文章编号: 1001-3806(2005)04-0437-03

Bessel-Gaussian光束在分数傅里叶变换面上的光强分布

吴 平,胡向峰,陈天禄
(西南交通大学 应用物理系,成都 610031)

摘要: 利用广义衍射积分方法,研究了 Bessel-Gaussian(BG)光束的分数傅里叶变换特性,推导出了 BG光束通过分数傅里叶变换光学系统后,光场分布的解析公式,利用该公式对 BG光束经分数傅里叶变换后光强的分布规律进行了数值分析。研究结果表明,分数傅里叶变换阶数 p对 BG光束的光强分布有明显影响,光强分布随分数傅里叶变换阶数 p呈周期性变化。

关键词: 贝塞尔-高斯光束;分数傅里叶变换;广义衍射积分;光强分布
中图分类号: TN012　　**文献标识码**: A

Intensity distributions of Bessel-Gaussian beam in a fractional Fourier plane

WU Ping, HU Xiang-feng, CHEN Tian-lu
(Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: By using the general diffraction integration method, the transformation property of Bessel-Gaussian(BG) beam in a fractional Fourier plane was studied, and closed-form transformation expression was derived for the BG beam through the Lohmann Ⅱ optical system. By using the derived formula, typical numerical calculation results were obtained to study the influences of the fractional order on the properties of BG beam in the fractional Fourier plane. It is shown that the intensity of BG beam depends on the fractional order p and the variation of the intensity with fractional order p is periodic.

Key words: Bessel-Gaussian beam; fractional Fourier transformation; general diffraction integration; intensity distribution

引 言

分数傅里叶变换 (FRFT)在 1980年由 NAMIAS提出[1]。1993年,由 LOHMANN将分数傅里叶变换引入光学,提出了实现分数傅里叶变换的光学系统:Lohmann Ⅰ和 Lohmann Ⅱ系统[2]。由于分数傅里叶变换是传统傅里叶变换的推广,它突破了传统傅里叶变换的局限,在光学信息处理和光束传输变换中有广泛应用[3~5]。Bessel-Gaussian(BG)光束由于其具有“无衍射”的性质和诱人的应用前景在光学研究领域受到普遍重视。相继有许多理论和实验成果报道[6~8]。作者应用广义衍射积分方法,对 Bessel-Gaussian光束的分数傅里叶变换特性进行研究,导出了 BG光束经分数傅里叶变换后,在分数傅里叶变换面上光场分布的解析计算公式。并以此公式研究了 BG光束光强随分数傅里叶变换阶数变化的规律,使用的方法可应用于一般光束的分数傅里叶变换特性研究,所得结果对光束的整形有应用价值。

基金项目:四川省应用基础研究基金资助项目 (03JY029-063-1)

作者简介:吴 平 (1964-),女,教授,从事光学传输变换研究。
E-mail: ping_w_x@hotmail.com

收稿日期: 2004-05-08;收到修改稿日期: 2004-06-15

1 BG光束的分数傅里叶变换

在 $z=0$处,BG光束的场分布可表示为[9]:

$$E(r_0) = E_0 J_0(\alpha r_0)\exp(-r_0^2/w_0^2) \tag{1}$$

式中,E_0为常数,J_0为零阶 Bessel函数,α为调制参数,w_0为高斯光束的光腰半径。

LOHMANN指出由如图 1所示的 Lohmann Ⅱ光学系统可以实现光束的 p阶分数傅里叶变换[2]。图中 f_1为一常数。P_1为输入面,P_2为输出面。其结构参数如图 1所示。其中:$\phi=(\pi/2)\cdot p$。

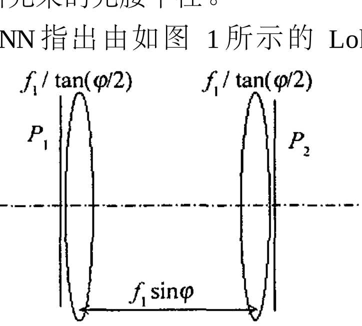

Fig 1 Optical system for performing the fractional Fourier transform

Lohmann Ⅱ光学系统的变换矩阵可表示为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\tan\phi/2}{f_1} & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & f_1\sin\phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{\tan\phi/2}{f_1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & f_1\sin\phi\\ -\sin\phi/f_1 & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{2}$$

