第 29卷 第 6期 激 光 技 术 Vol. 29, No. 6
2005年 12月 LASER TECHNOLOGY December, 2005

文章编号: 1001-3806(2005)06-0641-04

厄米-拉盖尔-高斯光束的传输特性

郑 振,刘永欣,吕百达*
(四川大学 激光物理与化学研究所,成都 610064)

摘要: 利用 Collins公式,推导出厄米-拉盖尔-高斯 (HLG)光束通过近轴 *ABCD* 光学系统的解析传输公式,并用来研究通过自由空间和薄透镜的传输特性。结果表明,除模指数 m, n之外,对 HLG光束新引入的 α参数,它影响光强分布和对称性;HLG光束在传输中保持形状不变;HLG光束的焦移与模指数 m, n和 α参数无关,这意味着 m, n和 α不同的 HLG光束聚焦在同一位置。并给出了 HLG光束的 M^2因子。

关键词: 厄米-拉盖尔-高斯光束;传输特性;*ABCD*系统;α参数;M^2因子
中图分类号: O435 **文献标识码**: A

Propagation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beams

ZHENG Zhen, LIU Yong-xin, LÜ Bai-da
(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Based on Collins formula, an analytical propagation expression for Hermite-Laguerre-Gaussian (HLG) beams through a paraxial optical *ABCD* system is derived and used to study their propagation properties in free-space and through a thin lens. The results show that, apart from the mode indices m, n, it is necessary for HLG beams to introduce a new parameter α, which affects their intensity distribution and symmetry property. HLG beams preserve their shape upon propagation. There is a focal shift in HLG beams which is independent of the parameters m, n, and α, which means that HLG beams with different values of m, n, α are focused at the same place. The M^2 factor of HLG beams is also given.

Key words: Hermite-Laguerre-Gaussian (HLG) beam; propagation property; *ABCD* system; parameter α; M^2 factor

引 言

厄米-高斯 (HG)光束和拉盖尔-高斯 (LG)光束在光学谐振腔和光波导理论中有重要作用[1]。虽然这两类光束的对称性不同,但是厄米-高斯函数可以转换成拉盖尔-高斯函数的线性叠加,反之亦然[2]。2004年,ABRAMOCHKIN通过引入一个 α参数使 HG光束与 LG光束统一起来。这类有更为普遍性的光束称为广义高斯光束或厄米-拉盖尔-高斯 (HLG)光束,它有在传输中保持结构稳定性等特性,具有重要理论和实际应用价值[3]。作者利用 Collins公式推导出 HLG光束通过近轴 *ABCD* 光学系统的解析传输公式,并以自由空间传输和薄透镜聚焦为例进行了计算分析,还进一步推导出了它的光束传输因子 (M^2因子)。

1 HLG光束的场分布

在 $z=0$面上的 HLG光束场分布为[3]:

$$G_{m,n}(x,y,0/\alpha)=\exp(-x^2-y^2)\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\times\sin^{n-k}\alpha\,\mathrm{P}_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\,\mathrm{H}_{m+n-k}(\sqrt{2}x)\,\mathrm{H}_k(\sqrt{2}y)\qquad(1)$$

式中,m, n为 HLG光束的模指数,$\mathrm{H}_j(\cdot)$为厄米多项式 ($j=m+n-k,k$),$\mathrm{P}_k^{u,v}(t)=2^{-k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+u}{p}\times\binom{k+v}{k-p}(t-1)^{k-p}(t+1)^p$为雅可比多项式。

