

文章编号: 1001-3806(2005)02-0190-04

无损光纤中与位相相关的扰动演化行为

钟先琼^{1,2}, 陈建国^{1*}, 李大义¹, 林晓东¹, 冯国英¹

(1. 四川大学 电子信息学院, 成都 610064; 2 成都信息工程学院 光电技术系, 成都 610041)

摘要: 利用小信号近似下线性化的非线性薛定谔方程导出了光纤中扰动幅度和位相的解析表达式; 计算并讨论了扰动幅度和位相随传输距离的演化规律; 在极坐标下给出了扰动相矢 (phasor) 顶点运动的轨迹, 分析讨论了轨迹特征及其渐近行为。结果表明, 扰动的初始位相对扰动的演化规律有强烈的影响。

关键词: 扰动调制不稳定; 小信号近似; 非线性薛定谔方程; 扰动演化

中图分类号: O437 TN929.11 **文献标识码:** A

Phase-dependent evolution behavior of perturbation in lossless optical fibers

ZHONG Xian-qiong^{1,2}, CHEN Jian-guo¹, LI Da-yi¹, LING Xiao-dong¹, FENG Guo-ying¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2 Department of Optoelectronic Technology, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610041, China)

Abstract Using the linearized nonlinear Schrödinger equation obtained with the aid of the small signal approximation, analytical expressions for the amplitude and phase of a perturbation propagating in an optical fiber have been deduced. The evolution characteristics of the amplitude and phase of the perturbation has been calculated and discussed. The moving trajectories portrayed by the perturbation phasors have been obtained under the polar coordinates. The characteristics and the asymptotic behaviors of the trajectories have been analyzed. The results show that the evolution of the perturbation is intensively influenced by the initial perturbation phase.

Key words perturbation modulation instability; small signal approximation; nonlinear Schrödinger equation; perturbation evolution

引 言

光纤色散和克尔效应相互作用一直是人们关注的问题^[1-9], 这种作用是形成时间孤子的基本要素, 因而在通信领域有着极其重要的应用价值^[1,2]。此外, 这种作用也可能诱发调制不稳定性^[4,3-9], 使光纤中传输的连续或准连续的光波发生分裂^[1-4]。

前人曾经在小信号近似下, 从忽略^[1,5,6]和考虑高阶色散^[4,7,8]的非线性薛定谔方程导出了扰动场复振幅所遵循的方程并得到了与传输距离无关的扰动的功率增益系数。然而, 由于对扰动场的数学形式所作的设定使得求解相当困难, 因而人为地把扰动增益系数限定为常量, 从而在事实上把研究放在了对渐近行为的分析上, 因而没有真正获得扰动演化的完整图像。换句话说, 前人的研究丢失了扰动演化的初始阶段的

信息, 而正是在这一阶段中扰动变化最为剧烈, 扰动演化对初始位相有着极其强烈的依赖关系。

在本文中, 笔者用幅度与位相两个实数来表示扰动场, 从忽略高阶色散的非线性薛定谔方程导出了幅度和位相的方程并求出了解析解; 利用解析解找到了一个在传播过程中保持不变的量; 研究了具有不同初始位相的扰动的幅度和位相随传输距离的变化特征。研究还表明, 在位相-距离平面上存在着几个区域, 处于这些区域的位相最终将被吸引到各自的渐近值上去。此外, 也在极坐标下给出了扰动相矢顶点运动的轨迹, 并对不同初始位相的扰动相矢顶点轨迹特征及趋向进行了分析。

1 非线性薛定谔方程的线性化及其求解

忽略光纤损耗和高阶色散时, 在小信号近似下描述复扰动变化的线性化非线性薛定谔方程为^[11]:

$$i \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} - \gamma P_0 (\alpha + \alpha^*) \quad (1)$$

式中, “*”号表示复共轭, 常数 β 和 γ 分别表征二阶群速度色散系数及非线性系数。通常, 复量 α 需要用两个实数来描述, 在本文中, 用幅度和位相角的方式来

