

文章编号: 1001-3806(2005)05-0522-03

基于基模高斯光束的单光子捕获概率研究

张光宇^{1,2}, 马晶^{*}, 谭立英¹, 于思源¹

(1 哈尔滨工业大学 可调谐激光技术国家级重点实验室, 哈尔滨 150001; 2 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 哈尔滨 150080)

摘要: 建立了一种自由空间量子密钥分配的单光子捕获概率理论模型。基于基模高斯光束, 推导了单光子捕获概率的表达式。得到影响单光子捕获概率的主要参量是发射机的跟瞄误差、光束远场发散角、发射机和接收机的链路距离和接收机天线孔径。针对低轨卫星-地面站间链路进行了数值仿真分析, 得到单光子捕获概率一般在 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 量级。

关键词: 量子密钥分配; 单光子捕获概率; 基模高斯光束; 低轨卫星

中图分类号: TN929.13 **文献标识码:** A

The research of single photon acquisition probability based on the fundam ental-mode Gaussian beam

ZHANG Guang-yu^{1,2}, MA Jing¹, TAN Li-ying¹, YU Si-yuan¹

(1. National Key Laboratory of Tunable Laser Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. College of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract Theoretical model of single photon acquisition probability is established for free-space quantum key distribution. The expression of single photon acquisition probability is deduced from the fundamental-mode Gaussian beam. The parameters that influence the single photon acquisition probability are the transmitter's tracking pointing error, the far-field divergence angle, the link distance between transmitter and receiver and the receiver's antenna aperture. The single photon acquisition probability is analyzed in numerical simulation for the link between a ground station and a satellite in a low earth orbit and it is normally on the order of $10^{-3} \sim 10^{-5}$.

Key words quantum key distribution; single photon acquisition probability; fundamental-mode Gaussian beam; satellite in low earth orbit

引 言

随着全球电子商务的迅速发展, 保密通信在商业、军事和外交等领域显得尤为重要。保密通信中的关键是密钥, 通信安全就在于保证密钥的安全。量子密码术, 更确切地说是量子密钥分配, 采用单光子通信技术, 通信双方通过量子信道和经典信道建立、传输密钥。根据量子力学的测不准原理和量子不可克隆原理, 任何窃听者的存在都会被发现, 从而保证密钥的绝对安全, 也就保证了加密信息的绝对安全。

自由空间量子密钥分配是量子信息领域的一个新的生长点, 目前得到了学术界的高度重视^[1,2]。自从 BENNETT 等人^[3]完成第 1 个自由空间量子密钥分配演示性实验以来, 地面点对点量子密钥分配实验^[4-9]取得了很大进展, 单光子传输的最远距离达到 23.4km^[9]。为了实现全球任意两点间保密通信, 需要

将量子密钥通过卫星进行分配。因此, 进行卫星地面站和卫星间量子密钥分配实验将是今后的研究方向。在已经进行的地面点对点实验中, 单光子源均采用高度衰减激光脉冲即弱激光脉冲。单光子捕获技术是自由空间量子密钥分配的关键技术之一。为了捕获单光子, 需要采用自由空间激光通信中的瞄准、捕获和跟踪技术以建立链路。文献[5]和文献[6]中提到了轨道高度为 300km 的低轨卫星上光子采集效率为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$, 但相关理论模型并没有文献给出。作者基于基模高斯光束, 在考虑链路跟瞄误差的情况下, 建立了一种自由空间量子密钥分配的单光子捕获概率理论模型, 并针对低轨卫星-地面站间激光链路进行了数值仿真分析。

1 自由空间量子密钥分配单光子捕获概率理论模型分析

在直角坐标系下, 沿 z 轴方向传播的归一化的基模高斯光束的表达式为^[10]:

$$\phi_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \times$$

作者简介: 张光宇(1971-), 男, 讲师, 博士研究生, 主要从事卫星光通信和量子密码方面的研究。

* 通讯联系人。E-mail: majing@hit.edu.cn

收稿日期: 2004-06-27; 收到修改稿日期: 2004-08-09

$$\exp\left\{-\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right)-\arctan\frac{z}{f}\right]\right\} \quad (1)$$

式中, f 为高斯光束的共焦参数, $R(z)$ 为与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位面的曲率半径, $w(z)$ 是与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位面上的光斑半径。

