difference

YANG Feng-tao<sup>1</sup>, LÜ Xiao-xu<sup>2</sup>, WANG Dian-yuan<sup>1</sup>, JIANG Chang-shuang<sup>1</sup>

(1. Faculty of Science, Jiujiang University, Jiujiang 332005, China 2 School for Information and Optoelectronic Science and Engineering South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

**Abstract** Phase unwrapping is an important step for precise phase measurement in optical interferometric techniques. Due to the effect of noise and undersampled region, an accurate phase unwrapping has been quite difficult. A new phase unwrapping algorithm based on phase second difference and minimum cost flow algorithm is presented. Computer simulation shows it can avoid local incomplete unwrapping problem that interlaced cuts produce closed regions in branch cut algorithm and reduce the errors caused by least square unwrapping algorithm. Comparing with the unweighted minimum cost flow algorithm, it also improves the phase unwrapping precision. The phase unwrapping result on real data in 3-D shape measurement verifies the validity of the algorithm.

**Key words** information optics; phase unwrapping; minimum cost flow; second difference

## 引 言

随着固态面阵探测器和计算机的快速发展, 激光干涉测量术(莫尔、散斑及全息干涉等)由于其全场性、非接触性、测量精度高等优点广泛地应用于测量物体的一系列物理信息, 如位移、应变、振动、表面形状和折射率等。在这些技术中, 被测的物理量信息一般都调制在二维条纹图的相位变化中, 常用于解调条纹图相位信息的方法<sup>[1]</sup>主要有: 相移法和单幅载波条纹的傅里叶变换法。无论采用哪一种方法, 都只能得到位于  $(-\pi, \pi]$  之间的包裹相位, 从包裹相位中恢复出原始相位的过程, 即为相位展开过程。因此, 相位展开就

成为所有条纹类图像自动处理的一个重要环节。

对于理想的包裹相位图, 只要对包裹相位的行列分别进行扫描即可得到正确的相位展开结果, 但是实际得到的包裹相位图却因为包含噪声、阴影、以及欠采样等情况, 致使二维相位展开问题变得非常复杂。近 20 多年来, 国内外学者提出了各种相位展开的算法, 其中有代表性的主要有枝切法<sup>[2]</sup>、最小二乘法<sup>[3]</sup>、最小网络法<sup>[4]</sup>。但是枝切法当残余点较多时, 连接的枝切容易形成闭合的回路, 使局部区域的相位不能得到展开<sup>[5]</sup>。最小二乘法将最小化期望相位面与真实相位面之间的相位梯度之差为目标函数, 在最小二乘意义上逼近真实相位面。该方法具有很强的抗噪声作用, 但是对噪声平滑的过程中, 也会带来较大的误差。而 COSTANTINI<sup>[4]</sup>提出的最小费用流(minimum cost flow, MCF)算法, 既有很强的抗噪声能力, 又能够很好地保持与包裹相位的一致性。因此, 得到了一些学者的重视和发展<sup>[6-8]</sup>。但是, 他们主要是基于对 InSAR 包裹相位的处理, 通常以 InSAR 图中相关系数作为权

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60467003, 6027703)

作者简介: 杨锋涛(1976-), 男, 硕士, 主要研究方向为光信息处理。

E-mail: yangfet2005@yahoo.com.cn

收稿日期: 2005-11-04 收到修改稿日期: 2006-03-14

重。作者提出以相位的二阶差分作为最小费用流相位展开算法中的权重,并用 GOLDBERG 编写的求最小费用程序 CS2实现求解。模拟计算表明,该算法既可有效的避免枝切法由于连接的枝切形成闭合区域导致局部相位不能展开的问题,又可减小最小二乘法近似逼近带来的较大误差,相对于未设置权值的最小费用流算法,提高了其相位展开的精度。将该算法应用于物体三维形貌的测量,其相位展开的结果证实了该算法的实际可行性。

### 1 最小费用流相位展开算法原理

假设  $\phi(x, y)$  为待求相位,包裹相位  $\psi(x, y)$  即为待求相位  $\phi(x, y)$  在二维网格上关于  $2\pi$  的模,数学描述为:

$$\phi(x, y) = W[\phi(x, y)] = \text{mod}\{[\pi + \phi(x, y)], 2\pi\} - \pi \quad (1)$$

