

文章编号: 1001-3806(2006)02-0181-02

# 非傍轴旋转对称拉盖尔 高斯光束的远场发散角

康小平<sup>1,2</sup>, 吕百达<sup>2\*</sup>

(1. 琼州大学 物理系, 五指山 572200; 2 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

**摘要:** 基于功率密度的二阶矩方法, 推导出了非傍轴旋转对称拉盖尔 高斯 (LG) 光束远场发散角的解析公式, 并表示为伽玛函数的幂级数求和形式。计算结果表明, 当初始束腰宽度和波长之比  $w_0/\lambda$  趋于 0 时, 对任意非傍轴旋转对称 LG 光束, 远场发散角趋于渐近值  $63.435^\circ$ , 与阶数无关。对于  $p=0$  的特例, 则退化为非傍轴高斯光束的结果。

**关键词:** 激光光学; 非傍轴拉盖尔 高斯光束; 功率密度; 发散角

**中图分类号:** O435 **文献标识码:** A

## Far-field divergence angle of nonparaxial rotationally symmetric Laguerre-Gaussian beams

KANG Xiao-ping<sup>1,2</sup>, LÜ Bai-da<sup>2</sup>

(1. Department of Physics, Qiongzhou University, Wuzhishan 572200, China; 2 Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** Based on the second-order moment of the power density, the far-field divergence angle of nonparaxial rotationally symmetric Laguerre-Gaussian (LG) beams is derived and expressed in a sum of the series of the Gamma function. It is shown that the far-field divergence angle of nonparaxial rotationally LG beams approaches to an asymptotic value of  $63.435^\circ$  as the initial waist-width to wavelength ratio  $w_0/\lambda$  approaches zero, which is independent of the order. For the special case of  $p=0$  our result reduces to that of nonparaxial Gaussian beams.

**Key words:** laser optics; nonparaxial Laguerre-Gaussian (LG) beam; power density; divergence angle

### 引 言

在实际应用中, 激光束的远场发散角是一个重要的特性参数。随着大发散角的二极管激光, 束宽与波长可相比拟强聚焦光束的广泛应用, 推动了对非傍轴光束 (即大发散角光束) 研究工作的进展<sup>[1,2]</sup>。目前, 对于非傍轴光束已发展了多种研究方法, 例如微扰级数法、角谱法、虚源点法等。近年来, PORRAS 指出应当用功率密度代替强度二阶矩来描述非傍轴标量光束的光束质量<sup>[3]</sup>。作者采用文献 [3] 中的方法, 对非傍轴旋转对称拉盖尔 高斯 (LG) 光束的远场发散角作了研究, 推导出了发散角的解析公式, 并作了计算分析。非傍轴高斯光束的发散角可作为本文中的特例给出。

### 1 理论模型

在柱坐标系中, 二维旋转对称 LG 光束在入射面  $z=0$  处的场分布为<sup>[4]</sup>:

基金项目: 国家高技术基金资助项目 (A823070)

作者简介: 康小平 (1964-), 女, 副教授, 博士研究生, 主要从事激光传输与变换的研究。

\* 通讯联系人。E-mail: badalu@scu.edu.cn

收稿日期: 2004-11-08; 收到修改稿日期: 2005-02-24

$$E_0(r_0, z=0) = L_p^0(2r_0^2/w_0^2) \exp(-r_0^2/w_0^2) \quad (1)$$

式中,  $w_0$  为 LG 光束对应的基模高斯光束束腰宽度,  $L_p^0(\cdot)$  是角向指数为 0 的  $p$  阶拉盖尔多项式。

根据角谱理论, (1) 式所示的 LG 光束的空间光场分布可表示为<sup>[5]</sup>:

$$E(r, z) = 2\pi \int_0^\infty A(\rho, z) J_0(2\pi r\rho) \rho d\rho d\theta \quad (2)$$

式中,  $A(\rho, z)$  为 LG 光束在空间频率域中任一平面  $z$  处的场分布:

$$A(\rho, z) = A_0(\rho, z=0) \exp[ikz \sqrt{1 - (\lambda\rho)^2}] \quad (3)$$

$$A_0(\rho, z=0) = 2\pi \int_0^\infty E_0(r_0, z=0) J_0(2\pi r_0\rho) dr_0 =$$

$$(-1)^p \pi w_0^2 L_p^0(2\pi^2 w_0^2 \rho^2) \exp(-\pi^2 w_0^2 \rho^2) \quad (4)$$