BG光束经过 Lohmann Ⅱ光学系统后,可实现其分数傅里叶变换,在分数傅里叶变换阶数为 p的变换面上,BG光束的光场分布可由广义衍射积分公式——Collins公式导出。在柱坐标下,Collins公式可表示为[10]:

$$E_2(r,\theta) = -\frac{i}{\lambda B}e^{ikz}\int_0^{+\infty} r_0\,dr_0\int_0^{2\pi} E_1(r_0,\theta_0,0)\times \exp\left\{\frac{ik}{2B}\left[A r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta-\theta_0) + D r^2\right]\right\}d\theta_0 \tag{3}$$

将 (1)式和 (2)式代入 (3)式,得:

$$E_2(r,\theta) = -\frac{iE_0}{\lambda B}e^{ikz}\int_0^{+\infty} r_0 J_0(\alpha r_0)\exp\left(-\frac{r_0^2}{w_0^2}\right)\times \exp\left[ik\cos\phi(r_0^2+r^2)/2f_1\sin\phi\right]dr_0 \times \int_0^{2\pi}\exp\left[-i\frac{k}{f_1\sin\phi}r_0 r\cos(\theta_0-\theta)\right]d\theta_0 \tag{4}$$

利用积分公式[11]:

$$J_0(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\beta\cos(\theta_1-\theta_2)\right]d\theta_2 \tag{5}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\beta x^2}J_0(\alpha x)J_0(\gamma x)\,dx = (1/2\beta)\times \exp\left[-(\alpha^2+\gamma^2)/4\beta\right]J_0(i\alpha\gamma/2\beta) \tag{6}$$

对 (4)式积分可得 BG光束经过分数傅里叶变换后,在 p阶分数傅里叶变换面上光场分布为:

$$E_2(r) = \frac{ikE_0}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{ik\cos\frac{p\pi}{2}}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)}\times \exp\left[-i\left(kz+\frac{k\cos\frac{p\pi}{2}r^2}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)\right]\exp\left[-\frac{\alpha^2+\left(\frac{kr}{f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)^2}{4\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{ik\cos\frac{p\pi}{2}}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)}\right]\times J_0\left[\frac{i\alpha kr}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{ik\cos\frac{p\pi}{2}}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)}\right] \tag{7}$$

令 $r_2=0$,可以得到 BG光束经过分数傅里叶变换后,轴上光场分布为:

$$E_2(0) = \frac{ikE_0e^{ikz}}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{ik\cos\frac{p\pi}{2}}{2f_1\sin\frac{p\pi}{2}}\right)}\times \exp\left\{\frac{\alpha^2}{4\left[1/w_0^2+ik\cos\frac{p\pi}{2}/\left(2f_1\sin\frac{p\pi}{2}\right)\right]}\right\} \tag{8}$$

2 p阶分数傅里叶变换面上 BG光束的光强变化特性

在 p阶分数傅里叶变换面上,BG光束的光强可表示为:

$$I(r) = E_2(r)\times E_2^*(r) \tag{9}$$

式中,*表示取共轭。

计算用光束参数为:$w_0=1\mathrm{mm}$,$\lambda=1.06\mu\mathrm{m}$,$f_1=1000\mathrm{mm}$。利用 (7)式和 (9)式进行数值计算。当取调制参数 $\alpha=0.5$,得到在不同阶数 p的分数傅里叶变换面上,BG光束的光强分布如图 2所示。从图 2中可以看到,BG光束的光强分布随分数傅里叶变换阶数 p呈周期性变化,变化周期对应于 $p=2$。调制参数取 $\alpha=0.5$时,BG光束的光强分布的分数傅里叶变换规律与高斯光束的分数傅里叶变换规律十分相似。这是因为,BG光束可以看成腰斑大小相等、腰斑位置相同的多束高斯光束叠加。这些高斯光束的传输方向分布在以 z轴为轴线半角为 θ的圆锥中,其中:$\sin\theta=\alpha/k$。

