文章编号: 1001-3806(2005)01-0068-04

部分相干平顶光束的 M^2 因子、模分解及合成

文 侨,张 彬*
(四川大学 电子信息学院,成都 610064)

摘要: 推导出以模式间相互独立的厄米-高斯光束为基底的部分相干平顶光束的模系数和 M^2 因子的解析式,对部分相干平顶光束的模分解及合成进行了研究。研究结果表明,随着光束阶数 M 及表征光束相干性的参数 w_0/ν_0 的增加,基模的份额减小,M^2 因子增大。采用模式间相互独立的厄米-高斯光束叠加的方法合成部分相干平顶光束的光强矩形分布与光束 M^2 因子二者无法同时兼顾,即若要求空间分布非常接近矩形,则光束的 M^2 因子较大,若要求光束的 M^2 因子较小,则只能降低对光强矩形分布的要求。在实际工作中,可以通过选择恰当的基底基模高斯光束的束腰尺寸以及控制各模式的光功率,由模式间相互独立的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束。

关键词: 部分相干平顶光束;M^2 因子;模系数;权重因子;模分解;光束合成
中图分类号: TN241　　**文献标识码**: A

M^2-factor, mode decomposition and beam combining of partially coherent flat-topped beams

WEN Qiao, ZHANG Bin
(College of Electronics Information, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The analytical expressions for the mode coefficients and M^2-factor of partially coherent flat-topped beams which can be combined by independent Hermite-Gaussian beams have been derived. The mode decomposition and mode composition of partially coherent flat-topped beams have been analyzed. The basis Gaussian mode decreases and the M^2-factor increases with the beam order M and the parameter w_0/ν_0 increasing. The M^2-factor and the rectangular shape of the flat-topped beams combined by the independent Hermite-Gaussian beams can not be obtained at the same time. If an approach rectangular shape of the intensity distribution of partially coherent flat-topped beams is desired, the M^2-factor must be large. If the small value of M^2-factor is required, the strictly rectangular shape of the intensity distribution can not be obtained. In many practical cases, the partially coherent flat-topped beams can be combined by the superposition of the independent Hermite-Gaussian beams with the proper choice of the beam waist and the power content.

Key words: partially coherent flat-topped beams; M^2-factor; mode coefficients; weighting factors; mode decomposition; beam combining

引 言

众所周知,光束传输 M^2 因子是描述激光束的重要参数之一,在某些实际应用中可以作为判断光束质量优劣的参数,具有十分重要的研究价值。由于 M^2 因子与模系数之间存在一定的联系[1],因此,可将 M^2 因子的求解转化为求模系数。由于大多数高功率激光器输出的激光通常具有复杂的多模结构,且具有部分相干性。在许多实际应用中,高功率激光器输出的多模光束可由非相干的厄米-高斯光束或拉盖尔-高斯光束叠加而成。由于作为基底的光束的模式间相互独立,从而导致了所叠加而成的光束为部分相干光束[2]。此时,叠加产生的部分相干光束的相干性与光束的束腰宽度 w_0 和作为基底的厄米-高斯光束或拉盖尔-高斯光束的光束参数 ν_0 的比值 w_0/ν_0 有关。目前,求模系数的方法有多种[3~5],其中,以 GORI等人[5]提出的方法最为简单,它巧妙地运用了傅里叶变换,根据已知的光强分布便可方便地求出模系数,从而进一步确定由厄米-高斯光束或拉盖尔-高斯光束叠加而成的部分相干光束中各模式所占的份额,即相应的权重因子。在此基础上,根据求得的各模式的权重因子,通过适当控制各模式的份额,便可合成具有特定光强分布的部分相干光束。在强激光的许多实际应用中,例如,激光材料加工和激光核聚变中,常要求空间均匀分布的平顶光束,而这类光束通常又具有部分相干性。作

基金项目:国家自然科学基金资助项目 (60108004)
作者简介:文 侨 (1980-),男,硕士研究生,现从事激光技术与激光物理方面的研究。
* 通讯联系人。E-mail: zhangbinff@sohu.com
收稿日期:2003-12-15;收到修改稿日期:2004-03-30

