

文章编号: 1001-3806(2006)03-0332-02

# 非傍轴高斯光束通过小孔光阑衍射的轴上光强

康小平<sup>1,2</sup>, 吕百达<sup>2\*</sup>

(1. 琼州大学 物理系, 五指山 572200; 2 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

摘要: 基于瑞利衍射积分, 不使用通常的近似  $R \gg \lambda$  ( $\lambda$  为波长), 推导出非傍轴高斯光束通过小孔光阑衍射的轴上光强的精确解析表达式。并对传统的光强定义和光强的精确表述进行了比较研究。结果表明, 两种定义之间的差异与  $f$  参数, 截断参数  $\delta$  和传输距离  $z$  有关。

关键词: 激光光学; 瑞利衍射积分; 非傍轴高斯光束; 截断参数;  $f$  参数

中图分类号: O435 文献标识码: A

## The axial intensity of nonparaxial Gaussian beams diffracted by a small aperture

KANG Xiao-ping<sup>1,2</sup>, LÜ Bai-da<sup>2</sup>

(1. Department of Physics, Qiongzhou University, Wuzhishan 572200, China; 2. Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract** Based on the Rayleigh diffraction integral and without use of the usual approximation  $R \gg \lambda$  ( $\lambda$  is wavelength), an exact analytical expression for the axial intensity of nonparaxial Gaussian beams diffracted by a small circular aperture is derived. Then the conventional intensity definition and accurate intensity expression is comparatively studied. It is found that the difference between the two definitions depends on the  $f$ -parameter, truncation parameter  $\delta$  and propagation distance  $z$ .

**Key words** laser optics; Rayleigh diffraction integral; nonparaxial Gaussian beam; truncation parameter;  $f$ -parameter

### 引 言

随着大发散角的二极管激光和束宽与波长可相比拟强聚焦光束的应用, 推动了非傍轴光束的研究, 国际上相关研究工作十分活跃<sup>[1-3]</sup>。CAO 等人提出对非傍轴光束不能沿用传统的光强定义, 必须采用光强的精确表述<sup>[4,5]</sup>。PORRAS 用光强的精确表述对非傍轴标量光束进行了研究<sup>[6]</sup>。作者的主要工作以非傍轴高斯光束通过小圆孔光阑的衍射为例, 推导出了轴上光强的精确公式, 并对传统的光强定义和光强的精确表述作了比较研究, 得出了一些在非傍轴光学范畴内有意义的结果。

### 1 理论模型

设入射面  $z=0$  处有一高斯光束向  $z>0$  的半空间传输, 在  $z=0$  处光场分布为:

$$E_0(x_0, y_0, 0) = \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \quad (1)$$

式中,  $w_0$  为光束的束腰宽度。假设在  $z=0$  平面放置一半径为  $a$  的圆孔光阑, 其透射率函数为:

$$t(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & x_0^2 + y_0^2 \leq a^2 \\ 0, & \text{其它地方} \end{cases} \quad (2)$$

则高斯光束在光阑后表面的场分布为:

$$E(x_0, y_0, 0) = t(x_0, y_0) \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \quad (3)$$

利用瑞利衍射积分公式, 在任一横平面  $z$  处的场分布为<sup>[7]</sup>:

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint E(x_0, y_0, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] dx_0 dy_0 \quad (4)$$

式中,  $k$  为波数, 与波长  $\lambda$  的关系为  $k=2\pi/\lambda$ , 则:

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \quad (5)$$

把 (2) 式、(3) 式代入 (4) 式, 把直角坐标化为极坐标, 并令  $x=y=0$  得到非傍轴高斯光束轴上场分布为:

$$E(0, 0, z) = -\int_0^a \exp\left[-\frac{r_0^2}{w_0^2}\right] \times \frac{\partial}{\partial z} \left[ \exp(ik\sqrt{r_0^2 + z^2}) / \sqrt{r_0^2 + z^2} \right] r_0 dr_0 \quad (6)$$

式中,  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ 。对 (6) 式进行繁冗积分和化简, 最后结果可整理为:

$$E(0, 0, z) = -z \exp(-\delta^2 + ik\sqrt{a^2 + z^2}) / (\sqrt{a^2 + z^2}) +$$

基金项目: 国家高技术课题资助项目 (A823070)