式中,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长, 当  $\rho > 1/\lambda$  时, 对应于随  $z$  的增加迅速衰减的倏逝波, 当  $\rho < 1/\lambda$  时, 则对应于传播波。

LG 光束在空间任一横平面  $z$  处的功率密度分布为<sup>[3,6]</sup>:

$$D = \text{Re} \left\{ -i \frac{\lambda}{2\pi} E^*(r, z) \frac{\partial E(r, z)}{\partial z} \right\} \quad (5)$$

式中,  $\text{Re}$  表示取实部,  $*$  表示复共轭。

根据文献 [3] 中的方法, 可求得 LG 光束在自由空间非傍轴传输时的远场发散角为:

$$\tan^2 \theta = \frac{4\pi \lambda^2}{P(z)} \int_0^{1/\lambda} \int_{\gamma} |A_0(\rho, z=0)|^2 d\rho \quad (6)$$

式中,

$$P(z) = \int_0^{1/\lambda} \int_{\gamma} |A_0(\rho, z=0)|^2 \rho d\rho \quad (7)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 \rho^2} \quad (8)$$

对(4)式作如下变换:

$$p = \sin \alpha, (0 \leq \alpha \leq \pi/2) \quad (9)$$

并把式中的指数函数展开为泰勒级数:

$$\exp(-\pi^2 w_0^2 \rho^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\pi^2 w_0^2 \rho^2)^n \quad (10)$$

利用拉盖尔多项式展开式<sup>[7]</sup>:

$$L_p^0(x) = \sum_{m=0}^p \frac{(-1)^m p!}{(p-m)! (m!)^2} x^m \quad (11)$$

则(4)式退化为:

$$A_0(\rho, z=0) = \pi w_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p \frac{(-1)^{n+m} 2^n p!}{n! (p-m)! (m!)^2} (\pi w_0 \rho)^{2(m+n)} \quad (12)$$

把(12)式代入(7)式,可得:

$$P(z) = P(z=0) = \frac{\pi^{7/2} w_0^4}{2\lambda^2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{m_1 m_2} \times \frac{\Gamma(n_1 + n_2 + m_1 + m_2 + 1)}{\Gamma(n_1 + n_2 + m_1 + m_2 + 5/2)} \quad (13)$$

式中,  $\Gamma$  为伽玛函数,

$$F_{m_1 m_2} = \frac{(-1)^{n_1+n_2+m_1+m_2} 2^{m_1+m_2} (p!)^2 (\pi w_0/\lambda)^{2(n_1+n_2+m_1+m_2)}}{n_1! n_2! (p-m_1)! (p-m_2)! (m_1!)^2 (m_2!)^2} \quad (14)$$

把(12)式, (13)式代入(6)式,经繁冗的积分过程,可得 LG 光束的远场发散角为:

$$\tan^2 \theta = \frac{2\pi^{7/2} w_0^4}{\lambda^2 P(z)} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{m_1 m_2} \times \frac{\Gamma(n_1 + n_2 + m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(n_1 + n_2 + m_1 + m_2 + 5/2)} \quad (15)$$

(15) 式是 LG 光束在自由空间非傍轴传输时,其远场发散角的解析公式。尽管(15)式写为无穷级数形式,但收敛很快,数值计算表明,一般  $n_i (i=1, 2)$  取至 10 项左右就可得到与直接积分(6)式一致的结果。

在(15)式中,若令  $p=0$ ,可得到非傍轴高斯光束在自由空间传输时,其远场发散角的解析公式为:

$$\tan^2 \theta = 4 \times \frac{\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \left(\frac{\pi w_0}{\lambda}\right)^{2(n_1+n_2)} \Gamma(n_1 + n_2 + 2)}{\Gamma(n_1 + n_2 + 5/2)} \left[ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \left(\frac{\pi w_0}{\lambda}\right)^{2(n_1+n_2)} \Gamma(n_1+n_2+1) \right] / \Gamma(n_1+n_2+\frac{5}{2}) \quad (16)$$