从 (1)式可以看出,HLG光束随 α变化的最小周期是 2π。因此,只需考虑 α取值在 0到 2π范围内变化即可。然而,当 $\alpha=0,\alpha=\pi/2,\alpha=\pi,\alpha=3\pi/2$时,$\cos\alpha$或 $\sin\alpha$等于 0,(1)式对 α直接求和遇到困难。利用文献 [3]中 (4)式,(5)式和 (9)式,计算得:

$$G_{m,n}(x,y/0)=(-\mathrm{i})^n\mathrm{H}_{m,n}(x,y)\qquad(2)$$

$$G_{m,n}[x,y/(\pi/4)]=\begin{cases}(-1)^n2^m n!\mathrm{L}_{n,m-n}(x,y), & (m\geqslant n)\\(-1)^m2^n m!\mathrm{L}_{m,n-m}(x,-y), & (m\leqslant n)\end{cases}\qquad(3)$$

$$G_{m,n}(x,y/\frac{\pi}{2})=(-\mathrm{i})^m\mathrm{H}_{n,m}(x,-y)\qquad(4)$$

$$G_{m,n}(x,y/\pi)=(-\mathrm{i})^n\mathrm{H}_{m,n}(-x,-y)\qquad(5)$$

$$G_{m,n}(x,y/\frac{3\pi}{2})=(-\mathrm{i})^m\mathrm{H}_{n,m}(-x,y)\qquad(6)$$

作者简介:郑 振 (1981-),男,硕士研究生,从事激光光束传输变换方面的研究工作。

* 通讯联系人。E-mail: badalu@scu.edu.cn

收稿日期:2004-09-06;收到修改稿日期:2004-11-05

式中,$\mathrm{H}_{m,n}(u,v)=\exp(-u^2-v^2)\mathrm{H}_m(\sqrt{2}u)\mathrm{H}_n(\sqrt{2}v)$,$(m,n=0,1,\cdots)$。$\mathrm{L}_{m,\pm n}(u,v)=\exp(-u^2-v^2)(u\pm \mathrm{i}v)^n\mathrm{L}_m^n(2u^2+2v^2)$,$(m,n=0,1,\cdots)$,$\mathrm{L}_m^n(\cdot)$为缔合拉盖尔多项式。

这样,得到 α 取任意值时的 HLG光束,显然,当 $\alpha=0,\alpha=\pi/2,\alpha=\pi,\alpha=3\pi/2$和 $\alpha=\pi/4$时,HLG分别约化为熟知的 HG和 LG光束。

2　HLG通过近轴 ABCD 光学系统的传输

将 (1)式改写为:

$$G_{m,n}\left(\frac{x}{w_0},\frac{y}{w_0},0/\alpha\right)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\kappa}{2q_0}(x^2+y^2)\right]\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\times\sin^{n-k}\alpha\,\mathrm{P}_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\,\mathrm{H}_{m+n-k}\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}x\right)\mathrm{H}_k\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}y\right)\quad(7)$$

式中,$q_0=\mathrm{i}\kappa w_0^2/2$,$w_0$分别为对应的基模高斯光束的复参数和束腰宽度,$\kappa=2\pi/\lambda$为波数,$\lambda$为波长。

将 (7)式代入 Collins公式[4],经复杂的运算,最后结果整理为:

$$G_{m,n}\left(\frac{x}{w(z)},\frac{y}{w(z)},z/\alpha\right)=\left(A+\frac{B}{q_0}\right)^{-1}\left(\frac{A-B/q_0}{A+B/q_0}\right)^{\frac{m+n}{2}}\times\exp(-\mathrm{i}\kappa z)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\kappa}{2q(z)}(x^2+y^2)\right]\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\times\sin^{n-k}\alpha\,\mathrm{P}_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\,\mathrm{H}_{m+n-k}\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right]\mathrm{H}_k\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\right]\quad(8)$$

式中,$q(z)$,$w(z)$分别为 z处基模高斯光束的复参数和束宽。(8)式为 HLG光束通过近轴 $ABCD$系统的解析传输公式,现举典型二例说明其应用。

(1)自由空间传输。此时有:

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad(9)$$

将 (9)式代入 (8)式得:

$$G_{m,n}(x,y,z/\alpha)=\left(1+\frac{z}{q_0}\right)^{-1}\left(\frac{1-z/q_0}{1+z/q_0}\right)^{\frac{m+n}{2}}\exp(-\mathrm{i}\kappa z)\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\kappa}{2q(z)}(x^2+y^2)\right]\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\sin^{n-k}\alpha\times\mathrm{P}_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\,\mathrm{H}_{m+n-k}\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right)\mathrm{H}_k\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\right)\quad(10)$$

