

文章编号: 1001-3806(2005)01-0106-03

平顶高斯光束通过硬边光阑传输算法的改进

肖 希^{1,2}, 赵光普^{1,2}, 吕百达²

(1. 宜宾学院 光电信息研究所, 宜宾 644007; 2 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

摘要: 用傅里叶级数和复高斯函数的乘积对硬边光阑的窗口函数进一步拟合, 对平顶高斯光束通过硬边光阑光学系统的模拟算法作了改进, 并给出了近似解析传输公式。对直接积分 Collins公式和使用 Wen方法的数值计算结果作了比较。研究表明, 只要傅里叶级数项数不少于 30, 改进后的算法比直接用复高斯函数展开具有更高的计算精度。

关键词: 激光光学; 平顶高斯光束; 硬边光阑; 复高斯函数展开; 傅里叶级数

中图分类号: TN241 **文献标识码:** A

Improvement of the simulation algorithm of flattened Gaussian beams passing through hard-aperture optics

XIAO Xi^{1,2}, ZHAO Guang-pu^{1,2}, LÜ Bai-da²

(1. Institute of Optoelectronic Information, Yibin University, Yibin 644007, China; 2 Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The simulation algorithm of flattened Gaussian beams (FCBs) passing through hard-aperture optics is improved, and an approximate closed-form propagation equation is derived, where a product of Fourier series and complex Gaussian function expansion is adapted to the window function of a hard-edged aperture. Numerical calculation results are compared with those obtained by direct integration of the Collins formula Wen's method. It is shown that the improved algorithm provides more accurate calculation results than the complex Gaussian function expansion, so long as the number of Fourier series is no less than 30.

Key words: laser optics; flattened Gaussian beam; hard-edged aperture; complex Gaussian function expansion; Fourier series

引 言

1970年, Collins公式^[1]将光束的传输变换与光学系统的 ABCD 矩阵建立了联系。以此为基础, 人们对无光阑或光阑衍射效应可忽略情况下各种光束通过光学系统传输变换问题已进行了大量的研究^[2~4]。然而, 实际的光束在传输中常常受到一个或多个光阑的限制。直接对 Collins公式数值积分计算量大, 不便于作直观的物理分析。因此, 寻找有光阑限制时光束传输的近似公式和快速算法是十分必要的。近年来, 用 WEN的方法^[5], 得到了一些常见光束通过硬边光阑光学系统的近似解析表达式^[6,7], 尽管提高了计算速度, 但由于其采用的有限个复高斯函数之和与硬边光阑的窗口函数之间误差较大, 因而使得在近场区域计算误差也较大。能否寻找一种同时兼顾机时与计算精度的近似算法便成了解决这类问题的关键。本文中用傅里

叶级数与有限个复高斯函数之和的乘积对硬边光阑窗口函数作进一步拟合, 推导出了平顶高斯光束通过硬边光阑 ABCD 光学系统近似解析传输公式, 作了数值计算, 并与直接积分和 Wen方法进行了比较, 只要傅里叶级数的项数 $M \geq 30$, 所提出的改进算法就能兼顾计算精度和机时, 并有较大适用范围。

1 平顶高斯光束通过含硬边光阑 ABCD 光学系统的传输

在二维情况下, 入射光束 $E(x', 0)$ 通过 x 方向半宽为 a 的硬边光阑 ABCD 光学系统时, 场分布由 Collins公式给出^[1]:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x', 0) \times \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax'^2 - 2xx' + Dx^2)\right] dx' \quad (1)$$

式中, k 为波数, 与波长 λ 的关系为 $k = 2\pi/\lambda$ 。若入射光束为平顶高斯光束, 则场分布为^[8]:

$$E(x', 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)x'^2}{w_0^2}\right] \times$$

基金项目: 四川省教育厅基金资助项目 (2003A168)

作者简介: 肖 希 (1962-), 女, 副教授, 主要从事激光光学科研和教学工作。

E-mail: ybxiaoxi@eyou.com

收稿日期: 2003-11-21; 收到修改稿日期: 2004-03-05

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)x^2}{w_0^2} \right]^n \quad (2)$$