作者简介: 康小平 (1964-), 女, 博士研究生, 副教授, 主要从事激光传输与变换的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: badah@scu.edu.cn

收稿日期: 2004-12-20 收到修改稿日期: 2005-02-24

$$\exp(kz) - \frac{\sqrt{\pi}\delta}{a} \exp\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{1}{4f^2}\right] \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{i}{2f} - \frac{\delta}{a}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{i}{2f} - \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{\delta}{a}\right)^2}\right] \right\} \quad (7)$$

式中,  $\operatorname{erf}(\cdot)$  为误差函数, 则:

$$f = \frac{1}{kw_0} \quad (f \text{ 参数}) \quad (8)$$

$$\delta = \frac{a}{w_0} \quad (\text{截断参数}) \quad (9)$$

(7) 式为本文中所得的主要解析公式。(7) 式表明, 非傍轴高斯光束轴上场分布主要依赖于两个关键参数, 即  $f$  参数和截断参数  $\delta$ 。注意, 在推导 (7) 式时, 没有使用通常的近似  $R \gg \lambda$ <sup>[8]</sup>, 因此是精确的结果, 在波长范围距离内也是适用的。在 (7) 式中令  $a \rightarrow \infty$ , 可得到无光阑限制情形下的轴上场分布为:

$$E_{\infty}(0, 0, z) = \exp\left[z^2 k^2 f^2 - \frac{1}{4f^2}\right] \left\{ \exp\left[\left(ikf + \frac{1}{2f}\right)^2\right] - \sqrt{\pi}zkf \left[1 + \operatorname{erf}\left(-zkf + \frac{i}{2f}\right)\right] \right\} \quad (10)$$

按横截面上光强的精确定义<sup>[4]</sup>, 非傍轴高斯光束轴上光强为:

$$I_j(0, 0, z) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{k} E^*(0, 0, z) \frac{\partial}{\partial z} E(0, 0, z)\right] \quad (11)$$

式中,  $\operatorname{Re}$  表示取实部,  $*$  表示复共轭。

另一方面, 按传统标量光场光强的定义, 轴上光强为:

$$I_c(0, 0, z) = |E(0, 0, z)|^2 \quad (12)$$

利用 (7) 式、(11) 式及 (12) 式做数值计算, 就可得到非傍轴标量高斯光束通过圆孔光阑衍射的轴上光强分布。

### 2 数值计算结果与分析

为了对光强的精确定义与传统定义之间作比较, 利用 (11) 式和 (12) 式做了大量的数值计算。图 1 中给出了非傍轴高斯光束通过小圆孔光阑衍射时, 轴上光强  $I(0, 0, z)$  随归一化传输距离  $z/z_R$  的变化曲线,  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  为瑞利长度。图中实线表示光强的精确定义