图 1是 HLG光束 $G_{1,2}(x,y,z/\alpha=\pi/9)$在自由空间 $z=0$, $z=1\mathrm{m}$, $z=5\mathrm{m}$, $z=10\mathrm{m}$处的等光强线。可以看出,HLG光束在自由空间传输过程中形状保持不变,

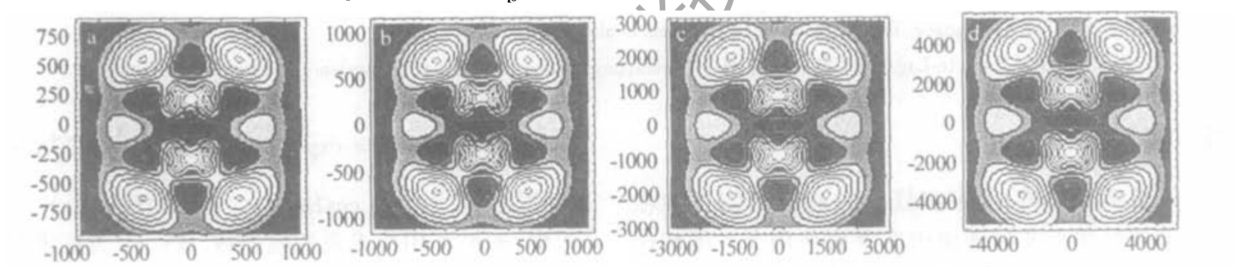

Fig 1　Contour lines of the intensity of a HLG beam $G_{1,2}(x,y,z/\alpha=\pi/9)$ in free-space propagation

a—$z=0$　b—$z=1\mathrm{m}$　c—$z=5\mathrm{m}$　d—$z=10\mathrm{m}$

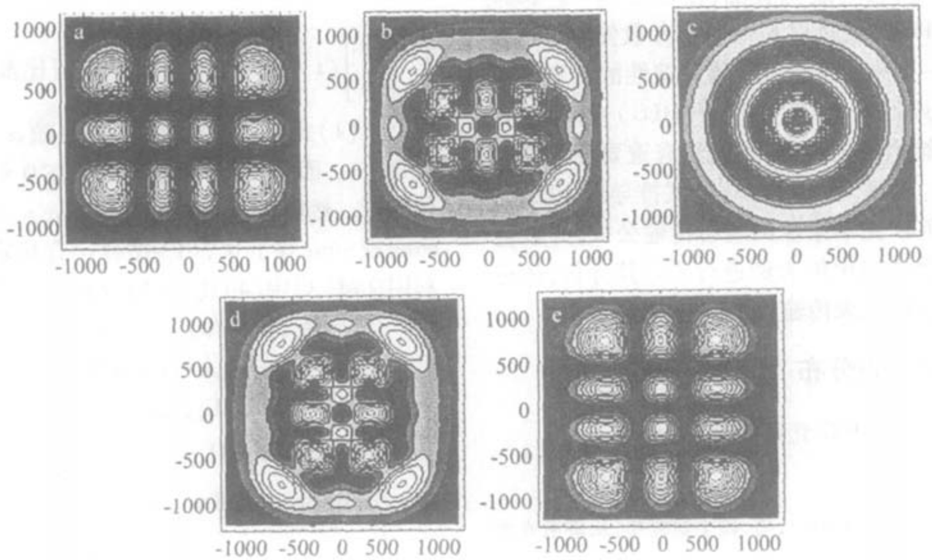

Fig 2　Contour lines of the intensity of HLG beams $G_{3,2}(x,y,z/\alpha)$ at the place $z=0.5\mathrm{m}$ in free-space propagation

a—$\alpha=0$　b—$\alpha=\pi/8$　c—$\alpha=\pi/4$　d—$\alpha=3\pi/8$　e—$\alpha=\pi/2$

