

文章编号: 1001-3806(2005)05-0484-04

## 对 Zernike 模式法重构 19 单元哈特曼测量波前的研究

杨华峰, 姜宗福\*

(国防科学技术大学 理学院, 长沙 410073)

**摘要:** 通过对 19 单元哈特曼测量和模式法重构波前的过程进行数值模拟, 研究了 Zernike 模式法重构波前时耦合和混淆出现的原因、条件、程度和数学算法的表现。确定了在综合考虑最高可识别模式和计算稳定性同计算工具关系的情况下, 选择最佳重构阶数的基本原则。同时对 19 单元哈特曼复原精度进行了评价, 得出模式耦合是影响精度的主要因素, 得到了模式法波前测量的适用条件, 为利用哈特曼进行光束质量诊断提供了依据。

**关键词:** 自适应光学; 哈特曼传感器; 波前重构; Zernike 模式法; 模式耦合; 模式混淆

**中图分类号:** O437 **文献标识码:** A

### Research of Zernike modal wavefront reconstruction of 19-element Hartmann-Shack wavefront sensor

YANG Hua-feng, JIANG Zong-fu

(Institute of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The reason, the condition and the degree of modal coupling and aliasing in wavefront reconstruction are pointed by simulating the measure and Zernike modal wavefront reconstruction course of 19-element Hartmann-Shack wavefront sensor. Considering the maximum distinguished modal and stability of calculation, the principle of selecting optimal value of Zernike reconstruction is found. The analysis of the accuracy of reconstruction shows that modal coupling is main error for 19-element Hartmann-Shack sensor's wavefront reconstruction. The condition and the accuracy of the wavefront measured with 19-element Hartmann-Shack wavefront sensor is received.

**Key words:** adaptive optics; Hartmann-Shack sensor; wavefront reconstruction; Zernike modal; modal coupling; modal aliasing

## 引 言

Hartmann-Shack (H-S) 波前传感器结合高帧频成像器件和数字图像处理技术, 可以实现高时间和空间分辨率的长时间的波前相位分布和强度分布的动态测量<sup>[1]</sup>, 提供激光束和光学系统的详细动态信息, 并可由此计算得到光束近场和远场的情况。因此, H-S 传感器在自适应光学系统、光学元件面型检测、光学系统的像差检测等领域得到了广泛的应用。近年来, 应用于气动光学效应的研究也取得了较大发展。

H-S 的基本原理是把波前划分为若干个子孔径, 在各个子孔径上分别测量两个正交方向上的波前偏导值, 即波前斜率, 然后根据子孔径上的波前斜率进行波前复原计算, 得到整孔径上的波前像差<sup>[2]</sup>。现在一般通过一定排布的微透镜阵列和面阵 CCD 实现测量。常用的波前重构算法有模式法和区域法等。

Zernike 多项式是圆孔径上模式波前复原时最常用的数学工具之一。但是 H-S 传感器的泽尼克模式复原误差问题始终没有得到透彻的研究。通过对 19 单元 H-S 重构波前过程的数值模拟, 研究了模式耦合和混淆现象的物理原因和算法表现, 结合稳定性要求, 找出了选择重构阶数的一般原则, 并对重构精度进行评价从而得到测量的适用条件。

## 1 Zernike 模式法波前重构算法

模式法波前复原是将全孔径的波前相位展开成不同的正交模式, 然后用全孔径的测量数据计算各模式的系数, 得到完整的波前展开式, 从而重构波前<sup>[3]</sup>。由于 Zernike 多项式圆域上的正交性具有反变换和描述的图像具有最少的信息冗余度的特点<sup>[4]</sup>, 并且各阶模式与光学设计中的 Seidel 像差 (如: 离焦、像散、慧差等) 系数相对应, 为有选择的处理各种像差和优化系统提供了有效途径, 所以在圆瞳孔径上常作为正交基进行波前重构。

Zernike 多项式定义和各阶模序数的取法与参考文献 [5] 中的一致。在通常的计算中一般变换到直角

作者简介: 杨华峰 (1979-), 男, 硕士研究生, 主要从事气动光学研究。

\* 通讯联系人。E-mail: jiangzongfu@yahoo.com.cn

收稿日期: 2004-08-23; 收到修改稿日期: 2004-10-29

坐标系,定义在单位圆  $x^2 + y^2 \leq 1$  上。由于重构波前要求各阶的系数,在变换中忽略了定义中各阶的归一化系数。这样圆域上一个完整的带有畸变的波前  $\phi(x, y)$  可以表示成一系列 Zernike 多项式的线性组合,即:

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot z_k(x, y) \quad (1)$$

式中,  $a_k$  为第  $k$  阶 Zernike 多项式系数,  $z_k(x, y)$  为第  $k$  阶 Zernike 多项式。

(1) 式分别对  $x$  和  $y$  求偏导,并在相应的子孔径区域上对导函数积分,结果除以子孔径面积,就得到了各子孔径在两个方向上的平均斜率。平均斜率正比于透镜焦平面上各焦点的偏移量,比例系数由系统的光学参数决定,在波前定量测量时需要标定。这样对于一定的孔径数和复原阶数由各焦点的偏移  $G$  就可得到关于各阶系数  $a_k$  的方程组,即:

$$\begin{matrix} G_{x(1)} & Z_{x1(1)} & Z_{x2(1)} & \cdots & Z_{xk(1)} \\ G_{y(1)} & Z_{y1(1)} & Z_{y2(1)} & \cdots & Z_{yk(1)} \\ G_{x(2)} & Z_{x1(2)} & Z_{x2(2)} & \cdots & Z_{xk(2)} \\ G_{y(2)} & Z_{y1(2)} & Z_{y2(2)} & \cdots & Z_{yk(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{x(N)} & Z_{x1(N)} & Z_{x2(N)} & \cdots & Z_{xk(N)} \\ G_{y(N)} & Z_{y1(N)} & Z_{y2(N)} & \cdots & Z_{yk(N)} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{matrix} \quad (2)$$

式中,  $N$  为孔径数,  $k$  为所选定的重构阶数。记为:

$$G = Z \cdot A \quad (3)$$

由 (3) 式得系数:

$$A = Z^+ \cdot G \quad (4)$$

其中,  $Z^+$  为  $Z$  的广义逆矩阵。通常取  $Z^+$  为  $Z$  的 Moore-Penrose 广义逆,即最小二乘意义解,永远存在且唯一。称  $Z^+$  为波前重构矩阵。对于布局确定的子孔径,  $Z^+$  也是确定的,可以预先计算。

在应用上述重构算法时,重构阶数  $k$  的选择和复原精度评价是必须解决的。主要需要考虑的问题是模式的耦合和混淆及计算的稳定性。模式耦合是指由于矩阵  $Z$  的列向量不正交,当重构模式阶数少于实际模式阶数时,引起某些高阶模式的像差被解释为低阶模式的像差。模式混淆是指由于矩阵  $Z$  的列向量间存在线性相关,引起重构波前的高阶模式的像差和低阶模式的像差之间相混淆。混淆的根本原因是子孔径具有一定大小,孔径内倾斜的变化将无法区分是高阶还是低阶像差引起的,即一定的空间分辨率可以识别的模式有限<sup>[6]</sup>。

李新阳等人<sup>[2]</sup>把波前重构误差表示为模式截断误差、模式混淆误差和噪声引起误差的总和。前两项是算法本身带来的,对应于模式耦合和混淆,都与重构阶数选择有关,第 3 项是实际系统带来的不可避免,这里只考虑前两项。

## 2 仿真实验的方法和结果

### 2.1 数值模拟方法

使用的 19 单元哈特曼的子孔径布局见图 1,每个子孔径为正六边形,外圆为被测光束孔径,归一化为单位圆,可以计算得半径为六边形子孔径边长的  $\sqrt{19}$  倍。