式中, w_0 和 N 分别是平顶高斯光束的束腰宽度和阶数。

将硬边光阑的窗口函数写为矩形函数:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (3)$$

式中, a 为光阑的半宽度。使用 Wen 方法将矩形函数展开为复高斯函数的叠加:

$$f_1(x) = \sum_{h=1}^{10} A_h \exp \left[-\frac{B_h x^2}{a^2} \right] \quad (4)$$

式中, A_h, B_h 取值见文献 [5] 中的表 1, 是含复高斯函数的中间变量。用 $f_1(x)$ 拟合 $\text{rect}(x)$ 的计算结果见图 1a。由图知, 当 x/a 接近于 1 时, 其振幅 (实部) 与矩形函数有明显差异, 出现较大调制, 且位相 (虚部) 起伏较大, 因而导致在近场计算误差较大。为了减少误差, 将矩形函数用傅里叶级数与有限个复高斯函数的乘积来拟合:

$$f_2(x) = \sum_{h=1}^{10} A_h \exp \left[-\frac{B_h x^2}{a^2} \right] \times \sum_{m=-M}^M C_m \exp [im\omega_m x] \quad (5)$$

式中, ω_m 是傅里叶级数的圆频率。图 1b 为 $M=30$ 时, 用 (5) 式拟合窗口函数的曲线, 对比图 1a, 图 1b 可见, 图 1b 较图 1a 更接近窗口函数, 特别是在 x/a 接近 1 处的调制变小, 位相起伏也减小了。因而可以预期, 用该方法较直接用 Wen 方法具有更高的计算精度。

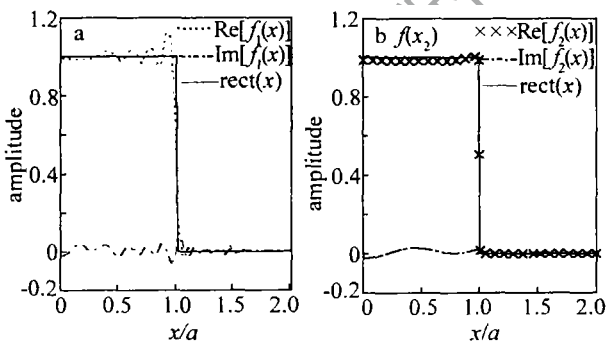


Fig 1 a—relationship of $\text{rect}(x)$, $\text{Re}[f_1(x)]$ and $\text{Im}[f_1(x)]$
b—relationship of $\text{rect}(x)$, $\text{Re}[f_2(x)]$ and $\text{Im}[f_2(x)]$

由 (1) 式、(5) 式得初始场分布为 $E(x', 0)$ 的光束通过硬边光阑 ABCD 光学系统的传输公式:

$$E(x, z) = \frac{i}{\sqrt{\lambda B}} \exp \left[-\frac{ikD}{2B} x^2 \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} E(x', 0) f_2(x') \exp \left[-\frac{ik}{2B} (Ax^2 - 2xx') \right] dx' \quad (6)$$

式中, $k=2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长。

利用积分公式^[9]:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) \cos(xy) dx = (-1)^n \pi^{1/2} (2\alpha)^{-(2n+1)} \exp \left[-\frac{y^2}{4\alpha^2} \right] H_{2n} \left[\frac{y}{2\alpha} \right] \quad (7)$$

($\arg \alpha < \pi/4$)

将 (2) 式和 (5) 式代入 (6) 式, 积分之, 最后结果可整理为:

$$E(x, z) = \frac{1}{R_0} \frac{\sqrt{ik}}{\sqrt{2B}} \exp \left[-\frac{ikD}{2B} x^2 \right] \times \sum_{m=-M}^M \sum_{h=1}^{10} A_h \exp \left[-\left(\frac{T_m}{2R_h} \right)^2 \right] \times \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \right)^n \left(\frac{R_0}{R_h} \right)^{2n+1} H_{2n} \left[\frac{T_m}{2R_h} \right] \quad (8)$$

式中, T_m 是含傅里叶级数的中间变量, R_0 和 R_h 是含复高斯函数的中间变量。

$$R_0 = \frac{N+1}{w_0}, \quad R_h = \sqrt{\frac{N+1}{w_0} + \frac{ikA}{2B} + \frac{B_h}{a^2}}, \quad T_m = kx/B + m\omega_m \quad (9)$$