式中,  $W$  为包裹算子,使  $W[\phi(x, y)] \in (-\pi, \pi]$ , mod 为求余运算。如果待求相位相邻相位差小于  $\pi$ ,  $|\phi(x, y) - \phi(x, y+1)| < \pi$ , 即满足 Shannon 采样定理,则可以通过对包裹相位的包裹运算得到待求相位的梯度,即:

$$\psi(\phi(x, y)) = W[\psi(\phi(x, y))] \quad (2)$$

这样通过对待求相位的梯度进行积分,就可以得到待求相位。但是实际由于噪声、阴影、欠采样等因素的影响,很显然由包裹相位的梯度是无法正确得到待求相位的梯度。通常相位展开的基本思想就是求满足待求相位梯度与包裹相位梯度最小范数解。其目标函数为:

$$\min \left\{ \sum_{x,y} |\psi_x \phi(x, y) - W[\psi_x \phi(x, y)]|^p + \sum_{x,y} |\psi_y \phi(x, y) - W[\psi_y \phi(x, y)]|^p \right\} \quad (3)$$

由于待求相位梯度与包裹相位梯度之间的差别总是  $2\pi$  的整数倍,故待求相位梯度与包裹相位梯度之间在  $x$  和  $y$  方向应该满足下式的关系:

$$\begin{cases} \psi_x \phi(x, y) = W[\psi_x \phi(x, y)] + 2\pi k_x(x, y) \\ \psi_y \phi(x, y) = W[\psi_y \phi(x, y)] + 2\pi k_y(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $k_x(x, y)$  和  $k_y(x, y)$  为整数,一般  $k_x(x, y), k_y(x, y) \in \{-1, 0, 1\}$ 。将 (4) 式代入 (3) 式,令  $p = 1$ , 并引入权重  $c_1(x, y)$  和  $c_2(x, y)$  后, (3) 式为:

$$\min \left\{ \sum_{x,y} c_1(x, y) |k_x(x, y)| + \sum_{x,y} c_2(x, y) |k_y(x, y)| \right\} \quad (5)$$

(5) 式即为最小费用流算法的目标函数,当  $c_1(x, y) = c_2(x, y) = 1$ , 最小化 (5) 式即为 FLYNN 提出的最小断点法<sup>[5]</sup>。CONSTANTINI<sup>[4]</sup> 基于网络规划的理论,将最小化 (5) 式转化为网络里求最小费用流问题,通过最小费用流算法得到  $k_x(x, y)$  和  $k_y(x, y)$ , 再通过 (4) 式得到待求相位梯度,对其进行积分即可得到待求相位。

### 2 基于二阶差分的加权最小费用流相位展开算法

#### 2.1 以二阶差分为最小费用流算法的权重

二阶差分在很多相位展开算法都得到了应用,文献 [9] 中以二阶差分来作为相位展开时划分可展开区域和不可展开区域的判据,文献 [10] 中以二阶差分作为选择相位展开路径的依据,文献 [11] 中以二阶差分作为正则化的二项式函数。由于二阶差分可以较好的区分相位的跳变点和跳变线,作者提出以二阶差分的大小来作为最小费用流相位展开算法中的权重。如图 1 所示  $\phi(x, y)$  的邻域,待求相位  $\phi(x, y)$  二阶差分的

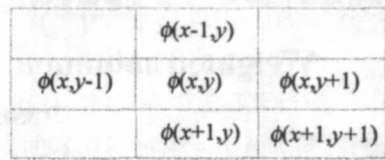


Fig. 1  $\phi(x, y)$  neighborhood

定义为:

$$\begin{cases} \Delta_x(x, y) = \phi(x+1, y) - 2\phi(x, y) + \phi(x-1, y) \\ \Delta_y(x, y) = \phi(x, y+1) - 2\phi(x, y) + \phi(x, y-1) \\ \Delta_{xy}(x, y) = \Delta_x(x, y) = \phi(x+1, y+1) - \phi(x, y+1) - \phi(x+1, y) + \phi(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

待求相位的二阶差分可以由包裹相位的二阶差分得到:

$$\begin{cases} \Delta_x(\psi(x, y)) = W[\psi_x \phi(x+1, y)] - W[\psi_x \phi(x, y)] \\ \Delta_y(\psi(x, y)) = W[\psi_y \phi(x, y+1)] - W[\psi_y \phi(x, y)] \\ \Delta_{xy}(\psi(x, y)) = \Delta_{xy}(\psi(x, y)) = W[\psi_x \phi(x, y+1)] - W[\psi_x \phi(x, y)] \end{cases} \quad (7)$$