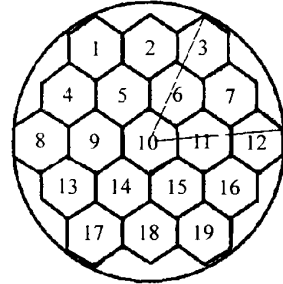


Fig 1 Subaperture configuration of 19-element H-S wavefront sensor

编制了重构模拟程序。方法是首先构造入射波前,直接使用单位圆上归一化的波前,可以排除实际光学系统的比例因子和误差。入射波前同样选用 Zernike 多项式的形式给出。随机给出不同阶的组合像差,这样可以验证复杂情况下的复原情况。对入射波前在两个方向求导函数,再在对应子孔径上求平均值就可以得到模拟的光斑偏移从而得到  $G$ ,把  $G$  和选定阶数计算的重构矩阵  $Z^+$  带入 (4) 式就可以得到复原波前的各阶系数。对比前后的系数就可以了解重构的准确程度和误差分布的情况。计算中,为了保证精度,对偏导数和积分使用 Mathematica 进行符号计算,最后代入数值,求得  $G$  和  $Z$ 。

为了详细定量评价复原情况,可以同时计算入射波前和复原波前的相位平均值,方均根值 RMS,画出波前的示意图,并定义复原精度指标  $J$  为波前残差的均方根值与原始波前均方根值的比值,其值越小复原效果越好。计算中相位估计点以 0.01 为步长对单位圆进行网格划分,共计 31415 个点左右。

相位平均值:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \phi_k \quad (5)$$

均方根值:

$$RMS_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^s (x_i - \bar{x})^2}{s}} \quad (6)$$

残差:

$$\delta C_k = \phi_{r,k} - \phi_{i,k} \quad (7)$$

复原精度:

$$J = \frac{RMS_c}{RMS_s} \quad (8)$$

式中,  $\phi_k$  为第  $k$  个估计点的相位值,  $\phi_{r,k}$ ,  $\phi_{i,k}$  分别为第  $k$  个估计点的复原和原始相位值,  $RMS_c$  和  $RMS_s$  为相位残差均方根值和原始相位均方根值,  $s$  为相位采样点的个数。

### 2.2 典型的結果

(1) 在没有模式耦合的情况下寻找可识别的最大模式数。模拟输入一个  $k$  阶的波前,各阶系数为大小在  $(-0.8 \sim +0.8)$  的随机数,再用  $k$  阶去重构,此时不存在耦合,观察重构情况。随着  $k$  增加到某一极限,严重的混淆就将出现。对前 65 阶进行试验,结果表明,对哈特曼前 35 阶都可以准确复原(见图 2); 36 阶出现混淆,表现在第 10, 21, 27 阶偏差较大(见图 3),  $k$  再增加情况变得复杂(见图 4)。

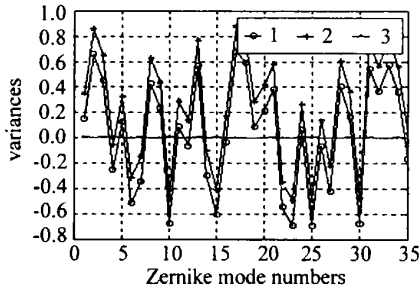


Fig 2 Reconstruction with the first 35th Zernike polynomial  
1—coefficient of incidence 2—coefficient of reconstruction +0.2 3—difference of both

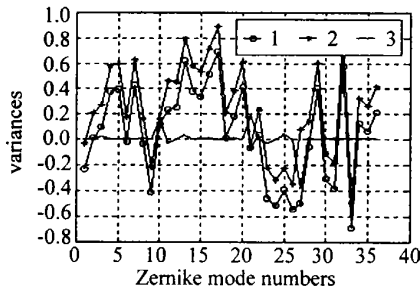


Fig 3 Reconstruction with the first 36th Zernike polynomial  
1—coefficient of incidence 2—coefficient of reconstruction +0.2 3—difference of both

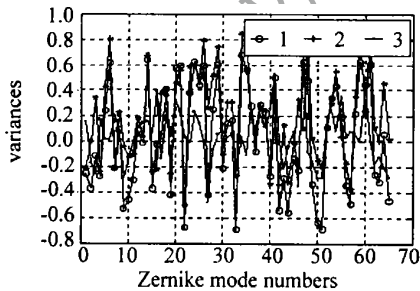


Fig 4 Reconstruction with the first 65th Zernike polynomial  
1—coefficient of incidence 2—coefficient of reconstruction +0.2 3—difference of both

(2) 考察计算稳定性和重构阶数的关系。用重构矩阵的条件数作为稳定性的度量 ( $Z$  和它的广义逆  $Z^+$  有相同的条件数), 条件数的定义是:

$$\text{cond}(Z^+) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} \quad (9)$$