者根据 GORI等人提出的方法,利用 LI[6]最近提出的平顶光束 (FTB)模型,推导出部分相干平顶光束的模系数和 M^2 因子的解析式,在此基础上,对部分相干平顶光束的模分解进行了研究,即由给定的 M^2 因子计算模系数、模结构和权重因子,并对各模式的归一化模系数 (权重因子)和 M^2 因子之间的关系进行了分析,由此得到了由模式间相互独立的厄米-高斯光束所合成的部分相干平顶光束的光束形状与光束 M^2 因子之间的制约关系,并进一步说明了在实际工作中,如何使用该方法合成光强分布为平顶分布的部分相干光束。

1　部分相干平顶光束的 M^2 因子及模系数

根据 LI[6]最近提出 FTB模型,在一维直角坐标下,部分相干平顶光束的光强分布可以表示为:

$$I(x) = I_0\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}\exp\left[-(m+m')\beta\frac{x^2}{w_0^2}\right] \tag{1}$$

式中,I_0 是正常数,M 为部分相干平顶光束的阶数,w_0 是光束的束腰宽度。α_m,$\alpha_{m'}$ 和 β 分别为二项展开系数和比例系数,即:

$$a_t = (-1)^{t+1}\frac{M(M-1)\cdots(M-t-1)}{t!}\quad (t = m, m') \tag{2}$$

$$\beta = \sum_{t=1}^{M}\frac{\alpha_t}{t}\quad (t = m, m') \tag{3}$$

图 1中给出了部分相干平顶光束阶数 M 取不同值时的光强分布。从图 1可以看出,随着阶数 M 的增大,光强分布的形状越接近矩形。当 $M=1$时,部分相干平顶光束在 $z=0$处的分布可化简为部分相干高斯光束。

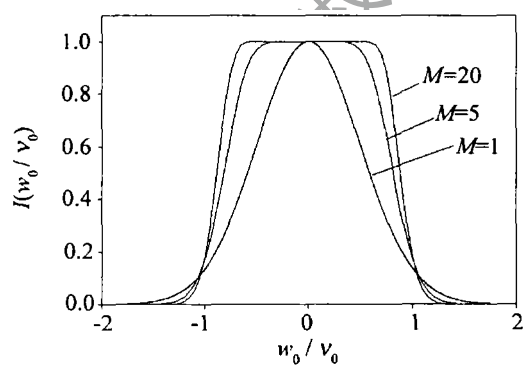

Fig 1　The intensity distribution of partially coherent flat-topped beams

另一方面,部分相干平顶光束可以认为是由非相干厄米-高斯光束叠加而成,即:

$$I_0\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}\exp\left[-(m+m')\beta\frac{x^2}{w_0^2}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n\Phi_n^2(x) \tag{4}$$

式中,c_n 为模系数,$\Phi_n(x)$为直角坐标系下第 n阶厄米-高斯光束的归一化场振幅:

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi\nu_0^2}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{\nu_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\nu_0^2}\right) \tag{5}$$

式中,ν_0 是作为基底的厄米-高斯光束的光束参数 (作为基底的基模高斯光束的光束宽度)。由于 $\Phi_n^2(x)$不是正交归一化,很难直接由 (4)式求出模系数 c_n。然而,对 $\Phi_n^2(x)$做傅里叶变换,即:

$$\mathbf{F}\{\Phi_n^2(x;\nu_0)\}(p) = \Psi_n(\pi^2\nu_0^2p^2) = L_n(\pi^2\nu_0^2p^2)\exp(-\pi^2\nu_0^2p^2/2) \tag{6}$$

式中,L_n 是第 n阶拉盖尔多项式,p是空间频率。(6)式表明,虽然在整个空间频率域 (即整个 p轴)不是正交归一,但考虑变量为 p^2 时,在空间频率域的正半轴 (即 $p>0$半轴)将是正交归一的。因此,对 (4)式两端进行傅里叶变换,然后,利用拉盖尔-高斯函数的正交归一性,运用正交模系展开法可计算得到模系数[5]。为此,利用公式[7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = \sqrt{2\pi}\,a \tag{7}$$

对 (4)式左端进行傅里叶变换,得到:

$$\hat{I}(p) = \sqrt{\pi}I_0\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\left\{\alpha_m\alpha_{m'}\left[\frac{w_0^2}{(m+m')\beta}\right]^{1/2}\times\exp\left[\frac{-\pi^2p^2w_0^2}{(m+m')\beta}\right]\right\} \tag{8}$$