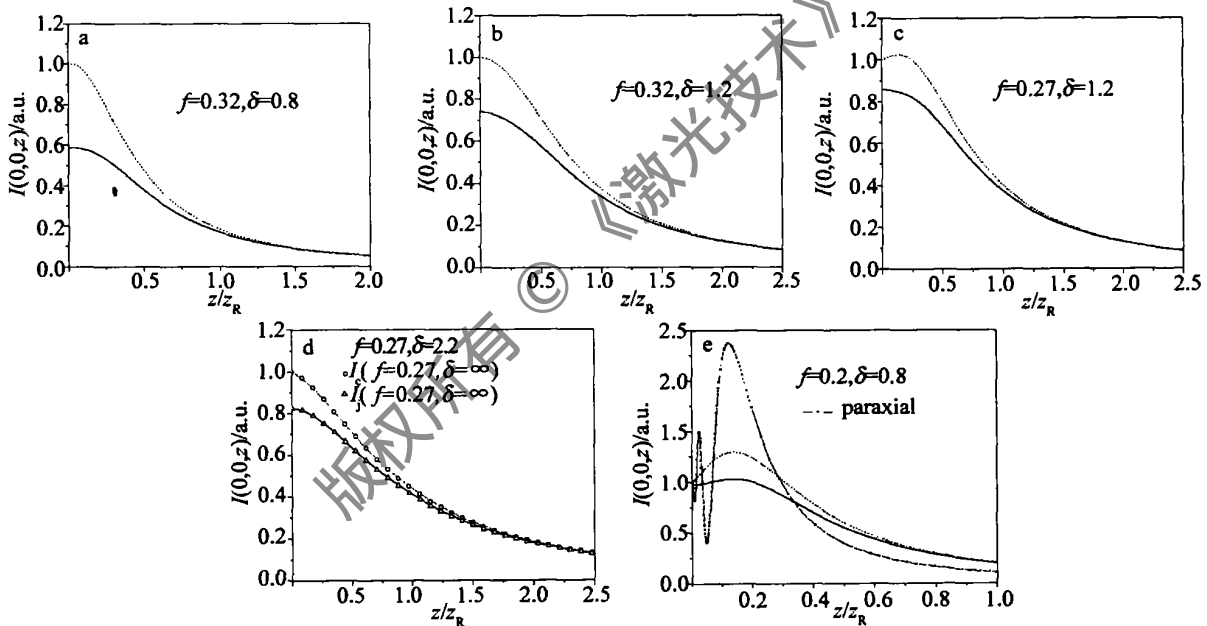


Fig 1 Axial intensity distribution  $I(0, 0, z)$  of nonparaxial Gaussian beams versus the normalized distance  $z/z_R$ ,  $\cdots - I_c(0, 0, z)$ ,  $— - I_j(0, 0, z)$

义  $I_j(0, 0, z)$ , 虚线为传统的光强定义  $I_c(0, 0, z)$ 。从图 1a 图 1b 和图 1c 可以看出, 在非傍轴光学范畴 ( $f > 0.18$ <sup>[2]</sup>) 内, 随着  $f$  参数的增加和截断参数  $\delta$  的减小,  $I_c(0, 0, z)$  与  $I_j(0, 0, z)$  之间差异增加, 而且随  $f$  增加二者差异更为显著。由图 1a 图 1c 图 1d 和图 1e 可以看出,  $f$  参数和截断参数  $\delta$  比较,  $f$  参数的影响更为重要。由图 1d 可知, 按 (10) 式作的光强分布曲线与分别按 (11) 式和 (12) 式所作的光强分布曲线吻合甚好, 因此, 当  $\delta \geq 2.2$  时, 光阑对非傍轴高斯光束的衍射效应可忽略。图 1e 表明, 当光束束宽与波长可相比拟

时, 不能采用傍轴近似来描述高斯光束通过小孔的衍射。由图 1e 可知, 在  $\delta$  较小 (例如  $\delta < 0.6$ ) 时,  $I_c(0, 0, z)$  与  $I_j(0, 0, z)$  之间存在明显差异, 这说明当非傍轴高斯光束的截断参数  $\delta$  较小时, 不能采用传统的光强定义, 而必须采用光强的精确定义来描述。并且从图 1 中可以看出, 当  $z \geq 2z_R$  时, 光强的精确定义与传统定义之间的差异可以忽略。此外, 从图 1 还可知, 在  $\delta$  较小 (例如  $\delta = 0.8$ ) 即光阑衍射效应较强时, 当  $z \geq 1.5z_R$  时, 光强的精确定义与传统定义之间的差异就可以忽略。  
(下转第 336 页)

化各阶色散相对误差变化范围较大,尤其是二阶色散相对误差。各阶色散相对误差值间的差别随着入射角的变大而增加。当入射角变大时,刻线严格平行时光栅对的色散将逐渐大过刻线不平行时光栅对的色散。

同样地,对不同转角下刻线密度为 1200 line/mm 和 1480 line/mm 的光栅对压缩器中每单位长度光栅间距的垂直谱位移进行了计算,结果如图 4 所示。计算

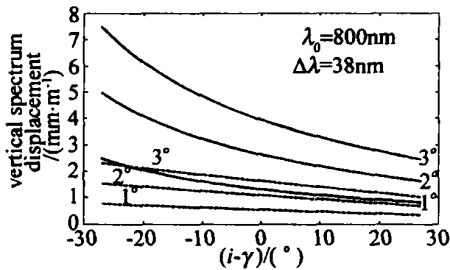


Fig 4 The vertical spectrum displacement per unit grating separation in the compressor for the grating groove densities of 1200 line/mm (dashed curves) and 1480 line/mm (solid curves)