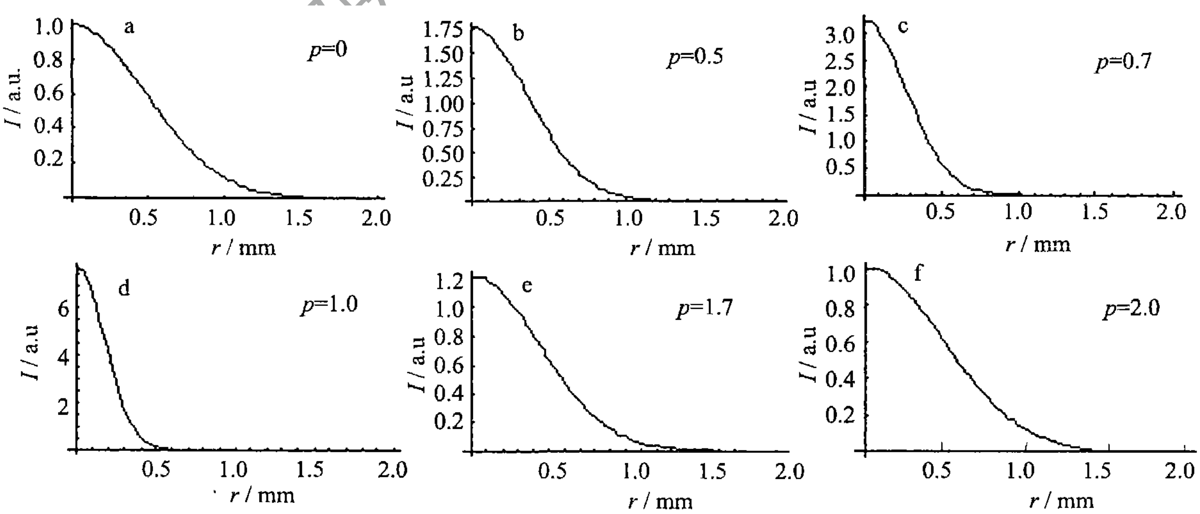

Fig 2 Intensity distributions of BG beam on the fractional Fourier transform plane with different fractional order for $\alpha=0.5$

当 $\alpha = 0.5$时, $\theta = \arcsin(\alpha / k) = 0.000084\,\mathrm{rad}$。而单束高斯光束的发散角为: $\theta_G = \lambda / \pi w_0 = 0.00034\,\mathrm{rad}$。这时有: $\theta / \theta_G = 0.25$。在这种条件下,Bessel函数的调制作用较小,BG光束的分数傅里叶变换规律和高斯光束的分数傅里叶变换规律基本相同。

当取调制参数 $\alpha = 5$,得到在不同阶数 p的分数傅里叶变换面上,BG光束的光强分布如图 3所示。

从图 3中可以看到: BG光束的光强分布随分数傅里叶变换阶数 p呈周期性变化,变化周期对应于 $p = 2$。由于 $\alpha = 5$时, $\theta = \arcsin(\alpha / k) = 0.00084\,\mathrm{rad}$, $\theta / \theta_G = 2.5$。这时 Bessel函数的调制作用明显,BG光束在不同阶数 p的分数傅里叶变换面上,光强分布明显不同。在 $p = 1$分数傅里叶变换面上,BG光束为环状空心光束。

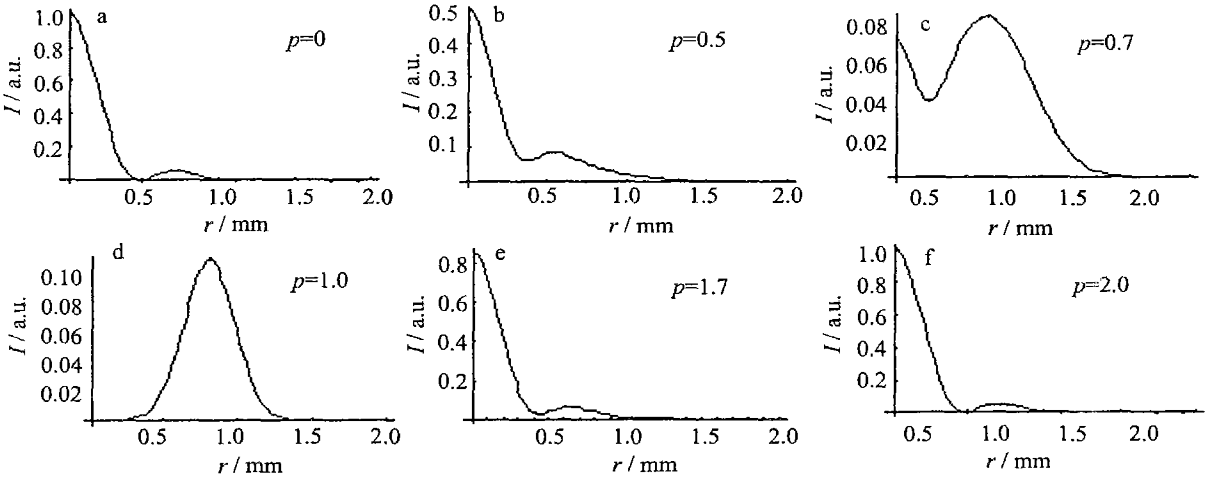

Fig 3 Intensity distributions of BG beam on the fractional Fourier transform plane with different fractional order for $\alpha = 5$