但随着传输距离的增大而发散。图 2分别为 $\alpha=0,\alpha=\pi/8,\alpha=\pi/4,\alpha=3\pi/8,\alpha=\pi/2$对应的 HLG光束 $(m=3,$

$n=2$)在自由空间 $z=0.5\mathrm{m}$ 处的等光强线,而 $\alpha=5\pi/8$, $\alpha=3\pi/4$, $\alpha=7\pi/8$, $\alpha=\pi$ 各图分别与 $\alpha=3\pi/8$, $\alpha=\pi/4$, $\alpha=\pi/8$, $\alpha=0$的等光强线相同。显然,$\alpha=0$, $\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi$和 $\alpha=\pi/4$, $\alpha=3\pi/4$分别对应的是 HG和 LG光束。而且,HLG光束的光强分布和对称性与 α参数有关。

(2)薄透镜聚焦。设 HLG光束通过位于 $z=0$面、焦距为 f的薄透镜聚焦,从 $z=0$面到 $z=f+\Delta z$面的变换矩阵为[5]:

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & f+\Delta z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\Delta z}{f} & f+\Delta z\\ -\frac{1}{f} & 1\end{bmatrix}\qquad(11)$$

式中,Δz为输出面与薄透镜后焦面间的距离。

将 (11)式代入 (8)式,得:

$$G_{m,n}(x,y,z/\alpha)=\left[-\frac{\Delta z}{f}+\frac{z}{q_0}\right]^{-1}\left[\frac{-\Delta z/f-z/q_0}{-\Delta z/f+z/q_0}\right]^{\frac{m+n}{2}}\times\exp(-\mathrm{i}\kappa z)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\kappa}{2q(z)}(x^2+y^2)\right]\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\sin^{n-k}\alpha\times P_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\mathrm{H}_{m+n-k}\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right]\mathrm{H}_k\left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\right]\qquad(12)$$

式中,

$$\frac{1}{q(z)}=\frac{f-q_0}{(f+\Delta z)f-\Delta z q_0}\qquad(13)$$

$$\frac{1}{w(z)^2}=\frac{1/w_0^2}{(\Delta z/f)^2+(f+\Delta z)^2\frac{\lambda^2}{\pi^2w_0^4}}\qquad(14)$$

在 (12)式中令 $x=0$, $y=0$,由厄米多项式的性质可知,当 $m+n-k$或者 k为奇数,即 $m+n$为奇数时,有:

$$G_{m,n}(0,0,z/\alpha)=0,\quad(m+n=2l+1,\ l=0,1,2,\cdots)\qquad(15)$$

此时,轴上光强恒为 0。当 $m+n$为偶数时,由 (12)式得轴上场分布为:

$$G_{m,n}(0,0,z/\alpha)=\left(-\frac{\Delta z}{f}+\frac{z}{q_0}\right)^{-1}\left(\frac{-\Delta z/f-z/q_0}{-\Delta z/f+z/q_0}\right)^{\frac{m+n}{2}}\times\exp(-\mathrm{i}\kappa z)\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\sin^{n-k}\alpha\times P_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\mathrm{H}_{m+n-k}(0)\mathrm{H}_k(0)\qquad(16)$$

将 (16)式代入轴上光强公式 $I_{m,n}(0,0,z)=|G_{m,n}(0,0,z/\alpha)|^2$得:

$$I_{m,n}(0,0,z)=\left\{\left(\frac{\Delta z}{f}\right)^2+\frac{(1+\Delta z/f)^2}{\pi^2N_\mathrm{G}^2}\right\}^{-1}\times\left\{\sum_{k=0}^{m+n}\mathrm{i}^k\cos^{m-k}\alpha\sin^{n-k}\alpha P_k^{(m-k,n-k)}(-\cos2\alpha)\mathrm{H}_{m+n-k}(0)\mathrm{H}_k(0)\right\}^2\qquad(17)$$