定义函数:

$$\Delta(x, y) = |\Delta_x(\psi(x, y))| + |\Delta_y(\psi(x, y))| + 2 \times |\Delta_{xy}(\psi(x, y))| \quad (8)$$

对于相位二阶差分较大的地方,一般也可能是包裹相位梯度与待求相位梯度不一致的地方,因此应该赋予较小的权重,令:  $C_0 = \max(\Delta(x, y))$

$$c(x, y) = C_0 - \Delta(x, y) \quad (9)$$

这样当以  $c(x, y)$  函数作为最小费用流算法中的权重,即 (5) 式中的  $c_1(x, y) = c_2(x, y) = c(x, y)$ , 就可以更有效使最小费用流算法找到包裹相位梯度与待求相位梯度不一致的地方。

#### 2.2 算法步骤

计算网络里最小费用流的算法,目前较成熟的主要有: BERTSEKAS 的 Relax 程序, GOLDBERG 的 CS2

程序,  $Cplex$  程序等。在这里, 选择 GOLDBERG 的 CS2 的程序包, 应用该程序的最小费用流相位展开算法的具体步骤如下: (1) 通过计算包裹相位的残余点, 得到二维矩阵作为网络中的节点; (2) 通过 (9) 式计算得到的  $c(x, y)$  作为节点之间流量的权重; (3) 以 CS2 程序计算该网络的最小费用流, 得到  $k_x(x, y)$  和  $k_y(x, y)$ ; (4) 将  $k_x(x, y)$  和  $k_y(x, y)$  代入 (4) 式得到待求相位的梯度值, 对待求相位的梯度进行积分即可得到待求相位。

### 3 模拟和实验结果

为了验证本文中算法的性能, 用计算机模拟产生一高斯相位面, 其数学表达式为:

$$\phi(x, y) = 60 \exp\{- [(x - M/2)^2 + (y - N/2)^2] / 1000\} \quad (10)$$

式中,  $x = 1, 2, 3 \dots M, y = 1, 2, 3 \dots N; M = 128, N = 128$ , 单位为 rad, 并对其加入  $\mu = 0, \sigma^2 = 0.8$  的高斯噪声, 所得到的相位面如图 2a 所示, 图 2b 是通过 (1) 式包裹运算得到包裹相位图, 图 2c 为其残余点的分布图, 残余点共为 1283, 占整幅图像的 7.83%。

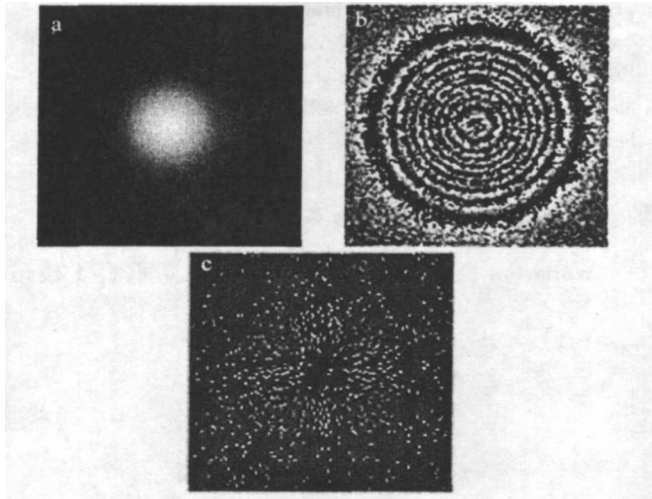


Fig 2 Computer simulation

a—original phase b—wrapped phase c—residues map

首先将该算法与传统的枝切法和最小二乘法比较, 相位展开的结果如图 3 所示。从图 3a 可以看到, 由于连接的枝切形成闭合区域导致局部相位不能展开的情况; 图 3b 为最小二乘法展开的结果, 其与原始相位的均方根误差很大, 为 4.823, 而图 3d 为二阶差分为权重最小费用流法展开的结果, 其与原始相位的均方根误差只有 0.453, 可见该算法明显要优于枝切法和最小二乘法。

