文章编号: 1001-3806(2005)04-0380-03

德拜公式的修正

郭　江[1,2],吕百达[2,3],段开椋[2]

(1. 成都理工大学 信息工程学院,成都 610059; 2. 四川大学 激光物理与化学研究所,成都 610064; 3. 华中科技大学 激光技术国家重点实验室,武汉 430074)

摘要: 从惠更斯-菲涅耳原理出发对德拜公式进行了修正,用修正后的公式同 LI和 WOLF给出的公式及原德拜公式,对汇聚球面波经圆孔衍射作了详细的计算和比较。研究表明,几何焦点附近,修正后的公式在小菲涅耳数时仍有效,在一定范围内解决了原德拜公式不能计算的焦移的问题。

关键词: 圆孔衍射;汇聚球面波;焦移;德拜公式

中图分类号: O436.1　　**文献标识码**: A

The revision of Debye formula

GUO Jiang[1,2], *LÜ Bai-da*[2,3], *DUAN Kai-liang*[2]

(1. Department of Information Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China; 2. Instiute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 3. National Laboratory of Laser Technology, HUST, Wuhan 430074, China)

Abstract: According to the Huygens-Fresnel principle, Debye formula is revised. By using the revised Debye formula the diffraction of a converging spherical wave at a circular aperture is studied and the results are compared in detail with those obtained by using the Li-Wolf formula and original Debye formula. It is shown that the revised Debye formula is still valid for the low Fresnel number near the geometric focus and can give focal shift that can not be predicted in the use of the Debye formula.

Key words: diffraction of circular aperture; converging spherical wave; focal shifts; Debye formula

引　言

光的衍射是光学中遇到的重要问题之一。几百年来,人们建立了各种不同形式的衍射积分公式处理有关衍射的问题[1]。如惠更斯-菲涅耳原理、菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式、瑞利-索莫菲衍射积分公式等。由于这些衍射积分计算的复杂性,人们实际使用的常常是上述公式在傍轴近似或远场简化后的菲涅耳衍射积分公式、夫朗和费衍射积分公式、德拜衍射积分公式等近似公式。

但是最近几十年,随着激光技术的发展,光学系统所涉及到的菲涅耳数[2]为 1的量级甚至比 1更小,使一些传统的被广泛使用的衍射积分公式的有效性受到挑战。正如 LI和 WOLF[2]所述:"最近,特别是伴随激光束的使用,菲涅耳数为 1的量级甚至更小的系统已经发展了,因此,推广经典的聚焦理论到这样的系统中是所期望的"。他们从惠更斯-菲涅耳原理出发,给出了计算近轴时汇聚球面波经圆孔衍射的公式[2,3](以下称为 LW),有效地解决了小菲涅耳数情况下衍射的焦移问题。因为传统的德拜衍射积分公式不能给出衍射场的焦移[4,5],仅在衍射系统菲涅耳数 $N \gg 1$时有效。作者的目的是对德拜公式进行修正,拓展其有效使用范围,用修正后的德拜公式对汇聚球面波经圆孔的衍射进行研究,并将计算结果与 LW公式和原德拜公式的计算结果进行比较和讨论。

1　德拜公式的修正

如图 1所示,一垂直入射的均匀单色汇聚球面波

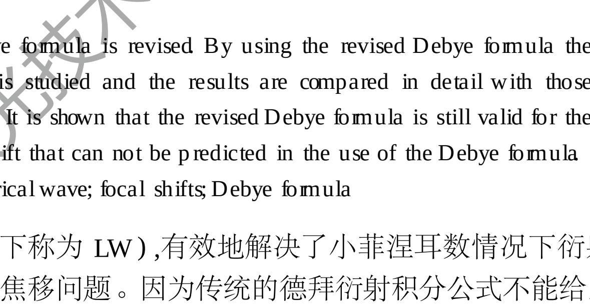

Fig 1　Converging spherical wave diffracted at a circular aperture

$U(P_1) = (A/f)\,e^{-ikf}$通过半径为 a的圆孔光阑,会聚于几何焦点 O。A/f为充满圆孔的波前 S上的振幅。$Q(x_1, y_1, z_1)$是波前 S上任意一点,C为波前 S与光轴