(8) 式即为平顶高斯光束通过硬边光阑 ABCD 光学系统的近似解析传输公式, 它仍为基本初等函数的求和形式, 可通过改变 M 的值来调整计算精度。

当平顶高斯光束在自由空间中传输时, 光学系统的 ABCD 满足:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (8) 式, 得到平顶高斯光束通过硬边光阑自由空间传输变换的近似解析公式:

$$E(x, z) = \frac{1}{R_0} \frac{\sqrt{ik}}{\sqrt{2z}} \exp \left[-\frac{ik}{2z} x^2 \right] \times \sum_{m=-M}^M \sum_{h=1}^{10} A_h \exp \left[-\left(\frac{T_m}{2R_h} \right)^2 \right] \times \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4} \right)^n \left(\frac{R_0}{R_h} \right)^{2n+1} H_{2n} \left[\frac{T_m}{2R_h} \right] \quad (11)$$

$$R_0 = \frac{N+1}{\sqrt{w_0}}, \quad R_h = \sqrt{\frac{N+1}{w_0} + \frac{ik}{2z} + \frac{B_h}{a^2}}, \quad T_m = kx/z + m\omega_m \quad (12)$$

2 数值计算结果与分析

为了对所得结论进行说明, 利用 (11) 式作了数值计算, 并与 (1) 式直接积分和 Wen 方法计算结果作了比较。计算参数为 $\lambda=1.06 \times 10^{-3} \text{ mm}$, $a=w_0=1 \text{ mm}$, $N=5, M=30$ 。图 2a, 图 2b 分别为 $1/F_a=0.5$ (菲涅耳数 $F_a=a^2/\lambda z$)、 $1/F_a=1.5$ 时, 直接积分结果与本文中 (11) 式计算结果的横向光强分布。由图知, 两条曲线吻合较好, 表明所得结论误差较小。图 3a, 图 3b 分别

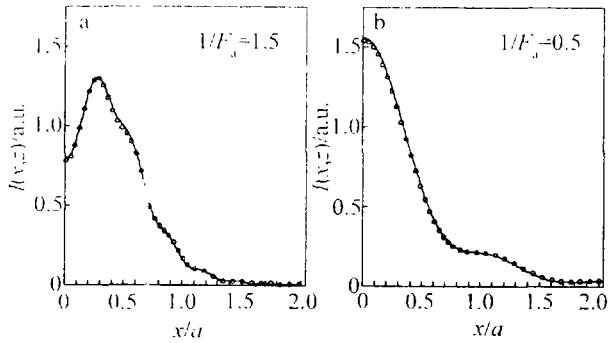


Fig 2 Transversal intensity distributions of an FGB propagating in free space with a hard-edged aperture — using Collins formula ooo—using Eq (11)

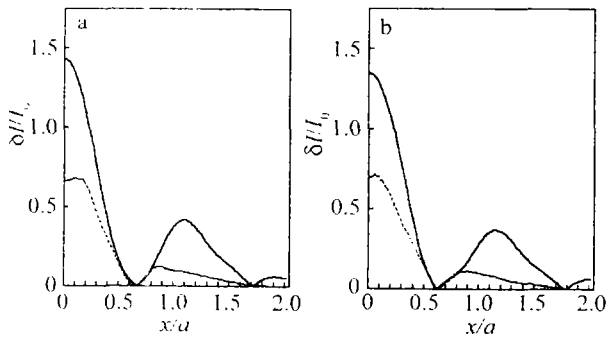


Fig 3 Error curves corresponding to Fig 2, respectively — using Eq (7) in Ref [7] ---using Eq (11)

为 $1/F_a = 0.5, 1/F_a = 1.5$ 时,用文献 [7] 中 (7) 式 (实线)、本文中 (11) 式 (虚线) 计算的横向光强分布与 (1) 式直接积分的相对误差曲线 ($\delta I/I_0 = (I_1 - I_0) / I_0$, I_1 为用文献 [7] 中 (7) 式或本文中 (11) 式计算的光强, I_0 为用 Collins 公式计算的光强)。从图中可知,本文中所得结果比直接用 Wen 方法具有较高计算精度。图 4a、图 4b 分别为 $1/F_a = 0.12$ 时,本文中 (11) 式、文