基金项目: 中国工程物理研究院与国家自然科学基金会联合资助项目 (10176019)

作者简介: 钟先琼 (1969), 女, 博士研究生, 主要研究方向为激光与光通信及非线性光学。

* 通讯联系人。E-mail: optics_hl@163.com

收稿日期: 2004-02-19; 收到修改稿日期: 2004-04-14

表示复量。于是,与载波的角频差为 Ω 的扰动可写为:

$$\alpha = \delta(z) \exp\{i[\Psi(z) - \Omega T]\} \quad (2)$$
 式中, $\delta(z)$ 表示扰动幅度, $\Psi(z)$ 表示扰动场与强背景场的位相差。

前人的研究表明,调制不稳定发生在 $\beta < 0$ 的情况下。此时,把 (2) 式代入 (1) 式并分离实、虚部可得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = |\beta| \frac{\Omega_r^2 [1 + \cos(2\varphi)] - \Omega^2}{2} \quad (3a)$$

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial z} = |\beta| \frac{\Omega_r^2 \sin(2\varphi)}{2} \quad (3b)$$

式中, $\Omega_r^2 = (2VA_0^2) |\beta|$, $\varphi = \Psi(z) - \Omega T$ 。与前人的处理相比, Ω_r 就是不稳定扰动的最大增长(角)频率;而 (3a) 式和 (3b) 式分别与扰动波数 k 的实部和虚部(增益)有关。从 (3a) 式和 (3b) 式可以看出,在传输过程中,扰动的位相不是传输距离 z 的线性函数,扰动的增益也不是常数。前人将复量 α 表示为 $\{U_0 \cos(kz - \Omega T) + V_0 \sin(kz - \Omega T)\}$ 或 $\{U_0 \exp[i(kz - \Omega T)] +$

$$g_e = \frac{1}{2} |\beta| D \Omega_r^2 \frac{\Omega_r^2 \tanh(\Delta + |\beta| Dz) \pm |(\Omega_r^2 - \Omega^2) \tanh(\Delta + |\beta| Dz) \cdot \operatorname{sech}(\Delta + |\beta| Dz)|}{\Omega_r^4 - (\Omega_r^2 - \Omega^2) \operatorname{sech}^2(\Delta + |\beta| Dz)} \quad (6)$$

等式右边分子上的“ \pm ”号的取舍可以通过 (6) 式和 (3b) 式在 $z=0$ 处应该相等这一事实确定。计算表明,在下列情况下需取“ $+$ ”号(其余取“ $-$ ”)。

(1) 在 $\sin(2\varphi_0)$ 为正的情况下,如果 $|\Omega| > |\Omega_r|$,那么在 $|\Omega| > \sqrt{2} |\Omega_r \cos(\varphi_0)|$ 时取“ $+$ ”号,如果 $|\Omega| < |\Omega_r|$,那么在 $|\Omega| < \sqrt{2} |\Omega_r \cos(\varphi_0)|$ 时也取“ $+$ ”号。

(2) 在 $\sin(2\varphi_0)$ 为负的情况下,如果 $|\Omega|$ 满足 $\sqrt{2} |\Omega_r \cos(\varphi_0)| < |\Omega| < |\Omega_r|$ 或 $|\Omega_r| < |\Omega| < \sqrt{2} |\Omega_r \cos(\varphi_0)|$,则 (11) 式取“ $+$ ”号。

从 (6) 式可以看到,在 $z \rightarrow \infty$ 的情况,扰动的电场增益系数的渐近值为:

$$g_e(\infty) = \frac{|\beta \Omega| \sqrt{2\Omega_r^2 - \Omega^2}}{2} \quad (7)$$

这正是文献中报道的扰动的电场增益系数表达式。在一般情况下,增益系数随 z 的演化与扰动初始位相有关,只不过在传输距离足够大时,该系数趋向一个只与扰动角频率 Ω 有关的定值。