再将该算法与未设置权重最小费用流算法比较, 图 3c 为未设置权重 ( $c_1(x, y) = c_2(x, y) = 1$ ) 的最小费用流算法展开的结果。其与原始相位的均方根误差为 0.486, 比以二阶差分为权重的算法稍大一点, 从相位

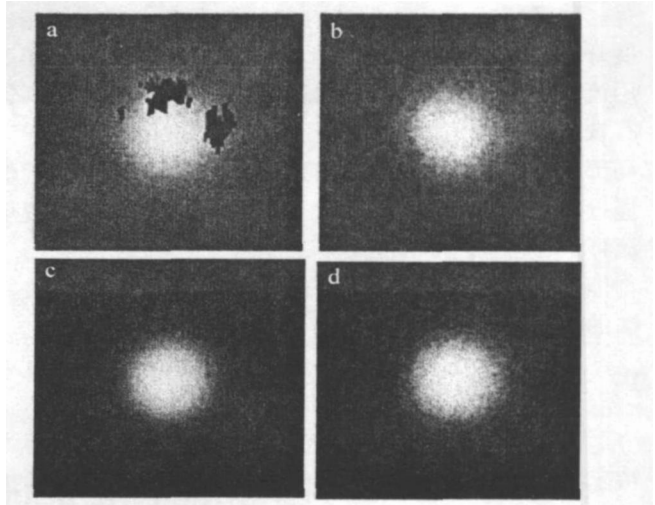


Fig 3 Phase unwrapping results by four algorithms

a—branch-cut algorithm b—least square algorithm c—unweighted minimum cost flow algorithm d—proposed algorithm

展开的效果图很难看出差别。但是通过计算发现, 未设置权重的最小费用流算法展开后的相位与原始相位不一致的点有 112 个, 而以二阶差分为权重的最小费用流算法展开后的相位与原始相位不一致的点只有 85 个。可见以二阶差分为权重最小费用流算法比未设置权重时相位展开的结果精度有所提高。

将本文中的算法应用到三维形貌测量, 图 4a 为利用光栅投影到嘴唇形状的石膏模型, 经过傅里叶变换得到的包裹相位图, 图像大小为  $512 \times 512$ , 图 4b 是利用本文中算法对其进行相位展开的结果, 可以看到该算法很好地重建了嘴唇的三维形貌。

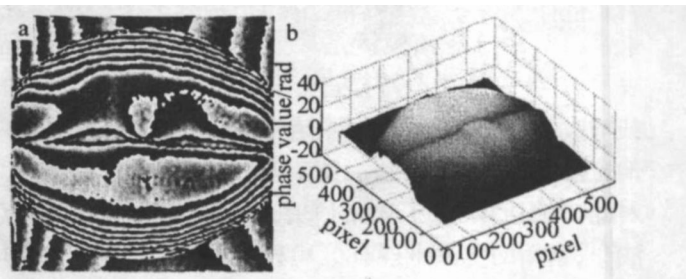


Fig 4 Experimental result

a—wrapped phase by Fourier transform b—phase unwrapping result by proposed algorithm

### 4 结论

提出一种以相位的二阶差分作为最小费用流算法权重的相位展开算法。模拟计算表明, 该算法既可以有效地避免枝切法由于连接的枝切形成闭合区域导致局部相位不能展开的问题, 又可以减小最小二乘法近似逼近带来的较大误差, 相对于未设置权值的最小费用流算法, 提高了其相位展开的精度。对实验数据的相位展开结果证明了该算法的有效性。

棱镜难免存在加工误差,因而理论值与实验值之间也是有一定误差的。

## 5 小 结

(1)利用 W allaston 棱镜对入射光方向无选择的特性,在 W allaston 棱镜的基础上提出了一种分束角对称偏光棱镜的设计方法,理论计算表明,该设计不仅能保证分束角的对称,而且可以拓宽了分束角。并可以根据需要,选择不同的结构角及右通光面倾斜角以获得合适的对称分束角。(2)根据棱镜晶体材料各向异性的特点,选择恰当的晶体加工方位以利于工艺实施。棱镜加工过程中,只需按设定的角度将右半块磨制成锐角或钝角三角形(方解石晶体光轴垂直于纸面的半块棱镜),避免了调整光轴方位或胶合层楔角等复杂的操作过程,大大简化了加工工序。(3)研究表明, W allaston 棱镜在小分束角设计时(分束角小于  $10^\circ$ , 对应结构角小于  $27^\circ$ ),分束角基本对称,只有在大分束角设计时需要考虑对称问题,此种改进设计不会增加工艺难度,几乎不增加材料成本,有较高的实用价值。

## 参 考 文 献

[1] ZHOU J, SU G Y, SHI R Y. The influence of adjustable beam splitting

prism on laser beam [J]. Laser Technology, 2002, 26(1): 75~78 (in Chinese).