作者简介:郭　江 (1957-),女,教授,现从事激光传输与变换方面的研究。

E-mail: guo_jiang_li@163.com

收稿日期: 2004-06-16;收到修改稿日期: 2004-07-07

的交点，$f=OC$，$P(x_0,y_0,z)$是观察点。$PQ=r_{01}$，$OP=R$。在近轴近似下，由惠更斯-菲涅耳原理积分公式得：

$$U(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_S U(P_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}K(\alpha)\,dS=-\frac{iA}{\lambda f}\iint_S\frac{e^{ik(r_{01}-f)}}{r_{01}}\,dS \qquad (1)$$

式中，U为振幅，λ为波长，P_1为波前上任意点，r_{01}波前上任意点与观察点的距离，S为 t时刻充满光阑的波前，$k(\alpha)$倾斜因子，α为衍射角，f为焦距。对几何焦点附近作近似，德拜导出了如下衍射积分公式[1]：

$$U(P)=\frac{iA}{\lambda}\iint_\Omega e^{ik\vec{q}\cdot\vec{R}}\,d\Omega \qquad (2)$$

式中，Ω为波前 S对几何焦点 O所张立体角，$d\Omega=dS/f^2$，$\vec{q}$为 OQ方向单位矢。设 $x_0=r\cos\Psi$，$y_0=r\sin\Psi$，$x_1=a\rho\cos\theta$，$y_1=a\rho\sin\theta$，$z_1=-\sqrt{f^2-a^2\rho^2}$，$r^2=x_0^2+y_0^2$，$\phi$，$\theta$分别为 $\vec{r}$和 $a\vec{\rho}$在 x-O-y平面的方位角，可推得：

$$\vec{q}\cdot\vec{R}\approx\frac{a\rho r\cos(\theta-\Psi)}{f}-z\left[1-\frac{a^2\rho^2}{2f^2}\right] \qquad (3)$$

式中，r为光阑上任意点 Q离光轴的距离，Ψ为其方位角，ρ为观察点离光轴的距离，θ为其方位角，z为观察点 P的坐标。将 (3)式代入 (2)式，考虑到 $dS=a^2\rho\,d\theta\,d\rho$，(2)式又可写为[1]：

$$U(P)=\frac{A\pi a^2}{i\lambda f^2}e^{ikfC}\int_0^1\frac{2}{1+C}J_0(2\pi NB\rho)\,e^{-i\pi NC\rho^2}\rho\,d\rho \qquad (4)$$

式中，B为引入参量，J_0为零阶贝塞尔函数，$C=z/f$，$B=r/a$，N为从几何焦点看系统的菲涅耳数：

$$N=a^2/\lambda f \qquad (5)$$

德拜公式 (2)式或 (4)式在系统菲涅耳数 $N\gg1$时，能正确给出几何焦点附近衍射场。但可以证明，由它计算出的衍射场关于几何焦平面总是对称的，不能给出衍射场的焦移，使其应用范围受到限制。

为推广德拜公式的应用范围，对 (1)式作如下近似处理：(1)式分母中的 r_{01}用轴上光程作近似，即 $r_{01}\approx f+z$ (德拜使用 $r_{01}\approx f$)；而指数中的 $r_{01}-f$，作如下近似 (德拜使用 $r_{01}-f=-\vec{R}\cdot\vec{q}$)：

$$r_{01}-f=-\frac{2\vec{f}\cdot\vec{R}}{r_{01}+f}+\frac{R^2}{r_{01}+f}\approx-\frac{2\vec{f}\cdot\vec{R}}{2f+z}+\frac{R^2}{2f+z} \qquad (6)$$

可得修正的德拜公式：

$$U(P)=\frac{A\pi a^2}{i\lambda f^2}e^{ik\phi}\int_0^1\frac{2}{1+C}J_0\left(4\pi N\frac{B}{2+C}\rho\right)e^{-i2\pi N\frac{C}{2+C}\rho^2}\rho\,d\rho \qquad (7)$$

式中，$\phi=(2fC+fC^2+a^2B^2/f)/(2+C)$。若忽略 $C=z/f\ll1$项，便回到原德拜公式 (4)式。可见原德拜公式是修正 (7)式在忽略 z/f项时的近似。

2　计算结果和比较分析

为了考察修正公式的可靠性，以 LW公式为标准，与修正公式进行比较。对 LW公式，当用变量 C，B表示时可写为：

$$U(P)=\frac{A\pi a^2}{i\lambda f^2}e^{i\phi'}\int_0^1\frac{2}{1+C}J_0\left(\frac{2\pi NB}{1+C}\rho\right)e^{-i\frac{\pi N}{1+C}C\rho^2}\rho\,d\rho \qquad (8)$$