2 扰动演化行为分析

利用上边的扰动方程解可以分析扰动位相和幅度的演化规律。在图 1 中,画出了不同初位相 φ_0 时, $|\Omega|/\Omega_r$ 等于 1.13(见图 1a)和 0.424(见图 1b)两种频率的扰动的位相随传输距离的变化情况。图中,由下而上各曲线的 φ_0 从 $-\pi/9$ 按间距 $\pi/9$ 依次增加到 π 。根据文献 [1],计算所用的参数选为 $\beta_2 =$

$iV_0 \exp[i(kz - \Omega T)]$ 的形式^[1,4,5]并在数学推导中认定波数 k 是与距离无关的常数,从而对来自洽的扰动演化方程作了人为的限定,而 k 的实部和虚部分别与扰动的位相和增益系数相关,故这种人为的限定导致了与位相相关的扰动初始演化信息的丢失。

从 (3a) 式还可以看出,在 $\Omega^2 < 2\Omega_r^2 = \Omega_c^2$ 的情况下,对 φ 的积分是反双曲正切。换句话说,当扰动频率 $|\Omega|$ 小于截止频率 Ω_c 时将出现调制不稳定现象。完成 (3a) 式积分,可以得到位相随 z 变化的解析关系式为:

$$\tanh[|\beta| Dz + \Delta] = \frac{D \sin(2\varphi)}{\Omega_r^2 + (\Omega_r^2 - \Omega^2) \cos(2\varphi)} \quad (4)$$

式中,
$$D = |\Omega| \sqrt{2\Omega_r^2 - \Omega^2} \quad (5a)$$

$$\Delta = \operatorname{artanh}\left[\frac{D \sin(2\varphi_0)}{\Omega_r^2 + (\Omega_r^2 - \Omega^2) \cos(2\varphi_0)}\right] \quad (5b)$$

在 (5b) 式中, φ_0 表示 $z=0$ 处的 φ 值。把 (4) 式代入 (3b) 式可以得到扰动的电场增益系数为:

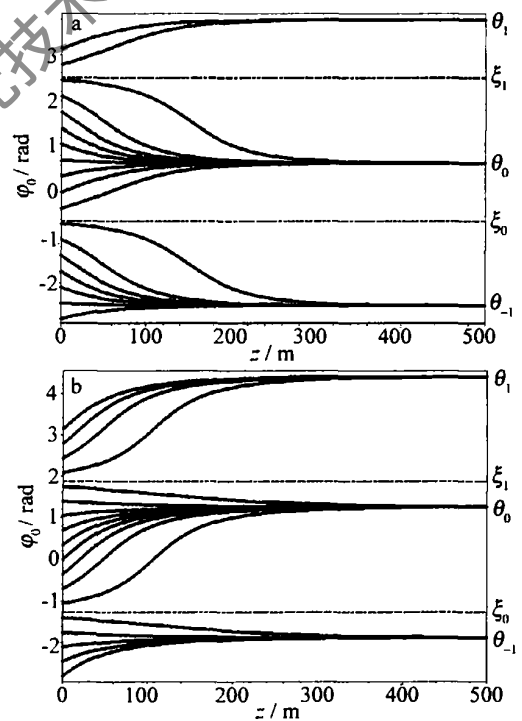


Fig 1 Evolution of perturbation phase with propagation distance for different initial phases

$-0.02 \text{ps}^2/\text{m}$, $\Omega_r = 1 \times 10^{12} \text{rad/s}$

由图可见, $z-\varphi$ 平面被几条水平分界线分割成若干区域,这些分界线的方程为:

$$\varphi = \xi_n = n\pi - \frac{\arccos(\Omega^2/\Omega_r^2 - 1)}{2} \quad (8)$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

而扰动的位相最终趋向几条水平线,这些水平线满足

的方程为:

$$\varphi = \theta_n = n\pi + \frac{\arccos(\Omega^2 / \Omega_f^2 - 1)}{2} \quad (9)$$

(n = 0, ±1, ±2, ...)

