

文章编号: 1001-3806(2005)04-0401-03

# 全息透镜傅里叶变换特性分析

王红霞, 盛兆玄, 赵 玮, 李育新  
(第二炮兵工程学院 物理室, 西安 710025)

**摘要:** 利用一点光源和一束倾斜平行光拍摄了一种离轴全息透镜, 并对其傅里叶变换特性进行了分析。将输入图像置于这种全息透镜的前面或后面, 均能得到物体的傅里叶变换功率谱。图像尺寸越小, 全息透镜的焦距越长, 产生的误差越小。当物体位于偏离主轴的前焦面时, 能够得到物体准确的傅里叶变换。

**关键词:** 全息透镜; 傅里叶变换; 菲涅耳衍射; 功率谱

**中图分类号:** O438.1 **文献标识码:** A

## The characteristic analysis of hololens Fourier transform

WANG Hong-xia, SHENG Zhao-xuan, ZHAO Wei, LI Yu-xin

(Department of Physics, Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** The Fourier transform characteristics of off-axis hololens was discussed, which was made by using a dot light source and an inclined parallel light. The Fourier transform power spectrum of input object can be obtained when the input image is placed at the front or back of the hololens. The more small the size of input image is and long the focal length is, the more small the error is. The exact Fourier transform of the object can be obtained when it is placed at the front focal plane of the hololens. At the end of this paper, the optical experimental results are given.

**Key words:** hololens; Fourier transform; Fresnel diffraction; power spectrum

### 引 言

全息透镜是在感光薄膜材料上制成的一种全息衍射元件, 也就是一个点源全息图, 相当于一张菲涅耳波带板。它是基于光的干涉和衍射等物理光学的原理, 具有普通透镜的会聚作用和成像特性, 并且易于制成较大的尺寸, 重量轻、造价低、制作方法简单、易于复制和分割, 能多重记录, 在某些特殊情况下有独特的作用。全息透镜用于傅里叶变换和分数傅里叶变换与常规透镜的性质很相似<sup>[1~6]</sup>, 但比常规透镜要方便灵活得多。分析了用一点源和倾斜平行光干涉记录的全息透镜的傅里叶变换特性, 当满足一定的条件时, 用这种方法记录的全息透镜能得到物体准确的傅里叶变换。

### 1 全息透镜的记录及复振幅透射系数

全息透镜实际上是一个点源全息图, 用倾斜平行光作参考光的记录光路如图 1 所示。在干版 H 所在的平面上, 点源物光和参考光的复振幅分别为:

$$O(x, y) = O_0(x, y) \exp[j\phi(x, y)] \quad (1)$$

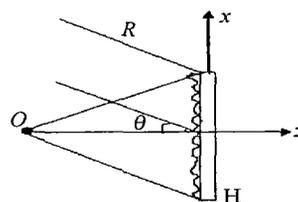


Fig 1 Optical setup for recording hololens

$$R(x, y) = R_0 \exp(-jkx \sin\theta) \quad (2)$$

式中,  $O_0, R_0$  为实数, 表示振幅分布,  $\theta$  为参考光与  $z$  轴间的夹角,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为记录时的相干光波长。 $\phi(x, y)$  为物光的相位函数, 用相对于原点处的相位差表示, 即:

$$\phi(x, y) = k[(x^2 + y^2 + z_0^2)^{1/2} - z_0] \quad (3)$$

式中,  $z_0$  表示点光源到记录干版 H 的距离, 在  $z_0 \gg \sqrt{x^2 + y^2}$  时, 可将 (3) 式用二项式定理展开得:

$$\phi(x, y) = k \left[ z_0 \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} \right)^{1/2} - z_0 \right] = k \left[ \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z_0^3} + \dots \right] \quad (4)$$

在满足下式条件时:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)^2}{8z_0^3} \ll 2\pi \quad (5)$$