## 2 数值计算和分析

利用(6)式和(15)式可以计算不同阶次的 LG 光束的远场发散角。图 1 中给出了 LG 光束的远场发散

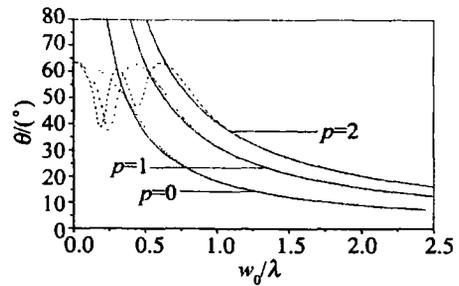


Fig 1 Far-field divergence angle  $\theta$  of nonparaxial rotationally symmetric LG beams with  $p=0, 1, 2$  versus  $w_0/\lambda$

角  $\theta$  随  $w_0/\lambda$  的变化,计算用光束参数为:  $p=0, 1, 2$ 。图中实线表示傍轴结果,虚线为非傍轴结果。由图 1 可知,当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时, LG 光束的远场发散角  $\theta$  达到渐近值,即发散角  $\theta$  有一个上限。用解析式(15)式做了大量的计算,数值计算结果表明,当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时,非傍轴 LG 光束的远场发散角  $\theta$  的上限为  $\theta_{\max} = 63.435^\circ$ ,与光束阶数无关。这与傍轴 LG 光束远场发散角  $\theta_{p_0} = 2p + 1\lambda/\pi w_0$  的特性有所不同<sup>[8]</sup>。

非傍轴 LG 光束远场发散角  $\theta$  的上限也可从(15)式中得到,在  $w_0/\lambda \ll 1$  时,(15)式取级数展开的前两项,略去高阶项后,得到:

$$\tan \theta \approx 2 \left[ 1 - \frac{2(2p+1)\pi^2}{5} (w_0/\lambda)^2 \right] \quad (17)$$

由(17)式知,当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时,对于任意阶 ( $p=0, 1, 2, 3, \dots$ ) 非傍轴旋转对称 LG 光束,其远场发散角  $\theta \approx \arctan 2 = 63.435^\circ$ 。 $p=0$  对应于非傍轴高斯光束的远场发散角,这与文献[1]中的结果一致。此外,从图中还可以看出,随着  $w_0/\lambda$  的减小和  $p$  的增大,非傍轴和傍轴结果之间存在明显差异,但随着  $w_0/\lambda$  的增大,非傍轴 LG 光束的远场发散角与傍轴发散角趋于一致,二者之间的差异可以忽略。

## 3 结论

基于功率密度定义的二阶矩法,利用角谱法和级数展开法,推导出了标量非傍轴旋转对称 LG 光束远场发散角的解析公式,并作了数值计算和分析。非傍轴高斯光束的有关结果,可作为特例 ( $p=0$ ) 得出。研究表明,当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时,非傍轴旋转对称 LG 光束的远场发散角趋于渐近值  $63.435^\circ$ ,与阶数无关。该方法的优点在于给出了远场发散角的解析公式,可以根据需求的精度、 $w_0/\lambda$  的大小及级数展开中  $n$  的项 (下转第 185 页)

通过了一个低通滤波器,能够滤除高于信号最高频率的高频噪声,也能提高信噪比<sup>[9]</sup>。对图 3b 中的数据滤波后得到的数据见图 3c,从图中可见,平滑滤波可以有效去除噪声干扰,提高信噪比,使信号在频域表现更平滑,并保持了原信号的特征。

图 3c 中的多普勒频移  $f_b \approx 92\text{kHz}$ ,利用 (3) 式可计算出所测量的速度为  $v \approx 4.7\text{m/s}$ 。通过调整电压  $V$ ,可以得到一系列的多普勒频移  $f_b$  值,从而得到一系列的速度值。如图 4 所示,图中,“曲线 1”为采用双光

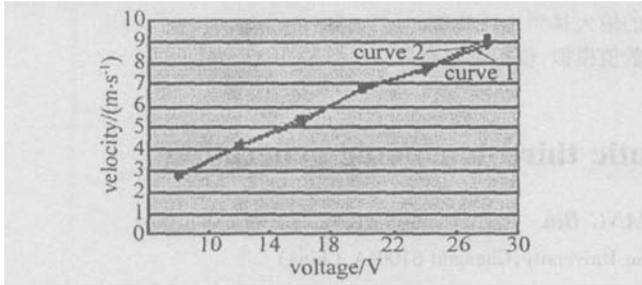


Fig 4 Contrast of the velocity calculated based on the Doppler frequency and the actual velocity