采用基模高斯型高度衰减激光脉冲作为单光子源, 考虑光的粒子性。根据量子电动力学, 光波的模式与光子的量子状态在物理概念上是等价的。基模高斯光束是 Helmholtz 方程在缓变振幅近似下的一个特解, 而光子的波动方程是 Maxwell 方程, 所以对对应于基模的归一化的光子波函数就是 $\rho_{00}(x, y, z)$ 。

在传输横截面上接收机投影区域内捕获光子时, 只能出现两种情况, 一是捕获到一个光子, 一是什么也捕获不到。但是在传输横截面上的某一位置, 要想准确地捕获到某一个光子是不可能的, 只能给出光子出现在某一位置的概率。

根据 Born 统计诠释, 在传输横截面上光子的概率密度函数为:

$$\rho_{00}(x, y, z) = |\phi_{00}(x, y, z)|^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2(z)} \exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \quad (2)$$

在传输横截面上, $\rho_{00}(x, y, z)$ 在点 $(0, 0)$ 取极大值。即光子在点 $(0, 0)$ 即光斑中心附近出现的概率最大。

对于自由空间量子密钥分配, 在不考虑自由空间量子信道传输损耗的情况下, 光子在传输横截面上被接收机捕获到的概率称为单光子捕获概率, 记为 P_{acq} 。它描述了发射机和接收机间的光学耦合。

在自由空间激光链路跟瞄过程中, 设发射机的跟瞄误差为 φ_e , 发射机和接收机的链路距离为 L , 接收机天线光阑中心在传输横截面上的坐标为 (x_0, y_0) 。

跟瞄误差通常在微弧度量级, 对 φ_e 进行小角度近似, 得:

$$z = L \cos \varphi_e \approx L \quad (3)$$

$$w(z) \approx \frac{1}{2} z \theta_0 \approx \frac{1}{2} L \theta_0 \quad (4)$$

式中, θ_0 为基模高斯光束的远场发散角。

将 (4) 式代入 (2) 式, 得:

$$\rho_{00}(x, y, L) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{L^2 \theta_0^2} \exp\left[-\frac{8(x^2+y^2)}{L^2 \theta_0^2}\right] \quad (5)$$

所以, 单光子捕获概率为:

$$P_{\text{acq}} = \iint_S \rho_{00}(x, y, L) dx dy = \iint_S \frac{8}{\pi} \frac{1}{L^2 \theta_0^2} \exp\left[-\frac{8(x^2+y^2)}{L^2 \theta_0^2}\right] dx dy \quad (6)$$

式中, S 为接收机在传输横截面上的投影区域。

在传输横截面上, 设接收机偏离光斑中心的距离

为 δ , δ 与 x 轴的夹角为 α , 则:

$$\delta \approx L \varphi_e \quad (7)$$

$$x_0 = \delta \cos \alpha \approx L \varphi_e \cos \alpha \quad (8)$$

$$y_0 = \delta \sin \alpha \approx L \varphi_e \sin \alpha \quad (9)$$

设接收机相对发射机的跟瞄误差为 φ_e , 接收机天线孔径为 d_e 。那么, 接收机在传输横截面上的投影区域 S 为椭圆域。对 φ_e 进行小角度近似, 则椭圆域 S 成为圆域。在传输横截面上, 圆域 S 可表示为:

$$(x - L \varphi_e \cos \alpha)^2 + (y - L \varphi_e \sin \alpha)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (10)$$

由于 $\rho_{00}(x, y, L)$ 具有中心对称性, 所以单光子捕获概率 P_{acq} 与 α 无关。为计算方便, 取 $\alpha = 0$ 则圆域 S 为:

$$(x - L \varphi_e)^2 + y^2 = \frac{d^2}{4} \quad (11)$$

对 (6) 式进行坐标变换, 得:

$$P_{\text{acq}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{8}{\pi} \frac{1}{L^2 \theta_0^2} \times \exp\left[-\frac{8}{L^2 \theta_0^2} \left[(r \cos \beta + L \varphi_e)^2 + (r \sin \beta)^2\right]\right] r dr d\beta \quad (12)$$

当 $\varphi_e = 0$ 时, 即接收机位于光斑中心, 则:

$$P_{\text{acq}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{8}{\pi} \frac{1}{L^2 \theta_0^2} \times \exp\left[-\frac{8r^2}{L^2 \theta_0^2}\right] r dr d\beta = 1 - \exp\left[-\frac{2d^2}{L^2 \theta_0^2}\right] \quad (13)$$