相位函数表示式 (4) 式只取第 1 项, 则物光的复振幅

作者简介: 王红霞 (1962-), 女, 硕士, 教授, 主要从事光学信息处理教学与研究。

E-mail: redlightw@163.com

收稿日期: 2004-06-14; 收到修改稿日期: 2004-10-26

$$O(x, y) = O_0(x, y) \exp\left[ jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0} \right] \quad (6)$$

(5)式条件在实验中并不难满足,考虑在近轴范围内,  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \times 10^{-2} \text{m}$ ,用 He-Ne激光记录,波长  $\lambda = 6.328 \times 10^{-7} \text{m}$ ,则只要  $z_0 \gg 0.125 \text{m}$ ,即可满足(5)式条件。

全息干版 H上记录的是物光和参考光叠加后的强度分布,在线性记录条件下,全息图的复振幅透射系数与记录的光场强度成正比,则经过暗室处理以后所得全息透镜的透射系数为:

$$t = (R + O)(R^* + O^*) = |R|^2 + |O|^2 + OR^* + RO^* = (O_0^2 + R_0^2) + R_0 O_0 \exp\left[ jk(x^2 + y^2) + jkx \sin\theta - jk(x^2 + y^2) - jkx \sin\theta \right] \quad (7)$$

上式中的第1项为直透光部分,第2项中有正的二次相位因子,相当于负透镜和一光束转向器的作用,第3项含有负的二次相位因子,相当于一焦距  $f = z_0$  的正透镜和一光束转向器的作用,进行傅里叶变换正是靠该项的作用完成的。3部分透射光方向不同,互不影响,下面的傅里叶变换分析仅考虑(7)式中最后一项的作用(忽略常数)即:

$$t_1 = \exp\left[ -jk \frac{x^2 + y^2}{2z_0} - jkx \sin\theta \right] \quad (8)$$

## 2 全息透镜傅里叶变换分析

全息透镜的透射系数中有负的二次相位因子,具有能对入射波前施加相位调制功能,根据衍射理论,可以证明图1所记录全息透镜具有傅里叶变换的性质,下面分3种情况讨论。

### 2.1 物体紧靠透镜放置

光路如图2所示。振幅透射率为  $r(x, y)$  的物体

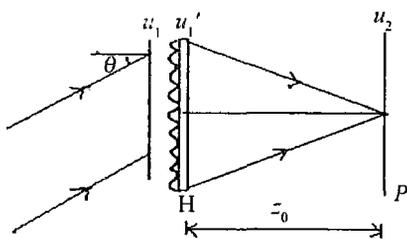


Fig 2 Optical setup for Fourier transform of the object against a hologram. The object is placed against the hologram H on the left side. The reference light is recorded at H, and the light field is observed at H on the right side.

$$u_1(x_1, y_1) = r(x_1, y_1) \exp(jkx_1 \sin\theta) \quad (9)$$

在 H 右侧紧靠 H 的光场为:

$$u_1' = u_1(x_1, y_1) \cdot t_1 = r(x_1, y_1) \times \exp\left[ -jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_0} \right] \quad (10)$$

上述光场从 H 右侧传播距离  $z_0$  后,到达后焦面 P 上的光场分布由菲涅耳衍射理论<sup>[7]</sup>可得:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp\left[ j\frac{k}{2z_0}(x_2^2 + y_2^2) \right] \times \mathbf{F}\left\{ u_1'(x_1, y_1) \exp\left[ j\frac{k}{2z_0}(x_1^2 + y_1^2) \right] \right\} = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp\left[ j\frac{k}{2z_0}(x_2^2 + y_2^2) \right] \cdot R\left[ \frac{x_2}{\lambda z_0}, \frac{y_2}{\lambda z_0} \right] \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{F}$  表示傅里叶变换,其变换频率  $f_x = \frac{x_2}{\lambda z_0}$ ,  $f_y = \frac{y_2}{\lambda z_0}$ ,  $R\left(\frac{x_2}{\lambda z_0}, \frac{y_2}{\lambda z_0}\right)$  为  $r(x_1, y_1)$  的傅里叶变换。(11)式表明,全息透镜 H 后焦面上的光场分布正比于物体的傅里叶变换,但由于还存在一相位弯曲因子  $\exp\left[ j\frac{k}{2z_0}(x_2^2 + y_2^2) \right]$ ,后焦面上的相位分布与物体频谱的相位并不相同。如果测量的是强度分布,这一相位弯曲并没有影响,故:

$$I(x_2, y_2) = |u_2(x_2, y_2)|^2 = \left( \frac{1}{\lambda z_0} \right)^2 |R(x_2/\lambda z_0, y_2/\lambda z_0)|^2 \quad (12)$$