于是,对 (4)式两端进行傅里叶变换,并利用正交模系展开法可得到部分相干平顶光束的模系数为:

$$c_n = 2\pi^2\nu_0^2\int_0^{+\infty}\hat{I}(p)\Psi_n(\pi^2\nu_0^2p^2)p\,dp = \sqrt{\pi}I_0w_0\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\left\{\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-1/2}\times\frac{2\nu_0^2(m+m')\beta}{2w_0^2+\nu_0^2(m+m')\beta}\left[\frac{2w_0^2-\nu_0^2(m+m')\beta}{2w_0^2+\nu_0^2(m+m')\beta}\right]^n\right\} \tag{9}$$

计算中运用了积分公式[7]:

$$\int_0^{\infty}\exp(-pt)L_n(t)\,dt = (p-1)^n p^{-(n+1)} \tag{10}$$

由于 $\left|\frac{2w_0^2-\nu_0^2(m+m')\beta}{2w_0^2+\nu_0^2(m+m')\beta}\right|<1$,根据无穷等比数列求和公式,可得:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n = \sqrt{\pi}I_0w_0\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-1/2} \tag{11}$$

利用 (9)式和 (11)式,可求得模权重因子 (归一化模系数)为:

$$\lambda_n = c_n/\sum_{n=0}^{+\infty}c_n = \sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\left\{\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-1/2}\times\frac{2\nu_0^2(m+m')\beta}{2w_0^2+\nu_0^2(m+m')\beta}\left[\frac{2w_0^2-\nu_0^2(m+m')\beta}{2w_0^2+\nu_0^2(m+m')\beta}\right]^n\right\}\Big/$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-1/2} \tag{12}$$

在模式相互独立的情况下,根据 Siegman给出的多模激光的 M^2 因子公式[8]:

$$M^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\lambda_n \tag{13}$$

并运用级数求和公式:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2} \quad |x| < 1 \tag{14}$$

经计算可得部分相干平顶光束的 M^2 因子:

$$M^2 = \frac{2\dfrac{w_0^2}{\nu_0^2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-3/2}}{\sum_{m=1}^{M}\sum_{m'=1}^{M}\alpha_m\alpha_{m'}[(m+m')\beta]^{-1/2}} \tag{15}$$

分析 (15)式可知,部分相干平顶光束的 M^2 因子不仅与阶数 M 有关,而且还依赖于光束的相干性 (由 w_0/ν_0 确定)。当 $M=1$时, (15)式可化简为:

$$M^2 = \frac{w_0^2}{\nu_0^2} \tag{16}$$

此时,M^2 因子完全由光束的相干性确定,这与文献 [9]中的结果是完全一致的。

2 部分相干平顶光束的模分解与合成

根据文献 [2]可知,模权重因子 λ_n 应为非负值,其物理意义表示各模式所占的权重。当阶数 M 确定后,根据 (12)式可知,w_0/ν_0 只要大于一定的值即可满足 λ_n 为非负值的条件。由 (12)式和 (15)式可知,当 M,M^2 因子给定时,可选择出满足条件的 w_0/ν_0,并能进一步计算出各模式所占的权重,具体步骤如下: (1)当阶数 M 确定后,根据 (12)式通过计算机数值计算,可选择满足模权重因子 λ_n 应为非负值这一条件的 w_0/ν_0,然后利用 (15)式计算此时所对应的 M^2 因子; (2)若计算得到的 M^2 因子小于所需的 M^2 因子,通过逐渐增加 w_0/ν_0 的值就可以找到所满足条件的 w_0/ν_0,并通过 (15)式进一步计算出各模式所占的权重; (3)若计算得到的 M^2 因子大于所需的 M^2 因子,无法通过模式间相互独立的厄米-高斯光束合成该给定光束质量和光强分布的光束。