当 $\varphi_e \neq 0$ 时, 由 (12) 式很难得到 P_{acq} 的解析表达式, 可进行数值计算。

总之, 在自由空间量子密钥分配中, 采用基模高斯型高度衰减激光脉冲作为单光子源, 在考虑链路跟瞄误差的情况下, 单光子捕获概率由 (12) 式给出, 它适用于自由空间地面点对点、卫星-地面站和卫星间激光链路的量子密钥分配。

2 低轨卫星-地面站间激光链路的数值计算与分析

由 (12) 式可以看出, 影响自由空间量子密钥分配单光子捕获概率的主要参量是发射机的跟瞄误差 φ_e 、光束远场发散角 θ_0 、发射机和接收机的链路距离 L 和接收机天线孔径 d_e 。下面主要对低轨卫星-地面站间链路进行分析。

图 1 为 $\varphi_e = 0$ 时对于不同 L 的 P_{acq} 与 θ_0 和 d 的关系曲线。图 1a 中取 $d = 50 \text{ cm}$, 图 1b 中取 $\theta_0 = 30 \mu \text{ rad}$ 。可以看出, 在 L 不变情况下, P_{acq} 随着 θ_0 增加而减小, 随着 d 增加而增加; 而 θ_0 和 d 不变时, P_{acq} 随着 L 增加而减小。

图 2 为对于不同 L 的 P_{acq} 与 φ_e 的关系曲线, 其中取 $\theta_0 = 30 \mu \text{ rad}$, $d = 50 \text{ cm}$ 。可以看出, 在 L 不变时, P_{acq}

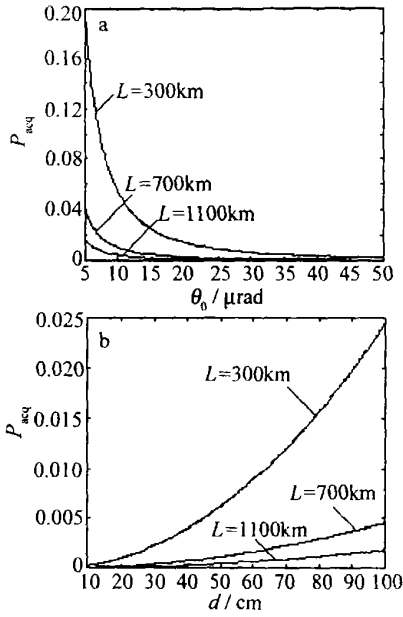


Fig 1 Curves of P_{acq} vs θ_0 and d for different L at $\varphi_e = 0$

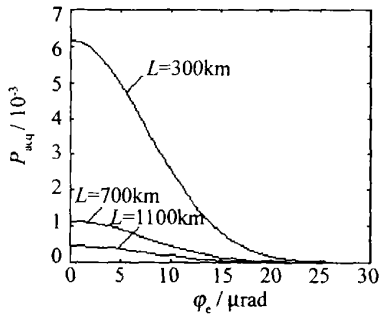


Fig 2 Curves of P_{acq} vs φ_e for different L

随着 φ_e 增加而减小, 最后趋近于 0 但随着 L 增加, P_{acq} 随 φ_e 增加而减小的速率逐渐降低。例如, 当 $L = 300\text{km}$ 时, P_{acq} 从 $\varphi_e = 0\mu\text{rad}$ 的 6.2×10^{-3} 迅速下降, 到 $\varphi_e = 30\mu\text{rad}$ 时趋近于 0 而当 $L = 1100\text{km}$ 时, P_{acq} 从 $\varphi_e = 0\mu\text{rad}$ 的 4.6×10^{-4} 开始缓慢下降, 到 $\varphi_e = 30\mu\text{rad}$ 时趋近于 0。因此, 在 θ_0 , d 和 L 一定的情况下, 为了以较大的概率捕获单光子, 对系统的跟瞄精度就提出更高的要求。

图 3 为对于不同轨道高度 H 的 P_{acq} 与天顶角 ζ 和时间 t 的关系曲线。其中取 $\varphi_e = 10\mu\text{rad}$, $\theta_0 = 30\mu\text{rad}$, $d = 50\text{cm}$ 。数值仿真基于以下链路模型: (1) 卫星运行圆形轨道; (2) 地面站位于卫星轨道平面内; (3) 最大天顶角为 60° 。