即后焦面上的光强分布,正是物体傅里叶变换的功率谱。

### 2.2 物体位于全息透镜前焦面上

变换光路如图3所示。设物体在前焦面上中心为

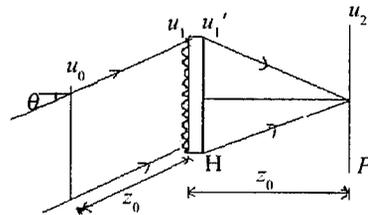


Fig 3 Optical setup for Fourier transform of the object in the front focus plane. The object is placed at the front focal plane of the hologram H. The reference light is recorded at H, and the light field is observed at H on the right side.

(b, 0)处,仍用共轭参考光照射,则在前焦面的光场为:  $u_0(x_0, y_0) = r(x_0 - b, y_0) \exp(jkx_0 \sin\theta)$  (13) 此光场传播  $z_0$  后,到达紧靠 H 左侧平面上的光场为  $u_1$ ,这一变换采用频率域分析法较方便,根据角谱理论:

$$\mathbf{F}[u_1(x_1, y_1)] = \mathbf{F}[u_0(x_0, y_0)H(f_x, f_y)] \quad (14)$$

式中,  $f_x$  和  $f_y$  分别是 x 和 y 方向的空间频率, H 为频域传递函数:

$$H(f_x, f_y) = \exp[-j\pi \lambda z_0 (f_x^2 + f_y^2)] \quad (15)$$

根据(13)式得:

$$\mathbf{F}[u_0(x_0, y_0)] = \mathbf{F}[r(x_0 - b, y_0) \exp(jkx_0 \sin\theta)] = R\left[ f_x - \frac{\sin\theta}{\lambda}, f_y \right] \exp\left[ -j2\pi b \left( f_x - \frac{\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \quad (16)$$

将其带入(14)式得:

$$\mathbf{F}[u_1(x_1, y_1)] = R\left[ \frac{-\sin\theta}{\lambda}, f_y \right] \times \exp\left[ -j2\pi b \left( f_x - \frac{\sin\theta}{\lambda} \right) \right] \exp[-j\pi \lambda z_0 (f_x^2 + f_y^2)] \quad (17)$$

光场  $u_1(x_1, y_1)$  经过全息透镜后变为:

$$u_1' = u_1(x_1, y_1) \cdot t_H = u_1(x_1, y_1) \times \exp\left[-jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_0} - jkx_1 \sin\theta\right] \quad (18)$$

$u_1$  到达 H 后焦面上的光场分布, 根据空间域的非涅耳公式并考虑 (17) 式得:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp\left[j\frac{k}{2z_0}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \mathbf{F}\left[u_1' \exp\left[jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_0}\right]\right] = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp(-j2kz_0 \sin^2\theta) \times \mathbf{R}\left[\frac{x_2}{\lambda z_0}, \frac{y_2}{\lambda z_0}\right] \exp\left[-jk \left(\frac{b}{z_0} + \sin\theta\right) x_2\right] \quad (19)$$

从上式可以看出, 后焦面上的光场分布仍正比于物体的傅里叶变换, 但存在一相位倾斜因子  $\exp[-jk \times (b/z_0 + \sin\theta) x_2]$ 。当物体的中心放置满足下列条件时, 这一倾斜因子消失:

$$b = -z_0 \sin\theta \quad (20)$$

这时后焦面上的复振幅分布是物体准确的傅里叶变换 (前面的复常数不影响频谱分布):