- [2] GAO H G, PEI Q K. The design of Galen-Taylor polarizing prism [J]. Laser Technology, 1994, 18(3): 185~189 (in Chinese).
- [3] MA Y W, HUANG L. Analysis of Wollaston polarizer in imaging systems [J]. Laser Technology, 1996, 20(2): 68~72 (in Chinese).
- [4] HUANG J Y, WU F Q, LI G H. Symmetry of beam splitting angle for uniaxial crystal prism [J]. Laser Technology, 1996, 20(2): 104~107 (in Chinese).
- [5] HUANG J Y, WU F Q. The study about design and measure of uniaxial crystal prism with excellent symmetry of the beam splitting angle [J]. Journal of Optoelectronics Laser, 1995, 6(4): 211~215 (in Chinese).
- [6] XU Y X, CAI X, ZHANG Zh L. Design of modified Wollaston prisms [J]. Optics and Precision Engineering, 2001, 9(2): 131~134 (in Chinese).
- [7] MONTAROU C C, GAYLORD T K. Analysis and design of modified Wollaston prisms [J]. Appl Opt, 1991, 38(31): 6604~6616.
- [8] WANG W, WU F Q, SU F F. A modified symmetric splitting angle prism [J]. Journal of Optoelectronics Laser, 2003, 14(9): 913~916 (in Chinese).
- [9] WANG W, WU F Q, SU F F. Symmetric polarization beam splitting prism based on three-element Wollaston prism [J]. Optical Technique, 2004, 30(2): 182~186 (in Chinese).
- [10] ZHAO M, Sh LI G H. Symmetric beam-splitting polarization prism [J]. Laser Journal, 1991, 12(3): 136~139 (in Chinese).
- [11] 王 芳. 激光技术手册[M]. 西安: 陕西科学技术和出版社, 1986. 528~532 (in Chinese).

(上接第 669 页)

## 参 考 文 献

- [1] ZHANG L, LIU S N, LIN D Y *et al*. The progress of extracting phase information based on spatial carrier fringe pattern analysis [J]. Laser Technology, 2005, 29(1): 90~93 (in Chinese).
- [2] BERND G, HERBERT W. Phase unwrapping with the branch-cut method role of phase-field direction [J]. Appl Opt, 2000, 39(26): 4802~4816.
- [3] GHIGLIA D C, ROMERO L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods [J]. JO S A, 1994, A11(1): 107~117.
- [4] COSTANTINIM. A novel phase unwrapping method based on network programming [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1998, 36(3): 813~821.
- [5] FLYNN T J. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity [J]. JO S A, 1997, A14(10): 2692~2701.

- [6] CHEN C W, ZEBKER H A. Network approaches to two-dimensional phase unwrapping: intractability and two new algorithms [J]. JO S A, 2000, A17(3): 401~414.
- [7] HUBIG M, SUCHANDT S, ADAM N. A class of solution-invariant transformations of cost functions form in minimum cost flow phase unwrapping [J]. JO S A, 2004, A21(10): 1975~1987.
- [8] CHEN C W, ZEBKER H A. Two-dimensional phase unwrapping with use of statistical models for cost functions in nonlinear optimization [J]. JO S A, 2001, A18(2): 338~351.
- [9] BONE D J. Fourier fringe analysis: the two-dimensional phase unwrapping problem [J]. Appl Opt, 1991, 30(25): 3627~3632.
- [10] QU ROGA J A, GONZALEZ-CANO A, BERNABEU E. Phase unwrapping algorithm based on adaptive criterion [J]. Appl Opt, 1995, 34(14): 2560~2563.
- [11] MARROQUIN J L, RIVERA M. Quadratic regularization functionals for phase unwrapping [J]. JO S A, 1995, A12(11): 2393~2400.