可以看出, 对于不同 H , P_{acq} 都存在极大值和极小值。其中, 极大值分别为 2.5×10^{-3} ($H = 30\text{km}$), 4.7×10^{-4} ($H = 700\text{km}$) 和 1.9×10^{-4} ($H = 1100\text{km}$), 是天顶角为 0° 时的单光子捕获概率; 而极小值分别为 7.1×10^{-4} ($H = 300\text{km}$), 1.5×10^{-4} ($H = 700\text{km}$) 和 6.7×10^{-5} ($H = 1100\text{km}$), 与天顶角为 60° 时的单光子捕获概率相对应。链路时间随着 H 增加而增加, 其值

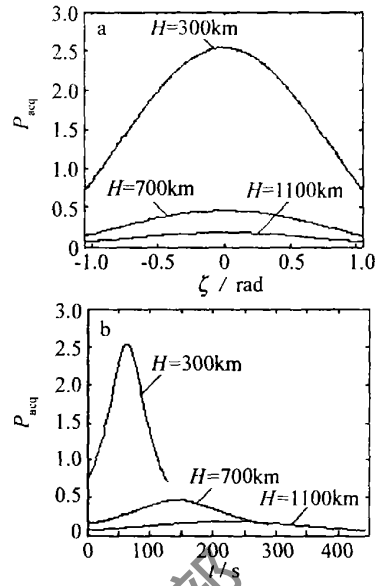


Fig 3 Curves of P_{acq} vs ζ and t for different H

分别为 127s ($H = 300\text{km}$), 287s ($H = 700\text{km}$) 和 443s ($H = 1100\text{km}$)。因此, 对于低轨卫星地面站间链路, P_{acq} 一般在 $10^{-3} : 10^{-5}$ 量级。当 $H = 300\text{km}$ 时, P_{acq} 在 $10^{-3} : 10^{-4}$ 量级, 与文献 [5] 和文献 [6] 中提到的结果是一致的。

3 结论

基于基模高斯光束, 建立了自由空间量子密钥分配单光子捕获概率理论模型, 得到了具有链路跟瞄误差的单光子捕获概率表达式。针对低轨卫星-地面站间链路进行了数值仿真分析。

(1) 影响单光子捕获概率的主要参量是发射机的跟瞄误差、光束远场发散角、发射机和接收机的链路距离和接收机天线孔径。这些参量间的制约关系直接影响到自由空间量子密钥分配系统的性能。

(2) 对于低轨卫星-地面站间量子密钥分配, 在一定的参数下, 为了以较大的概率捕获单光子, 对系统的跟瞄精度提出更高的要求。另一方面, 在系统设计时还要考虑系统可靠性和稳定性问题, 这就需要进行优化分析, 更大地发挥系统性能。

(3) 在卫星进入地面站视场的链路时间内, 接收机均可以一定的概率捕获单光子, 单光子捕获概率一般在 $10^{-3} : 10^{-5}$ 量级。

(4) 从单光子捕获来说, 在低轨卫星-地面站间进行量子密钥分配是可行的。

自由空间量子密钥分配研究在我国还处于起步阶段, 作者对单光子捕获概率进行了初步研究。该项工作为今后进行低轨卫星-地面站间量子密钥分配实验奠定了一定的理论基础。

的二元光学元件 H_2 。前述方法同样可用来制造二元光学元件 H_1 。由于二元光学元件 H_1 的面积较小,故应把空间光学调制器光强分布区域按比例缩小后,作曝光记录,再作漂白处理后就可制造出 H_1 。

3 实验结果与讨论

如果用二步综合法来拍摄模压全息的母版^[9],那么物光的均匀化问题可以在拍摄母版时解决。为此,需要先拍摄一张白纸屏 B 的离轴全息图,作为母全息图 P_1 ,其拍摄光路如图 5(图中 BS_1, BS_2 为分束镜;

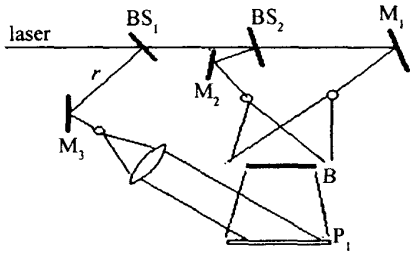


Fig 5 White paper hologram

M_1, M_2, M_3 为高反射镜)所示。如果采用多光束照明,不难使物光均匀化。然后,利用 P_1 来进行二维全息标记的拍摄,其光路如图 6(图中 BS 为分束镜; M_1, M_2 为