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp(-j2kz_0 \sin^2\theta) \cdot \mathbf{R}\left[\frac{x_2}{\lambda z_0}, \frac{y_2}{\lambda z_0}\right] \quad (21)$$

全息透镜的这种准确傅里叶变换特性与光学透镜的准确傅里叶变换特性非常相似, 只不过全息透镜的前焦面中心偏离主轴, 由 (20) 式可知, 前焦面中心位置由记录条件决定。使用全息透镜对物体进行准确傅里叶变换时, 只要根据全息透镜的记录条件, 将物体放在前焦面的中心位置, 用记录时的共轭参考光照射, 在全息透镜后焦面中心即可得到物体准确的傅里叶变换, 这是常用的傅里叶变换方法。

### 2.3 物体放置在全息透镜后方

变换光路如图 4 所示, 物体在全息透镜后方距后

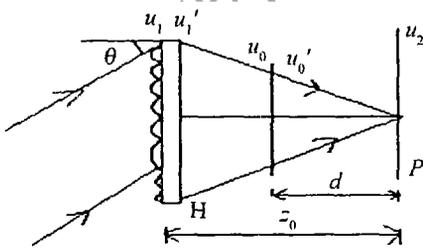


Fig 4 Optical setup for Fourier transform of the object behind H

焦面的距离为  $d$ , 仍用共轭参考光照射, 则 H 左侧光场为:

$$u_1 = \exp(jkx_1 \sin\theta) \quad (22)$$

紧靠 H 右侧光场为:

$$u_1' = u_1 t = \exp\left[-jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_0}\right] \quad (23)$$

这一光场传播到物平面上的场分布可以表示为:

$$u_0(x_0, y_0) = \frac{z_0}{d} \exp\left[-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}\right] \quad (24)$$

透过振幅透射率为  $r$  的物体之后, 在紧靠物右侧的光

场为:

$$u_0'(x_0, y_0) = u_0(x_0, y_0) r(x_0, y_0) = \frac{z_0}{d} \exp\left[-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}\right] \cdot r(x_0, y_0) \quad (25)$$

该光场传播距离  $d$  之后, 到达 H 后焦面上的光场仍由非涅耳衍射公式得:

$$u_2(x_1, y_2) = \frac{1}{j\lambda d} \exp\left[jk \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d}\right] \times \mathbf{F}\left[u_0'(x_0, y_0) \exp\left[jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}\right]\right] = \frac{z_0}{j\lambda d^2} \exp\left[jk \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d}\right] \cdot \mathbf{R}\left[\frac{x_2}{\lambda d}, \frac{y_2}{\lambda d}\right] \quad (26)$$

(26) 式表明当物体位于透镜后方, 后焦面上的分布仍然正比于物体的傅里叶变换, 但仍有一二次相位因子 (不影响强度记录)。当  $d=f$  时, 所得结果与 (11) 式相同, 说明物体无论紧靠 H 前放置还是紧靠 H 后放置效果是一样的。所不同的是这种情况下频率值与坐标的关系是:

$$x_2 = \lambda d f_x, \quad y_2 = \lambda d f_y \quad (27)$$

显然通过改变  $d$  的值, 可以调整物体傅里叶变换的空间尺寸大小。

在实验室里, 用图 1 光路制作的全息透镜对不同物体进行了傅里叶变换实验, 得到了比较理想的结果。拍摄全息透镜时, 用天津 I 型全息干版作为记录材料, 取焦距参考光夹角  $\theta \approx 20^\circ$ , 用 He-Ne 激光作记录光源, 其傅里叶变换情况如图 5 所示。图 5a 和图 5c 是