典型计算结果如表 1所示,表中只列出了 $\lambda_n \geqslant 2\%$的结果。由表 1可知,随着 M^2 因子的增大,对于相同的阶数 M,基模所占的份额减小,高阶模所占的份额增大,各模式分布更加趋于均匀。对于相同的 M^2 因子,存在多组阶数 M 和参数 w_0/ν_0 与之对应,其中,阶数 M 表征部分相干光束的光强分布形状,参数 w_0/ν_0 表征部分相干光束的相干性。M^2 因子随着阶数的 M 及参数 w_0/ν_0 的增加而增大。进一步分析表 1可知,即使对于相同的 M^2 因子,随着阶数 M 的增大及参数 w_0/ν_0 的减小,各模式的模系数也不相同,中间阶的模所占的份额逐渐增加,而高阶和低阶模所占份额逐渐减小,所占份额最大模式的阶数逐渐向高阶移动。一般来说,光强分布或者光束相干性的变化,都会使 M^2 因子发生改变,但如果两者能同时和谐地变化,M^2 因子亦可保持不变。从表 1中还可以看出,表征光束相干性的参数 w_0/ν_0 对 M^2 因子的影响要远比表征光强分布的阶数 M 大。这意味着对部分相干光而言,对光束特性影响较大的参数是光束的相干性,而并非光强分布的形状。

Table 1 The numerical result of the mode decomposition of partially coherent flat-topped beams

M^2	M	w_0/ν_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5 /%	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}
3.321	1	1.8223	46.3	24.9	13.3	7.2	3.9	2.1						
	2	1.8162	36.5	32.6	17.9	7.9	3.2							
	3	1.8000	32.6	34.2	21.9	8.2	2.2							
5.376	1	2.3186	31.4	21.5	14.8	10.1	7.0	4.8	3.3	2.2				
	3	2.2902	19.6	22.8	21.1	15.5	9.7	5.5	2.9					
	5	2.2600	17.2	21.2	18.5	11.3	5.4	2.2						
10.135	1	3.1835	18.0	14.7	12.1	9.9	8.1	6.7	5.5	4.5	3.7	3.0	2.5	2.0
	3	3.1446	9.9	11.4	12.3	12.2	11.3	9.8	8.1	6.4	5.0	3.8	2.8	2.0
	5	3.1031	8.6	9.8	11.3	12.3	12.3	11.3	9.5	7.5	5.6	3.9	2.7	
	10	3.0500	7.8	8.7	10.0	11.6	12.9	13.0	11.6	9.0	6.3	4.0	2.3	

图 2中给出了满足 λ_n 为非负值条件的 w_0/ν_0 最小值及相应的 M^2 因子随阶数 M 的变化曲线。从图中得知,随着 M的增加,满足 λ_n为非负值条件的 w_0/ν_0 的最小值也增大,相应的 M^2 因子也随之增大。进一步分析图 2可知,满足 λ_n 为非负值条件的 w_0/ν_0 的最小值随着 M 的增大而增大的程度逐渐缓慢。这主要

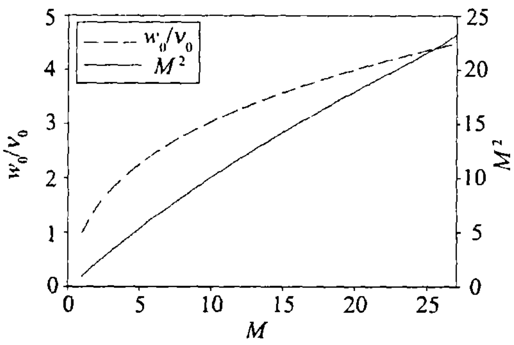

Fig 2　The minimum value of w_0/v_0 and the corresponding M^2-factor that meet the condition for different M

是由于文中提出的部分平顶光束模型的光强分布形状变化随着 M 的增加逐渐减小的缘故,通过比较图 1中 M 分别等于 1, 5, 20时光强分布形状的改变情况即可知。然而,相应的 M^2 因子几乎是随着阶数 M 的增大而线性单调增加。