利用 (8)式和 (9)式对 BG光束的轴上光强进行数值分析。当调制参数 α取不同值时,轴上光强分布如图 4所示。从图中可以看到,BG光束的轴上光强随分数傅里叶变换阶数 p呈周期性变化,变化周期对应于 $p = 2$。随调制参数 α增大,轴上光强减弱,当 $\alpha < 2$时,BG光束的轴上光强始终大于 0。当 $\alpha > 2$时,BG光束的轴上光强在 $p = 2n + 1$ (n为整数)时为 0。轴上光强取极大值或极小值不仅与分数傅里叶变换阶数 p有关,而且与调制参数有关。

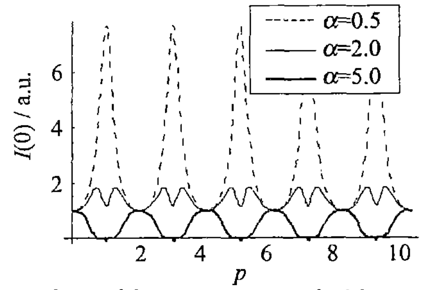

Fig 4 Evolution of the on-axis intensity of BG beam versus the fractional order p for different α

3 结 论

使用广义衍射积分方法,导出了 BG光束在分数傅里叶变化平面上光强分布的解析公式。用此解析公式研究了 BG光束的分数傅里叶变换特性。研究表明,分数傅里叶变换阶数 p对 BG光束的光强分布有明显影响,光强分布随分数傅里叶变换阶数 p呈周期性变化,其变化周期对应于 $p = 2$。调制参数 α对 BG光束在分数傅里叶变化平面上光强分布有较大的影响。BG光束的轴上光强随分数傅里叶变换阶数也呈周期性变化,其周期为 2。由于 BG光束是实际工作中常遇到的一类光束,而分数傅里叶变换系统是一特殊的光学系统,通过适当选取该系统的参数,可实现特殊的光强分布。因此,文中的结果可用于对光强分布有特殊要求的应用领域;使用的研究方法对光束整形和研究一般光束的传输特性有应用价值。

参 考 文 献

[1] NAMIAS V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics [J]. J Inst Math Appl, 1980, 25 (2): 241～265.

[2] LOHMANN A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. J O S A, 1993, A10 (10): 2181～2186.

[3] BERNARDO L M, DSOARES O D. Fractional Fourier transform and imaging [J]. J O S A, 1994, A11 (6): 2622～2626.

[4] DORSCH G, LOHMANN A W, BITRAN Y *et al.* Chirp flitering in the fractional Fourier domain [J]. Appl Opt, 1994, 23 (4): 7599～7602.

[5] OZAKTAS H M, MENDLOVIC D. Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and mirror resonators [J]. Opt Lett, 1994, 19 (21): 1678～1680.

[6] DURNIN J, MICELI J J, EBERLY F. Diffraction-free beam [J]. Phys Rev Lett, 1987, 58 (15): 1499～1505.

[7] LIN Y, SEKA W, VICARI L. Experimental investigation of Bessel beam characteristics [J]. Appl Opt, 1992, 31 (5): 2708～2713.

[8] HERMAN R M, WIGGINS T A. Production and uses of diffractionless beams [J]. J O S A, 1991, A8 (6): 932～938.

[9] GORI F, GUATTARI G, PADORANI C. Bessel-Gauss beam [J]. Opt Commun, 1987, 64: 491～496.

[10] COLLINS S A. Lens-system diffraction integral written terms of matrix optics [J]. J O S A, 1970, 60 (7): 1168～1177.

[11] ERDELYI A, MAGNUS W, OBERHETTINGER F *et al.* Tables of integral transforms [M]. New York: Mcgraw-Hill Book Company, 1954. 523～525.