式中，$\phi'=\pi NB^2/(1+C)+2\pi C/\lambda$。

衍射光强为：$I=|U(P)|^2$。当观察点位于光轴上时，$r=0$，即 $B=0$。分别使用修正后的德拜公式 (7)式、原德拜公式 (4)式及 LW公式 (8)式，对不同菲涅耳数的系统，计算了汇聚球面波经圆孔衍射轴上光强分布。结果如图 2a～图 2f所示。图中 $I_0=|\pi a^2A/\lambda f^2|^2$为几何焦点处的光强。

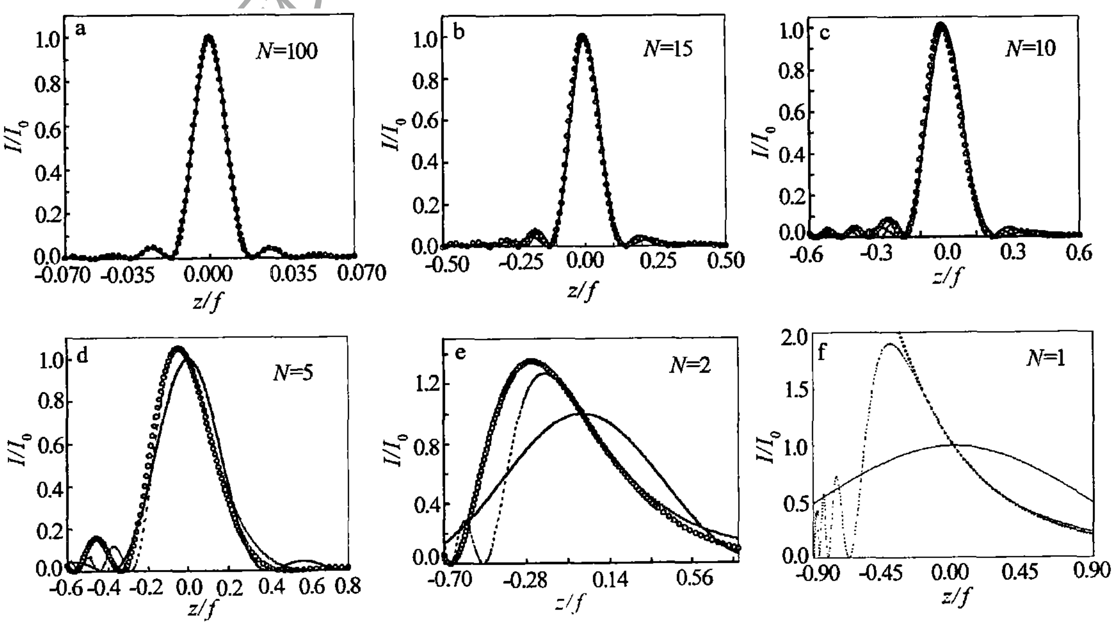

Fig. 2　On-axis intensity distribution　—— —Debye formula；∘∘∘∘∘ —revised formula；------ —LW formula

分别使用 (4)式、(7)式及 LW 式 (8)计算了不同菲涅耳数的系统,焦平面 ($z=0$)、平行焦平面的不同观察平面上的光强分布。结果如图 3a~图 3d所示。