由$\frac{\mathrm{d}I_{m,n}(0,0,z)}{\mathrm{d}(\Delta z/f)}=0$,可得轴上光强的最大值点相对于几何焦点的相对偏移量即相对焦移为:

$$\frac{\Delta z}{f}=-\frac{1}{1+\pi^2N_\mathrm{G}^2}\qquad(18)$$

式中,$N_\mathrm{G}=w_0^2/\lambda f$为对应基模高斯光束的菲涅耳数[6]。HLG光束按光强二阶矩定义的束宽为[7]:

$$W(z)^2=\frac{2}{P(z)}\iint_\infty I(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(19)$$

式中,$I(x,y,z)=\left|G_{m,n}\left(\frac{x}{w(z)},\frac{y}{w(z)},z/\alpha\right)\right|^2$, $P(z)=\iint_\infty I(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,分别为 z处横截面上 HLG光束的光强和总功率。

根据文献 [3]中 (12)式、(18)式,由 (19)式可推导出 HLG光束的束宽为:

$$W(z)=\sqrt{m+n+1}\,w(z)\qquad(20)$$

将 (18)式代入 (14)式得到聚焦后对应的基模高斯光束的束腰宽度:

$$w_0'=\frac{w_0}{\sqrt{1+\pi^2N_\mathrm{G}^2}}\qquad(21)$$

由 (20)式和 (21)式得到 HLG光束聚焦前后的束腰宽度分别为:

$$W_{mn0}=\sqrt{m+n+1}\,w_0\qquad(22)$$

$$W_{mn0}'=\sqrt{m+n+1}\,w_0'=\frac{W_{mn0}}{\sqrt{1+\pi^2N_\mathrm{G}^2}}\qquad(23)$$

由 (18)式和 (23)式知,聚焦后 HLG光束的相对焦移与模指数 m, n和 α参数无关,即对不同 m, n和 α的 HLG光束聚焦后其束腰在同一位置。但聚焦后 HLG光束的束腰宽度与 m, n有关,且为入射 HLG光束束腰的 $1/\sqrt{1+\pi^2N_\mathrm{G}^2}$。

图 3是 $m=1$, $n=2$和 $\alpha=\pi/9$的 HLG光束经过 $f=6\mathrm{cm}$的薄透镜聚焦后在实际焦面上的等光强线。可以看出,薄透镜对 HLG光束有会聚作用,但光强分布保持不变。

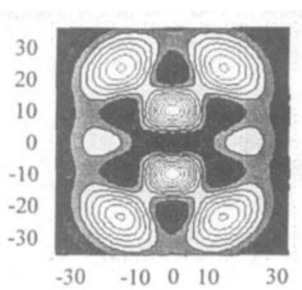

Fig 3　Contour lines of the intensity of a focused HLG beam $G_{1,2}(x,y,z/\alpha=\pi/9)$ at the real focal plane

3　HLG光束的 M^2因子

HLG光束的远场发散角为:

$$\theta = \lim_{z \to \infty} \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z} = \sqrt{m+n+1}\theta_0 \tag{24}$$

式中, θ_0 为对应基模高斯光束远场发散角。

按照 M^2 因子定义[5],由 (20)式和 (24)式得到 HLG光束的 M^2 因子为:

$$M^2 = m + n + 1 \tag{25}$$

从 (25)式中可以看出, HLG光束的 M^2 因子只与光束的模指数 m, n有关,与 α参数无关,并等于 m, n阶 HG光束的 M^2 因子。

4 小 结

推导出了 HLG光束通过近轴 *ABCD* 光学系统的解析传输公式,并以自由空间传输和薄透镜聚焦为例进行了分析。与 HG和 LG光束不同,除模指数 m, n外,在 HLG光束中引入了新的 α参数,它影响 HLG光束的光强分布和对称性。通过 *ABCD* 光学系统传输时, HLG光束形状保持不变。在自由空间传输时, HLG光束随着传输距离的增加越来越发散; HLG光束通过薄透镜聚焦时,其实际焦点位置与光束模指数 m, n及 α参数无关,即对不同 m, n和 α的 HLG光束聚焦后其束腰在同一位置,但聚焦后 HLG光束的束腰宽度与 m, n有关,与 α参数无关,且为入射 HLG光束束腰宽度的 $1/\sqrt{1+\pi^2 N_G^2}$。HLG光束的 M^2 因子等于 $\sqrt{m+n+1}$。HLG光束是一类有广泛代表性的光束,并已得到实验证实[3],在光束的对称化变换以及"奇点光学"中有重要实际应用意义。有关研究结果将另文发表。

参 考 文 献

[1] SIEGMAN A E. Lasers [M]. California: University Science Books Mill Valley, 1986. 642～913.