束方式测量到的速度随电压的变化曲线;而“曲线 2”为风扇转速和电压的实际关系曲线。从该图可以看出,本实验中的双光束方式得到的速度大小与实际值相当接近,误差不超过 2.5%。同时,测量过程中,没有出现信号中断或失真,这与测量区足够长有关。根据前面的计算,测量区长度  $l_m = 12.6\text{mm}$ ,这样,即使风扇的表面形状不够规则或者转动的过程中有轻微的抖动,其表面都能够始终和测量区相交。

不过,因为  $\text{CO}_2$  激光波长较长,测量区内形成的条纹间距比较大,因此,造成测速的误差比使用可见光波段的激光要大一些。另外,中远红外的探测器成本比可见光波段的要高得多,这也是使用  $\text{CO}_2$  激光作为

光源的一个限制因素。

## 4 结束语

对  $\text{CO}_2$  激光的双光束方式横向测速进行了理论分析和实验研究。采集后向散射光信号,在计算机上进行了实时 FFT 处理,并进行滤波,得到了高信噪比的信号曲线。根据测出的多普勒频移算出的速度大小与实际值偏差在 2.5% 范围以内。最后对实验结果进行了分析和讨论。

## 参 考 文 献

- [1] DURST F, MELLING A, WHITEHEAD J H. Principles and practice of laser-Doppler anemometry [M]. Beijing: Science Press, 1992. 6~7 (in Chinese).
- [2] LU H Sh, LU B. Latest development of laser Doppler technique in vibration measurement [J]. Laser Technology, 2002, 29 (1): 176~179 (in Chinese).
- [3] AUGERE B, CARDU J. A fiber-optic  $5\mu\text{m}$  CW coherent laser anemometer for in-flight measurements [J]. SPIE, 2003, 5086: 121~128.
- [4] WU L M, YE L H, HE A Zh *et al* Turbulent flow velocity field measurement of recoil mechanism by LDV [J]. Infrared and Laser Engineering, 1998, 27 (6): 29~30 (in Chinese).
- [5] ZOU H, ZHAO Y. Applications of laser Doppler technique in solid surface measurement [J]. Optical Technique, 2000, 26 (2): 101~106 (in Chinese).
- [6] CAI X P, ZHAO Y, DAI Y J *et al*  $\text{CO}_2$  coherent laser Doppler velocimeter [J]. Infrared Millim Waves, 1996, 15 (6): 465~468 (in Chinese).
- [7] LI Zh Zh, CAI H, HONG X G *et al* Twin-beam laser Doppler velocity system [J]. Physics Experimentation, 2005, 25 (3): 44~47 (in Chinese).
- [8] SHEN X. Laser Doppler velocimetry and its application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 23~32 (in Chinese).
- [9] CHEN Y, WANG Y L, ZHOU D F *et al* Faint signal processing of lidar based on wavelet multi-resolution analysis [J]. Laser Technology, 2005, 29 (3): 278~280 (in Chinese).

(上接第 182 页)

数,来计算任意阶的非傍轴旋转对称 LG 光束的发散角。

## 参 考 文 献

- [1] PORRAS M A. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation [J]. Opt Commun, 1996, 127: 79~95.
- [2] DUAN K L, LÜB D. Non-paraxial Hermite-Gaussian beams and their higher-order corrections [J]. Laser Technology, 2003, 27 (2): 155~157 (in Chinese).
- [3] PORRAS M A. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beam [J]. Optik, 1999, 110 (9): 417~420.
- [4] SIEGMAN A E. Laser [M]. California: University Science Books Mill Valley, 1986. 644.
- [5] GOODMAN J W. Introduction to Fourier optics [M]. Beijing: Science Press, 1979. 54~58 (in Chinese).
- [6] CAO Q, DENG X M, GUO H. Power carried by scalar light beams [J]. Opt Commun, 1998, 151: 212~216.
- [7] BEYER W H. Standard mathematical tables and formulae [M]. 29th ed, Boca: CRC Press, 1991. 378.
- [8] LÜB D. Laser optics [M]. 3rd ed, Beijing: Higher Education Press, 2003. 105 (in Chinese).