当扰动的初位相在 ξ 到 ξ_{+1} 之间时, 位相 φ 最终趋向 θ_n 。其实, 从 (3a) 式可以看出, 无论 φ 等于 ξ 或 θ_n , 都可使 $d\varphi/dz = 0$ 使得扰动位相不再随距离变化。运用常规的判断方程稳定性的分析方法可以证明, 当 $\varphi = \theta_n$ 时, 不动点 θ_n 对应的是稳定解, 而 ξ 则对应的是非稳定解。

在上一节, 曾导出了扰动增益系数的表达式, 为获知扰动自身的变化情况, 不但要知道扰动位相 φ , 还要求得扰动幅度 δ 。结合 (3a) 式和 (3b) 式, 完成积分后可求得:

$$\delta = \delta_0 \sqrt{\frac{\Omega_f^2 [1 + \cos(2\varphi_0)] - \Omega^2}{\Omega_f^2 [1 + \cos(2\varphi)] - \Omega^2}} \quad (10)$$

式中, δ_0 为扰动的初始幅度。从 (10) 式可以看出, $\delta^2 / \{\Omega_f^2 [1 + \cos(2\varphi)] - \Omega^2\}$ 是一个不随 z 变化的量。

在图 2 中, 给出了不同初位相值 φ_0 时, $\frac{|\Omega|}{\Omega_f}$ 等于 0.141 (见图 2a) 和 0.424 (见图 2b) 两种频率的归一化扰动幅度 δ/δ_0 随 z 的演化曲线。计算中所用的 β_2 和 Ω_f 与图 1 相同。由图可见, 视初位相的不同, 扰动幅度随距离的演化规律大体有两种可能的形式, 一

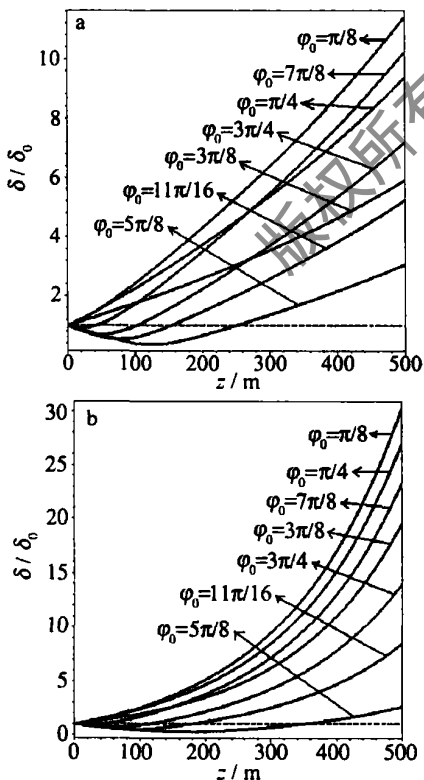


Fig 2 Evolution of perturbation amplitude with propagation distance for different initial phases

是先衰减再增长, 二是单调增长, 增长的快慢也不同。

若将扰动 α 看成一个相矢, 则可在极坐标 (φ, δ) 中画出归一化相矢顶点的运动轨迹。在图 3 中, 给出了扰动频率 $|\Omega| = 1.1\Omega_f$, 初始位相 φ_0 从 $-\pi/6$ 增加到 $7\pi/4$ (步长为 $\pi/12$) 时的归一化扰动相矢顶点的运动轨迹, 计算所用 β_2 和 Ω_f 与图 1 相同。由图可见,

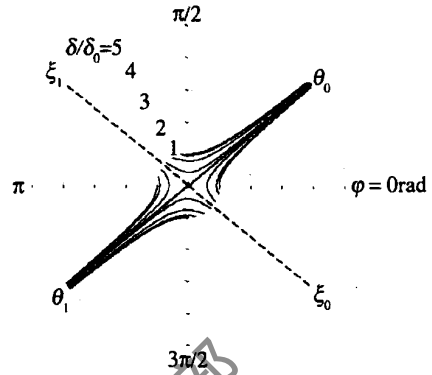


Fig 3 The moving trajectories portrayed by the perturbation phasors for different initial phases