[2] KIMEL I, ELIAS L R. Relations between hermite and laguerre Gaussian modes [J]. IEEE J Q E, 1993, 29 (9): 2562～2567.

[3] ABRAMOCHKIN E G, VOLOSTNIKOV V G. Generalized Gaussian beams [J]. J Opt, 2004, A6: 157～161.

[4] COLLINS S A. Lens-system diffraction integral written in terms matrix optics [J]. J O S A, 1970, 60 (9): 1168～1177.

[5] 王喜庆,吕百达. 拉盖尔-高斯光束的聚集特性 [J]. 激光技术, 1996, 20 (3): 185～190.

[6] 吕百达,马 虹. 复宗量拉盖尔-高斯光束及其特性研究 [J]. 激光技术, 2001, 25 (4): 312～316.

[7] SIEGMAN A E. New development in laser resonators [J]. Proc SPIE, 1990, 1224: 2～20.

(上接第 628页)

[4] 任乃飞,杨继昌,蔡 兰 et al 激光冲击对金属材料机械性能的影响 [J]. 激光技术, 1998, 22 (4): 235～238.

[5] 任乃飞,高传玉. 碳钢的激光冲击强化研究 [J]. 激光技术, 2000, 24 (2): 66～68.

[6] 金 川,殷苏民,蔡文泉. 激光冲击成形中冲击轨迹生长方法的研究 [J]. 激光技术, 2005, 29 (2): 142～145.

[7] 戴蜀娟,刘富荣,杨 晓 et al 激光冲击在 LY12 CZ中形成冲击波的研究 [J]. 激光技术, 1997, 21 (6): 330～333.

[8] 李志勇,朱文辉,周光泉 et al 实验研究有机玻璃约束层对激光冲击波的影响 [J]. 中国激光, 1997, 24 (2): 118～122.

[9] 陆 建,倪晓武,贺安之. 激光与材料相互作用物理学 [M]. 北京:机械工业出版社, 1996. 30～38.

[10] 段志永. 激光冲击波及激光冲击处理技术的研究 [D]. 武汉:华中科技大学, 2000. 70～71.

[11] 郭大浩,吴鸿兴,王声波 et al 激光冲击强化机理研究 [J]. 中国科学, 1999, E42 (3): 288～293.

[12] 周建忠,杨继昌,周 明 et al 约束层刚性对激光诱导冲击波影响的研究 [J]. 中国激光, 2002, 29 (11): 1041～1044.

[13] 肖爱民. 激光冲击强化约束层选择的研究 [D]. 镇江:江苏大学, 2001. 19～21.

[14] 朱勤勤,封麟先. 光学透明高分子材料 [J]. 高分子材料科学与工程, 1995, 11 (5): 1～6.

[15] 段志勇,王声波,吴鸿兴 et al 约束材料及靶材表面特征对激光冲击波的影响 [J]. 激光杂志, 2000, 21 (2): 19～21.

[16] 肖爱民,杨继昌,张永康 et al 激光冲击强化约束层的选择研究 [J]. 应用激光, 2001, 21 (1): 15～18.

[17] 张永康,周 明,周建忠. 一种激光冲击精密成形方法及装置 [P]. 中国专刊: CN01134063. 0, 2003-11-26.

[18] 张凌峰,张永康,周建忠 et al 激光冲击能量体转换技术之发展趋势 [A]. 2004江苏博士研究生论坛 [C]. 南京:东南大学出版社, 2004. 436～439.