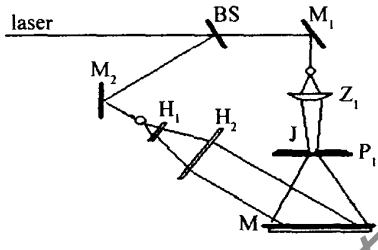


Fig 6 LabelM holoqram

高反射镜)所示。物光 O 通过柱面镜 Z_1 后,变为条状平行光束,照射到母全息图 P_1 上, J 为狭缝。 P_1 再现

白纸屏实像于全息记录干版 P_2 前,在此位置放上事先做好的二维标记模板 M ,这时物光的照明是均匀的。

拍摄用的参考光就是由前述二元光学元件 H_1 和 H_2 产生的平行光。这种拍摄方法与传统的二步法比较是没有再现像的波像差问题,使标记个个相同,排列整齐。为了获得立体感,可使 P_2 略微离开标记模板 M 。值得注意的是所使用的二维模板 M ,必须采用高对比度和高分辨率的银盐版制作,否则所拍摄的全息图的衍射效率将会严重降低,甚至完全失败。曝光前用曝光表对物光和参考光进行测量,发现它们的光强均匀性都得到较大的改善。全息图上各个标记的衍射效率也较为接近。用金相显微镜观察全息图片,各散斑和其上的干涉条纹分布,也都较为均匀。这说明该方法是有有效的。

参 考 文 献

- [1] 张文碧,杨齐民,钟丽云 *et al* 模压全息衍射效率分析 [J]. 光子学报, 1996 25 (7): 640~ 642
- [2] 杨齐民,张文碧,钟丽云 *et al* 全息照片的显微结构 [J]. 光电子·激光, 1996 7 (2): 89~ 91.
- [3] 金国藩,严瑛白,邬敏贤.二元光学 [M]. 北京:国防工业出版社, 1998 223~ 225
- [4] 金国藩,严瑛白,邬敏贤.二元光学 [M]. 北京:国防工业出版社, 1998 238~ 241
- [5] 苏显渝,李继陶.信息光学 [M]. 北京:科学出版社, 1999. 191~ 192
- [6] 张志涌.精通 MATLAB 6.5 版 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003 173~ 176
- [7] 苏显渝,李继陶.信息光学 [M]. 北京:科学出版社, 1999. 193~ 194
- [8] 宋菲君, JUTAMULIA S.近代光学信息处理 [M]. 北京:北京大学出版社, 1998 180~ 181
- [9] 钟丽云,张文碧,杨齐民 *et al* 用综合法拍摄全息二维标记 [J]. 电子科技大学学报, 1998, 27 (7): 177~ 182

(上接第 524 页)

参 考 文 献

- [1] NORDHOLT J E, HUGHES R J MORGAN G L *et al* Present and future free-space quantum key distribution [J]. SPIE, 2002 4635 116~ 126
- [2] Gisin N, R BORDY G, Tittel W *et al* Quantum cryptography [J]. Rev Mod Phys 2002, 74 (1): 145~ 195
- [3] BENNETT C H, BESSETTE F, BRASSARD G *et al* Experimental quantum cryptography [J]. Crypta 1992 5 (1): 3~ 28
- [4] JACOBS B C, FRANSON J D. Quantum cryptography in free space [J]. Opt Lett 1996 21 (22): 1854~ 1856
- [5] BUTTLER W T, HUGHES R J KW IAT P G *et al* Practical free-space quantum key distribution over 1km [J]. Phys Rev Lett 1998 81 (15): 3283~ 3286
- [6] HUGHES R J BUTTLER W T, KW IAT P G *et al* Free-space quantum cryptography in daylight [J]. SP E, 2000 3932: 117~ 126
- [7] BUTTLER W T, HUGHES R J LAMOREAUX S K *et al* Daylight quantum key distribution over 1.6km [J]. Phys Rev Lett 2000, 84 (24): 5652~ 5655.
- [8] RAR IY J G, GORMAN P M, TAPSTIER P R. Secure key exchange over 1.9km free space range using quantum cryptography [J]. Electron Lett 2001, 37 (8): 512~ 514.
- [9] KURTSIEFER C, ZARDA P, HALDER M *et al* Long distance free space quantum cryptography [J]. SPIE, 2002 4917: 25~ 31
- [10] 周炳琨,高以智,陈侗嵘 *et al* 激光原理 [M]. 北京:国防工业出版社, 2000 69~ 72