不同初始位相的曲线始于一个半径为 1 的圆, 因为在 $z=0$ 处 δ/δ_0 均为 1; 初始位相 φ_0 在 ξ 和 ξ_{+1} 之间的扰动, 最终都集中到代表 θ_0 的射线上去; φ_0 在 ξ 和 ξ_{-1} 之间的扰动, 最终都集中到代表 θ_1 的射线上去。还可以看出, 若 φ_0 位于第 1 象限或第 3 象限, 则扰动幅度单调地增加, 若 φ_0 位于第 2 象限或第 4 象限, 则轨线的起始阶段会落入半径为 1 的圆内, 说明扰动幅度先衰减, 然后再增加。

在图 4 直角坐标中给出了不同扰动初位相 φ_0 (从 $-\pi$ 到 π , 步长为 $\pi/16$) 时的归一化扰动幅度 δ/δ_0 随扰动位相角 φ 的变化曲线, 计算中使用 $|\Omega| = 1.1\Omega_f$, β_2 和 Ω_f 与图 1 相同。此图进一步反映了以下物理事实: 初位相 φ_0 在 ξ 到 ξ_{+1} 之间时, 位相 φ 最终趋向 θ_n ; 视初位相的不同, 扰动位相的增长有两种方式, 若 φ_0 在 ξ 到 θ_n 之间, 则扰动位相单调增加趋于 θ_n , 若 φ_0 在 θ_n 到 ξ_{+1} 之间, 则扰动位相 φ 单调减少趋于 θ_n 。视初位相的不同, 扰动幅度的增长也有两种方式, 一是单调增长, 二是先衰减, 后增长。

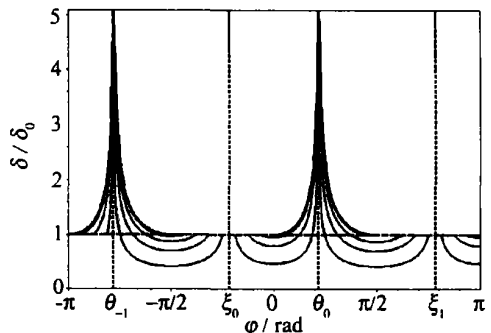


Fig 4 Variations of perturbation amplitudes with phases for different initial phases

3 结 论

采用幅度与位相两个实数表示扰动场,在光纤负色散区和扰动角频率小于截止角频率的情况下,利用线性化的非线性薛定谔方程研究了无损光纤中扰动的演化行为,导出了扰动幅度和位相的解析表达式;计算并讨论了扰动幅度和位相随传输距离的演化规律;在极坐标下给出了扰动相矢顶点运动的轨迹,对不同初始位相的扰动相矢顶点轨迹特征及趋向进行了分析,并与直角坐标下的扰动幅度-位相图结果一起对扰动的演化作了深入讨论。研究表明,扰动幅度和位相的初始演化都对扰动初位相有着强烈的依赖关系。在位相-距离平面上存在着几个区域,处于这些区域的位相最终将被吸引到各自的渐近值上去,以各自的位相渐近值为界,当初始相位值大于渐近值时,扰动位相将单调下降趋于渐近值,反之,则扰动位相将单调上升趋于渐近值,若初始位相值等于渐近值,则扰动位相不随距离而变;若扰动初位相 φ_0 位于第 1 象限或第 3 象限,则扰动幅度单调地增加,若 φ_0 位于第 2 象限或第 4 象限,则扰动幅度先衰减,然后再增加。

(上接第 189 页)

性有所改善,得到能量稳定性高达 2%,脉冲稳定性为 6.5%,频率精度优于 0.005% 的激光输出,消除了 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 被动调 Q 的子脉冲现象,且脉冲波形光滑。可见,定向棱镜腔改善了输出 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 被动调 Q 激光器的稳定性。