式中,  $\sigma_{\max}$  和  $\sigma_{\min}$  为矩阵的最大和最小奇异值。条件数越大, 对误差越敏感计算越不稳定。

条件数的变化规律见图 5, 有两次突变。

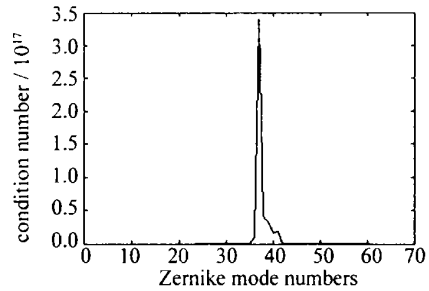


Fig 5 The condition number of different modal matrix

(3) 考察有模式耦合的情况。使用 23 阶对有 35 阶像差的入射波前进行重构。假设高阶 (24~35) 系数波动范围  $(-0.2 \sim 0.2)$  为低阶 (1~23) 波动范围  $(-1 \sim 1)$  的 1/5。模式耦合是影响结果的主要因素, 典型的结果见图 6。多次模拟结果由 (8) 式计算的复

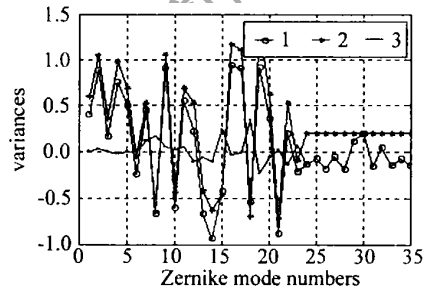


Fig 6 Reconstruction of 35 aberrations with the first 23th Zernike polynomial  
1—coefficient of incidence 2—coefficient of reconstruction +0.2 3—difference of both

原精度小于 20%, 见表 1。观察到低阶的比例分布不

Table 1 The accuracy of reconstruction with modal coupling

time of simulation	1	2	3	4	5	6	7	8
accuracy of reconstruction / %	18.6	17.7	18.4	19.3	16.3	17.1	12.6	13.9

会丢失, 并且保持大小分布的规律, 波前的基本形状完全确定, 这是 Zernike 多项式正交性的必然结果。复原精度决定于高阶系数绝对值大小相对低阶的比例。剩余像差一般就是高阶的截断部分, 这是 Zernike 多项式线性性的结果。

### 3 结论

(1) 一定的器件存在最大的可识别模式数。当重构阶数大于等于实际的模式阶数时, 耦合消失, 对于未知的波前应该用尽可能多的阶数重构。另一方面可认为混淆总是存在的, 对一定空间分辨率的子孔径数, 混淆程度随重构阶数增加而增加, 数学表现为重构矩阵列向量之间的相关性增加, 结果表现为原本没有的高阶由于混淆而出现, 敏感的高阶由于混淆而影响基本的低阶分布, 带来最终复原的失真。因此, 存在一个相关性急速增加的位置, 也就是最大的可识别模式数, 它是器件的分辨极限, 可以通过模拟来找出。对作者的



哈特曼为 35 阶。36 阶起径向开始不能分辨,混淆正好发生在 36, 10, 21 阶之间,说明了这点。这种六边形排列每增加 1 圈,角向分辨率提高的比径向快,主要是径向受限了。

(2) 可识别的阶数和可稳定计算的阶数是不同的。重构矩阵随重构阶数增加表现出病态,计算变得不稳定起来。这是由于高阶模式的像差具有高的空间频率,对斜率误差非常敏感造成的。

需要说明的是矩阵的病态是由于问题的本身决定的,与使用的数学方法无关,计算的稳定性与计算的方法和工具有关。通常的高级语言编写的程序由于存储精度和舍入误差的原因,病态时的计算是不允许的。这样就要根据具体计算过程确定最佳的计算上可靠可行的复原阶数。

重构矩阵条件数在 24 阶和 36 阶有两次突变,第 2 次已经超出可识别的模式,已经不具有物理意义,23 阶以下计算是稳定的,但是对于不同计算工具应该不同的看待,用高级语言(如用 VB)编写的程序不适合 23 阶以上工作,而用 MATLAB 这类工具直到最高可识别的 35 阶还是令人满意的。为了有足够的可靠性,实际中选用 23 阶重构。