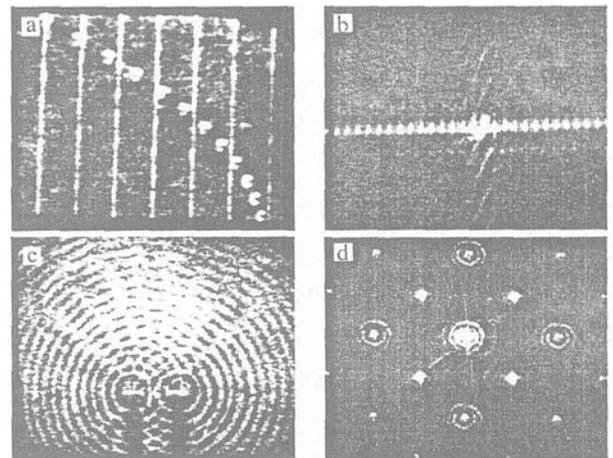


Fig 5 The experimental result a, c—the input images b, d—the spectrum distribution of Fig 5a and Fig 5c

输入物体, 放在全息透镜前  $z_0 = 500\text{mm}$  处, 中心  $b = -z_0 \sin\theta = -170\text{mm}$ , 用平行光倾斜照射。图 5a 是一放大的带有噪声的一维类线光栅图像, 空间周期为  $d = 1\text{mm}$ , 基频为  $f_x = 10^3\text{Hz}$ 。根据理论分析, 其傅里叶变换频谱为一维谱点阵, 用全息透镜进行准确傅里叶变换, 其频谱面上空间坐标与空间频率的关系为  $x = \lambda z_0 f_x$ , 对一级谱点,  $x_1 = \pm 3.164 \times 10^{-4}\text{m}$ 。用 CCD 记录全息透镜后焦面上的光场分布, 并输入计算机中进

(下转第 436 页)

率,最小的  $h_{out}$  必须保证每一发光点的光线都能在透镜侧壁发生全反射并且由出射端出射。发光点位置对  $h_{out}$  的影响见图 7。由图 7 可知,能够获得的最小  $h_{out}$  与前面讨论的几个参数有很大的关系。

由上图可以看出,由于发光点的位置不同,所能够获得的最小  $h_{out}$  也不同。即使发光点的位置相同,由于其它参数的不同所能够获得的最小  $h_{out}$  也不同。

在综合考虑以上几个参数共同作用的情况下,按照  $h_{out}$  保证所有发光点位置及所有发散角的光线都能在输出面出射的原则,得到在球面的曲率半径为 26mm 时,能够获得最小的实际输出平面的尺寸  $h_{out} = 1.2\text{mm}$ ,此时透镜的长度为 71.5mm。出射端最大发散角为  $2.1422\text{rad}(122.8^\circ)$ 。

在距透镜导管输出面不同距离的截面上光密度分布有着很大的不同(见图 8)。由图 8 可以看出,在距透镜导管端面距离大于一定的值后,光密度分布为近高斯分布,而在距离为 0.3mm 时,在输出平面中心光密度达到最高,从而在中心能够获得最高的功率密度,有利于抽运高功率固体激光器。

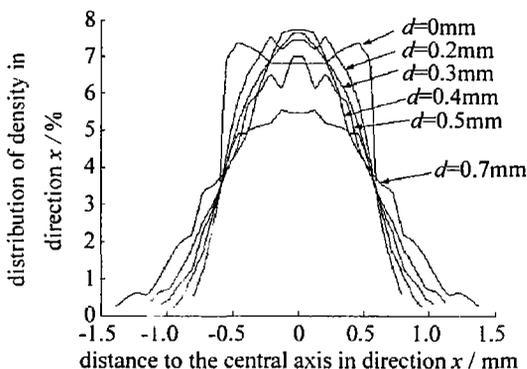


Fig 8 The different density-distributions of beams on the different distance between the faces with the lens duct in direction of the slow axes

## 2 结论及讨论

在理论设计中,半导体激光器与透镜导管的距离

(上接第 403 页)

行观测,频谱分布如图 5b 所示,显然为一维谱点阵,谱点坐标值与理论分析一致。图 5d 为 CCD 记录的图 5c 的傅里叶变换频谱分布。

## 3 小结

理论分析和实验结果表明:用共轭参考光照射,利用全息透镜可以方便地实现物体的傅里叶变换。(5)式表明,长焦距的全息透镜,小尺寸的输入图像产生的误差比较小。全息透镜可自行在实验室制作,方便易得、成本低廉,为物体傅里叶变换提供了一种灵活方便的方法。