中所取脉冲中心波长仍为 800nm, 带宽为 38nm。从图中可以看出,垂直谱位移随着转角的增加或者光栅刻线密度的变大而增加;并且对于刻线密度大的光栅,转角越大垂直谱位移越大。这表明如果光栅对压缩器中刻线不平行的现象不能消除的话,那么低刻线密度的光栅比高刻线密度的光栅要好。

### 3 结 论

提出了一种理论模型来分析啁啾脉冲放大系统

中的光栅对压缩器在光栅面平行而刻线不平行时光的衍射特性,所得结果可供系统校准时参考。推导出了脉冲光束单次通过光栅对的光程,数值计算了 2 阶、3 阶和 4 阶色散量,以及其与光栅对刻线严格平行时相比的色散差。计算了输出脉冲的垂直谱位移,并将其作为刻线夹角的函数进行了分析。通过分析和计算可知,光栅刻线不平行时的垂直谱位移使得光斑接收位置发生偏移,光栅间距越大偏移越大,从而加剧系统本身的空间色散。在不能保证刻线完全平行的情况下,使用低刻线密度的光栅比高刻线密度的光栅要好。

### 参 考 文 献

- [1] TREACY E B. Optical pulse compression with diffraction gratings [J]. IEEE JQ E, 1969, QE5(9): 454~458.
- [2] MARTNEZ O E. 3000 times grating compressor with positive group velocity dispersion application to fiber compensation in 1.3~1.6 $\mu$ m region [J]. IEEE JQ E, 1987, QE23(7): 59~64.
- [3] LIU W B, FENG G X, ZHU Q H. Study of super-Gaussian beam through grating pair compression in the case of finite beam size [J]. Laser Technology, 2005, 29(3): 261~265 (in Chinese).
- [4] KESSLER T J, BUNKENBURG J, HUANG H *et al*. Demonstration of coherent addition of multiple gratings for high energy chirped-pulse-amplification lasers [J]. Opt Lett, 2004, 29(6): 635~637.
- [5] STERN M, HERITAGE J P, CHASE E W. Grating compensation of high-order fiber dispersion [J]. IEEE JQ E, 1992, QE28(12): 2742~2748.
- [6] ZHANG Z G, HARAYAMA S, YAGI T *et al*. Vertical chirp in grating stretcher and compressor [J]. A P L, 1995, 67(2): 176~178.
- [7] ZHANG Z G, YAGI T. Evaluation of dispersion in a misalignment grating pair pulse compressor [J]. JA P, 1995, 77(2): 937~939.

(上接第 333 页)

### 3 小 结

基于瑞利衍射积分公式,采用光强的精确定义与传统定义,对标量非傍轴高斯光束通过小圆孔光阑衍射的轴上光强进行了比较。数值计算结果表明,在非傍轴光学范畴内和光阑近场衍射区,光强的精确定义  $I_c(Q, Q, z)$  与传统定义  $I_j(Q, Q, z)$  存在明显差异。差异的大小与参数  $f = 1/\lambda w_0$ 、截断参数  $\delta = a/\lambda w_0$  和距离  $z$  有关,而且  $f$  参数影响更为显著。

### 参 考 文 献

- [1] LAABSH. Propagation of Hermite-Gaussian beams beyond the paraxial approximation [J]. Opt Commun, 1998, 147: 1~4.
- [2] NEMOTO S. Nonparaxial Gaussian beams [J]. Appl Opt, 1990, 29

(13): 1940~1946.

- [3] DUAN K L, LÜ B D. Non-paraxial Hermite-Gaussian beams and their higher-order corrections [J]. Laser Technology, 2003, 27(2): 155~157 (in Chinese).
- [4] CAO Q, DENG X M, GUO H. Accurate expression of light intensity at transverse plane [J]. Acta Optica Sinica, 1996, 16(7): 897~902 (in Chinese).
- [5] CAO Q, DENG X M. Power carried by scalar light beams [J]. Opt Commun, 1998, 151: 212~216.
- [6] PORRAS M A. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beam [J]. Optik, 1999, 110(9): 417~420.
- [7] MANDEL L, WOLF E. Optical coherence and quantum optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 126.
- [8] MANDEL L, WOLF E. Optical coherence and quantum optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 185.