(3) 实际对未知波前重构中,重构精度主要决定

于模式耦合带来的截断误差。19 单元哈特曼最终选择 23 阶重构,在只有 23 阶以下像差时重构精度  $J$  可达(小于 0.01%),对于存在模式耦合时精度  $J$  基本正比于高阶部分系数和低阶的相对大小,高阶比例小于 1%,精度就优于 1%,这正和线性截断相符合的。好在通常高阶部分所占的比例很小,所以,重构的波前还是具有参考价值的,进行光束诊断也就有了依据。

综合以上 3 点,即最大可识别模式、计算稳定性和截断误差(重构精度)3 方面以及实际系统的其它因素可以作为实际重构阶数选择的基本依据。方法也适合于其它布局的哈特曼进行波前重构时阶数的选择和误差的分析。

### 参 考 文 献

- [1] 姜凌涛,陈 笠,饶学军. 动态波前相位的高分辨率测量 [J]. 光电工程, 1998, 25 (6): 20~23.
- [2] 李新阳,姜文汉. 哈特曼夏克传感器的泽尼克模式波前复原误差 [J]. 光学学报, 2002, 22 (10): 1236~1240.
- [3] 周仁忠. 自适应光学 [M]. 国防工业出版社, 1996. 180~181.
- [4] 徐旦华,辜 嘉,李松毅. Zemike 矩的快速算法 [J]. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32 (2): 151~154.
- [5] 刘天华,姜宗福,许晓军. 高能激光器自由旋涡气动窗口激光波前畸变的初步研究 [J]. 中国激光, 2003, 30 (4): 289~294.
- [6] 张 强,姜文汉,许 冰. 利用 Zemike 多项式对湍流波前进行波前重构 [J]. 光电工程, 1998, 25 (6): 15~19.

(上接第 461 页)

### 3 结 论

推导得出了修正的和频  $d$  张量矩阵,应用于倍频时的匹配条件计算结果与文献 [1] 和文献 [4] 中给出的数据相当符合,因此可以认为,利用此方法计算和频时的匹配条件所得出的数据是可靠的。对于 KTP 晶体,采用 II 类匹配方式、1319nm 为慢光时,有效和频系数可以达到  $7.24 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ , 1319nm 为快光时,有效和频系数也可达到  $6.56 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,而且在这种匹配方式下匹配方向沿着晶体的  $z$  轴方向;而 LBO 晶体则可以采用 I 类匹配方式,有效和频系数可以达到  $0.96 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,匹配方向在  $z$  轴方向,接近于  $x-z$  平面,或者采用 II 类匹配方式、1319nm 基频光为慢光、1064nm 基频光为快光时,有效和频系数可以达到  $0.90 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,匹配方向在  $y-z$  平面上。在具体应

用上,可以考虑选取以上几种匹配方式。

### 参 考 文 献

- [1] HOB DEN M V. Phase-matched second-harmonic generation in biaxial crystals [J]. J A P, 1967, 38 (11): 4365~4372.
- [2] ИО H, НА ИО H, NABA H. Generalized study on angular dependence of induced second-order nonlinear optical polarizations and phase matching in biaxial crystals [J]. J A P, 1975, 46 (9): 3992~4001.
- [3] 姚建铨. 非线性光学频率变换及激光调谐技术 [M]. 北京: 科学出版社, 1995. 1~67.
- [4] CHEN Ch T, WU B Ch, JIANG A D *et al* New nonlinear optical crystal:  $\text{LB}_3\text{O}_5$  [J]. J O S A, 1989, B6 (4): 616~621.
- [5] KATO K. Second-harmonic and sum-frequency generation to 4950 and 4589 in KTP [J]. IEEE J Q E, 1988, QE24 (1): 3~4.
- [6] 杨学林,谢绳武,陈 康 *et al* 晶体二阶有效非线性系数在全卦限中的对称性 [J]. 上海交通大学学报, 1997, 31 (10): 14~17.
- [7] 李 港,唐晓军. 常用双轴晶体连续调谐倍频时的相位匹配特性 [J]. 激光杂志, 1997, 18 (2): 23~27.
- [8] 范琦康,吴存恺,毛少卿. 非线性光学 [M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1989. 5~7.