对实际的输出尺寸  $h_{out}$  几乎没有什么影响,所以,只要保证入射的光线都能入射到透镜导管里面就可以了;半导体激光器的光束发散角越小,最后出射时光束的方向性越好,为得到高功率密度的耦合光输出,快轴方向的光束发散角压缩得越小越好。

利用透镜导管对半导体激光器面阵进行耦合是今后获得大功率半导体抽运光的主要手段,这种方法能够使多束抽运光叠加成较均匀的抽运光,且对抽运光有较高的耦合效率。但由于耦合后光束的发散角较大,所以,适合抽运那些对抽运光有较高的吸收系数的激光工作物质。

## 参考文献

- [1] YAMAGUCHI S, MAI H. Efficient Nd:YAG laser end-pumped by a 1cm aperture laser-diode bar with a GRN lens array coupling [J]. IEEE J Q E, 1992, 28(4): 1101~1105.
- [2] ZBNDEN H, BALMER J E. Q-switched Nd:YAG laser end pumped by a diode-laser bar [J]. Opt Lett, 1990, 15(18): 1014~1016.
- [3] YAMAGUCHI S, KOBAYASHI T, SAITO Y *et al*. Collimation of emissions from a high-power multistripe laser-diode bar with multiprism array coupling and focusing to a small spot [J]. Opt Lett, 1995, 20(8): 898~900.
- [4] CLARKSON W A, HANNA D C. Two-mirror beam-shaping technique for high-power diode bars [J]. Opt Lett, 1996, 21(6): 375~377.
- [5] MARX B R. Beam shaping improves fiber-coupling efficiency [J]. Laser Focus World, 1998, 34(5): 32.
- [6] 石鹏,李小莉,张贵芬 *et al*. 大功率激光二极管的微片棱镜堆光束整形和光纤耦合输出 [J]. 光学学报, 2000, 20(11): 1544~1547.
- [7] HONEA E C, BEACH R J, SUTTON S B *et al*. 115W Tm:YAG diode-pumped solid-state laser [J]. IEEE J Q E, 1997, 33(9): 1592~1560.
- [8] BEACH R J, REICHER P, BENETT W *et al*. Scalable diode-end-pumping technology applied to a 100mJ Q-switched Nd<sup>3+</sup>:YLF laser oscillator [J]. Opt Lett, 1993, 18(16): 1236~1238.
- [9] 傅汝廉,王广军,张凌倩 *et al*. 全固化激光器中的耦合系统—透镜导管的简化设计 [J]. 光电子·激光, 1998, 9(2): 96~99.
- [10] BEACH R J. Theory and optimization of lens ducts [J]. Appl Opt, 1996, 35(12): 2005~2015.

## 参考文献

- [1] 赵学山,张以谟. 用全息透镜组成傅里叶变换系统 [J]. 光学学报, 1983, 3(5): 410~414.
- [2] 黄奇忠,杜惊雷,张怡霄 *et al*. 用全息透镜实现分数傅里叶变换 [J]. 四川大学学报, 1999, 36(5): 892~895.
- [3] 郭永康,黄奇忠,杜惊雷 *et al*. 用全息元件实现变形分数傅里叶变换 [J]. 中国激光, 2000, 27(8): 719~723.
- [4] RICHTER A K, CARLSON F P. Holographically generated lens [J]. Appl Opt, 1974, 13(12): 2924~2930.
- [5] AMITHAI Y, FRIESEM A A. Recursive design techniques for Fourier transform holographic lenses [J]. Opt Engng, 1987, 26(8): 1133~1139.
- [6] BURALL D A, MORRIS G M. Design of a wide diffractive landscape lens [J]. Appl Opt, 1989, 28(10): 3950~3959.
- [7] 吕乃光. 傅里叶光学 [M]. 北京:机械工业出版社, 1998: 92~102.