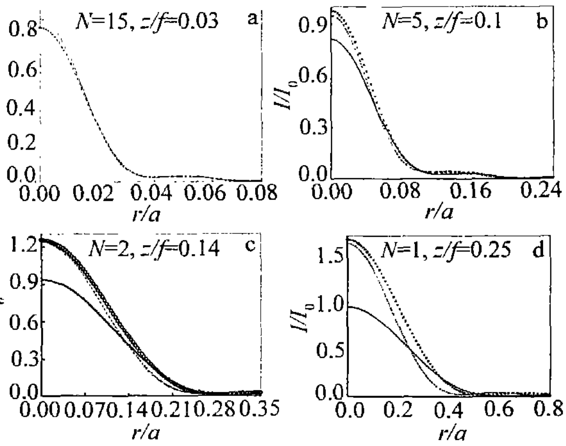

Fig. 3　Lateral intensity distribution

—— —Debye formula; ○○○○○ —revised formula; ------ —LW formula

轴上光强计算表明: (1)当菲涅耳数比较大时,3个公式的计算结果符合程度相当令人满意,见图 2a, $N=100$,此时,在衍射区域,修正公式与 LW 公式的最大误差 ≤0.5%;原德拜公式与 LW 公式的最大误差 ≤0.65%;对图 2b, $N=15$时,修正公式与 LW 公式最大误差 ≤4%,焦移 $\Delta z=-0.005f$与 LW 公式相同;原德拜公式与 LW 公式最大误差 ≤4.7%,但不能给出焦移,由于此时焦移量很小,基本可以忽略,所以可认为原德拜公式仍有效; (2)随着菲涅耳数的减小,焦移开始变得明显,原德拜公式与 LW 公式的差别逐步加大,见图 2c, $N=10$,原德拜公式与 LW 公式,仅在 $-0.025f\leqslant z\leqslant 0.03f$很小范围内相符 (误差 ≤5%),且不能给出实际的焦移,原德拜公式已基本失效;而修正公式与 LW 公式在 $z\geqslant -0.09f$范围内均很好相符 (误差 ≤5%),且两公式给出的焦移量也相等,均为 $\Delta z=-0.01f$; (3)当 $N=5$时,见图 2d,原德拜公式与 LW 公式仅在 $-0.025f\leqslant z\leqslant 0.025f$内相符合 (几乎仅在几何焦点),焦移更是不可能给出,原德拜公式已经失效;而修正公式与 LW 公式可在 $-0.12f\leqslant z\leqslant 0.22f$内相符合,两式给出的焦移量 Δz分别为 $0.047f$和 $-0.044f$,误差 ≤0.3%; (4)当 $N=2$时,见图 2e,原德拜公式已完全破坏;而修正公式在 $-0.187f\leqslant z\leqslant 0.5f$范围仍与 LW 公式符合得很好,两式给出的焦移 Δz分别为 $-0.255f$和 $-0.1915f$,相差约 5.9%,从焦移的角度看可认为修正公式几乎到达了其有效范围的极限; (5)当 $N=1$时,尽管修正公式在 $z\geqslant -0.26f$的范围内仍和 LW 公式的计算结果相符,但两式给出的焦移 Δz分别为 $-0.875f$和 $-0.4f$,误差太大,达 47.5%,可认为修正公式已失效。

横向光强分布的计算也给出了与轴上光强类似的结果。在焦平面上 $z=0$, (4)式、(7)式、(8)式 3个不同的衍射积分公式给出的强度分布关系式完全相同 (原德拜公式与另外二式给出的复振幅相差一个位相因子)。当观察面为 $z\neq 0$的面时,对菲涅耳数较大 ($N\geqslant 15$)的系统,三者的差别很小。见图 3a, $N=15$, $z/f=0.03$,观察面上修正公式与 LW 公式的误差 ≤1.1%;原德拜公式与 LW 公式的误差 ≤4.1%。随着菲涅耳数的减少,原德拜公式与另外二式的差别开始增大,当 $N=5$, $z/f=-0.1$时,见图 3b,修正公式与 LW 公式的误差 ≤4.9%,符合很好;而原德拜公式与 LW 公式的误差 ≤14%,已基本破坏。当 $N=2$, $z/f=-0.14$时,见图 3c,修正公式与 LW 公式的误差 ≤8.3%,基本相符;而原德拜公式与 LW 公式的误差 ≤30%,已完全破坏。当 $N=1$, $z/f=-0.25$时,见图 3d,修正公式和原德拜公式与 LW 公式的最大误差分别达 21%和 67%,均已失效。

综上所述,修正后的德拜公式 (7)式,对菲涅耳数大的系统 ($N\geqslant 15$),与原德拜公式 (4)式及 LW 公式 (8)式符合得很好,这说明修正是合理的。对小菲涅耳数 ($1<N\leqslant 10$)的系统,原德拜公式的计算结果与 LW 公式已不相符,但修正后的公式与 LW 公式的计算结果仍符合得很好,并且可给出与 LW 公式几乎相同的焦移量。从而,推广了德拜公式的使用范围。

参 考 文 献

[1] 玻恩 M,沃耳夫 E.光学原理 [M].北京:科学出版社,1978.483~576.

[2] LI Y,WOLF E. Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different Fresnel numbers [J]. J O S A, 1984, A1 (8): 801~807.

[3] LI Y. Encircled energy for systems of different Fresnel numbers [J]. Optik, 1983, 64 (3): 207~218.

[4] SHEPPARD C J R. Validity of the Debye approximation[J]. Opt Lett, 2000, 25 (22): 1660~1662.

[5] WOLF E, LI Y. Conditions for the validity of the Debye integral representation of focused fields [J]. Opt Commun, 1981, 39: 205~210.