感谢上海光机所徐军博士提供的 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 晶体。

参 考 文 献

- [1] 裴 博,包照日格图,周 昀 *et al* 内腔式 KTP OPO 发散角的实验研究 [J]. 中国激光, 2002, A29(1): 13~ 16.
- [2] 张行愚,赵圣之,王青圃 *et al* $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 调 Q 特性的理论和实验研究 [J]. 光学学报, 1998, 18(9): 1180~ 1185.
- [3] 程 勇,孙 斌,王小兵 *et al* 一种改善激光光束质量和稳定性的新途径 [J]. 量子电子学报, 1999, 16(3): 217~ 220.

参 考 文 献

- [1] AGRAWAL G P. Nonlinear fiber optics [M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1995. 133~ 141.
- [2] DIANOV EM, MAMYSHEV P V, PROKHOROV A M *et al* Generation of a train of fundamental solitons at a high repetition rate in optical fibers [J]. Opt Lett, 1989, 14(18): 1008~ 1010.
- [3] TRILLO S, WABNITZ S U. Ultrashort train generation through induced modulation polarization instability in a birefringent Kerr like medium [J]. J O S A, 1989, B6(2): 238~ 249.
- [4] PITUIS S, MILLOT G. Experimental observation of a new modulational instability spectral window induced by four order dispersion in a normally dispersive single-mode optical fiber [J]. Opt Commun, 2003, 226: 415~ 422.
- [5] POTASEK M J, AGRAWAL G P. Self-amplitude modulation of optical pulses in nonlinear dispersive fibers [J]. Phys Rev, 1987, A36(8): 3862~ 3867.
- [6] HECKMANN J M, CAVALCANTI S B, BORGES N M *et al* Modulation instability in semiconductor doped glass fibers with saturable nonlinearity [J]. Opt Lett, 1992, 18(3): 182~ 184.
- [7] ABDULLAEV F K, DARMANYAN S A, BISCHOFF S *et al* Modulation instability in optical fibers near the zero dispersion point [J]. Opt Commun, 1994, 108: 60~ 64.
- [8] XU W C, ZHANG S M, CHEN W P *et al* Modulation instability of femtosecond pulses in dispersion decreasing fibers [J]. Opt Commun, 2001, 199: 355~ 360.
- [9] 杨爱玲,王 晶,苗洪利 *et al* 色散缓变光纤中交叉相位调制不稳定增益谱 [J]. 激光技术, 2003, 27(1): 44~ 46.
- [4] 程 勇,毛少卿,王志怀 *et al* 免调试固体激光器 [J]. 激光技术, 1999, 23(2): 68~ 70.
- [5] 吴念乐,吕亚军,陆兴华 *et al* 含 Cr 离子饱和吸收体被动调 Q 解析解 [J]. 光学学报, 1996, 16(12): 1813~ 1818.
- [6] 郑 权,邵兰芳,赵 岭 *et al* $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 调 Q 全固态激光器可控运转方法研究 [J]. 激光与红外, 2003, 33(3): 194~ 196.
- [7] 巩马理,闫 平,谢 韬 *et al* 被动 Q 开关激光器的预抽运技术 [J]. 中国激光, 2003, A30(7): 585~ 589.
- [8] SCHOLL M S. Ray trace through a corner cube retroreflector with complex reflection coefficients [J]. J O S A, 1995, 12(7): 1589~ 1592.
- [9] WANG Sh M, ZHAO D M, HU L G *et al* Corner cube recognized as superconjugator [J]. Proc SPIE, 2002, 4914: 182~ 187.
- [10] 王小兵,孙 斌,程 勇 *et al* 定向棱镜谐振腔的平顶高斯光束特性 [J]. 激光技术, 2002, 26(2): 117~ 122.
- [11] 宋晏蓉,李瑞宁,刘媛媛 *et al* 用 $\text{Cr}^{4+}:\text{YAG}$ 作调 Q 元件的激光器特性的研究 [J]. 中国激光, 2001, 28(6): 487~ 490.