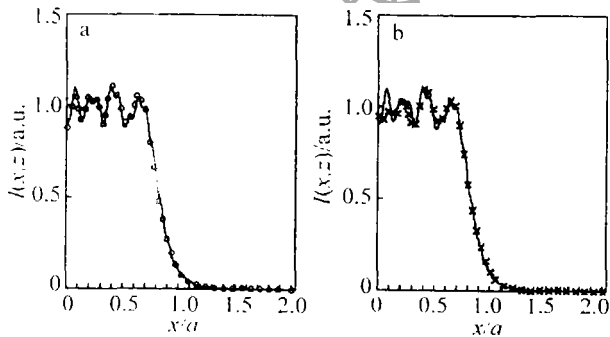


Fig 4 Transversal intensity distributions of an FGB propagating in free space with a hard-edged aperture at the plane of $1/F_a = 0.12$, — using Collins formula a—“ooo” by using Eq (11) b—“x” by using Eq (7) in Ref. [7]

献 [7] 中 (7) 式计算的横向光强分布与直接积分的对比曲线。图 5 是本文中 (11) 式计算的轴上光强分布与数值积分的对比曲线。由图 4、图 5 及文献 [7] 中图 1 知,本文中 (11) 式在 $1/F_a = 0.12$ 时仍然适用,而文献 [7] 中 (7) 式却存在较大误差,表明本文中所得结果

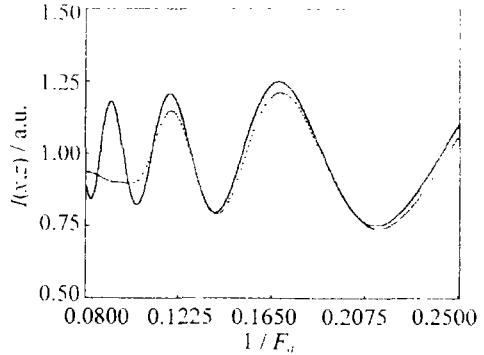


Fig 5 Axial intensity distributions of an FGB propagating in free space with a hard-edged aperture — using Collins formula ---using Eq (11)

与直接用 Wen 方法具有更大适用范围。

以图 2a 的情形为例,在 Pentium-4 微机上用 Mathematica 4.1 软件,用文献 [7] 中 (7) 式、本文中 (11) 式、Collins 公式 (1) 式 (数值积分取 500 点) 计算,所用机时比为 1:20:48。由此可见,使用本文中的方法有兼顾计算机时和计算精度的显著优点。

3 结束语

通过用傅里叶级数与复高斯函数之和的乘积对硬边光阑窗口函数进一步拟合,将平顶高斯光束通过含有硬边光阑 ABCD 光学系统的近似算法作了改进。给出了数值计算例,并与直接积分 Collins 公式和使用 Wen 方法的结果作了比较,计算结果证实了本文中提出改进的方法的优点。

参 考 文 献

- [1] COLLINS S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. J O S A, 1970, 60: 1168~1177.
- [2] BAGNIV, BORGHIR, GORIF. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beams [J]. J O S A, 1996, A13 (7): 1385~1394.
- [3] SANTARSIERO M, AIELLO D, BORGHIR. Focusing of axially symmetric flattened Gaussian beams [J]. J Modern Opt, 1997, 44: 633~650.
- [4] LÜB D, ZHANG B, LUO S R. Far-field distribution, M^2 -factor, and propagation of flattened Gaussian beams [J]. Appl Opt, 1999, 38 (21): 4581~4584.
- [5] WEN J J, BREAZEALE M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. J Acoust Soc Amer, 1988, 83: 1752~1756.
- [6] 王喜庆,梁国栋,吕百达. 高斯光束通过有硬边光阑 ABCD 光学系统的近似解析传输公式 [J]. 强激光与粒子束, 2001, 13 (4): 418~421.
- [7] 罗时荣,吕百达. 平顶高斯光束在有光阑光学系统中的传输 [J]. 中国激光, 2002, 29 (5): 425~428.
- [8] GORIF. Flattend Gaussian beams [J]. Opt Commun, 1994, 107: 335~341.
- [9] ERDELYIA. Tables of Integral Transforms [M]. New York: McGraw-Hill, 1954, 1: 185; 2: 13.