光束模分解的逆问题则是光束合成问题,即如何由不同模式的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束。从光束合成的角度仔细分析图 2可以得出一个非常有用的结论:当采用模式间相互独立的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束时,合成光束的光强分布形状越接近矩形,则相应的 M^2 因子越大。由此可见,采用模式间相互独立的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束的方法,所合成光束的光强矩形分布与光束的 M^2 因子无法兼顾。若要求空间分布非常接近矩形,则光束的 M^2 因子较大,若要求光束的 M^2 因子较小,则只能降低对光强矩形分布的要求。在实际工作中,可以通过选择恰当的基底光束的束腰尺寸以及控制各模式的光功率,由模式间相互独立的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束。具体来说,首先,根据所需要合成光束的光强分布形状及光束的 M^2 因子,按照上述的模式权重因子的计算步骤得到基底光束的束腰尺寸及各模式所占的权重。其次,采用适当的选模技术,并合理地选择激光谐振腔的参数来产生所需要的不同模式的厄米-高斯光束。最后,根据各模式所占的权重调整不同模式厄米-高斯光束的功率,并将不同模式的厄米-高斯光束进行叠加,即可获得所需要的部分相干平顶光束。例如,若要合成平顶阶数 $M=3$、束腰尺寸 $w_0=18$mm, $M^2=3.321$、光功率为 100W 的部分相干平顶光束,可按照上述步骤计算得到 TEM_{00}, TEM_{01}, TEM_{02}, TEM_{03}, TEM_{04}, TEM_{05} 模的权重分别为 32.6%, 34.2%, 21.9%, 8.2%, 2.2%, 0.6%,相应模式的束腰尺寸分别为 10mm, 17.3mm, 22.4mm, 26.5mm, 30.0mm, 33.2mm。通过激光谐振腔参数的选择和选模技术的应用,则可获得光功率分别为 33W, 34W, 22W, 8W, 2W, 1W的 TEM_{00} ～ TEM_{05} 模光束。由于这些光束是由不同的激光谐振腔产生,因此,模式间是相互独立的,若将这些光束在空间上简单地叠加,便可得到所要合成的部分平顶光束。

3 结　论

采用 LI最近提出的平顶光束 (FTB)模型,给出了光强分布为平顶形状的部分相干光束模型。在此基础上,推导出部分相干平顶光束的模系数和 M^2 因子的解析式,并分析了各模式的权重因子和 M^2 因子之间的关系。研究的结果表明,部分相干平顶光束的 M^2 因子随着光束阶数 M 和表征光束相干性的参数 w_0/v_0 的增加而增大,光束的相干性 (w_0/v_0) 对 M^2 因子的影响要比光束阶数 M 大。由模式间相互独立的厄米-高斯光束合成部分相干平顶光束,当合成光束的光强分布形状越接近矩形,相应的 M^2 因子越大。因此,采用作者提出的方法合成部分相干平顶光束时,合成光束的矩形光强分布与光束 M^2 因子无法兼顾,若要求空间分布非常接近矩形,则光束的 M^2 因子较大,若要求光束的 M^2 因子较小,则只能降低对光强矩形分布的要求。对于光强分布不同的激光束,即使 M^2 因子相同,相应的模系数也不同;同样地,对于相干性不同的激光束,即使 M^2 因子相同,相应的模系数也不同。因此,可以通过由模式间相互独立的厄米-高斯光束合成光强分布一定,但光束相干性不同的部分相干光;也可以同样的合成光束相干性一定,但光强分布形状不同的部分相干光。问题的关键在于控制不同模式所占的份额。

参 考 文 献

[1] DU K M, HERZIGER G, LOOSEN P *et al.* Coherence and intensity moments of laser light [J]. Opt & Quant Electron, 1992, 24 (9): 1081～1093.

[2] GASE R. The multimode laser radiation as a Gaussian-Schell model beam [J]. J Mod Opt, 1991, 38 (6): 1107～1115.

[3] TURUNEN J, TERVONEN E, FRIBERG A T. Coherence theoretic algorithm to determine the transverse-mode structure of laser [J]. Opt Lett, 1989, 14: 627～629.

[4] BORGHI R, SANTARIERO M. Modal decomposition of partially coherent flat-topped beams produced by multimode laser [J]. Opt Lett, 1998, 23: 313～315.

[5] GORI F, SANTARSIERO M, BORGHI R. Intensity-based modal analysis of partially coherent beams with Hermite-Gaussian modes [J]. Opt Lett, 1998, 23 (13): 989～991.

[6] LI Y J. New expressions for flat-topped light beams [J]. Opt Commun, 2002, 206: 225～234.

[7] ERDELYI A, MAGNUS W, OBENHETTINGER F *et al.* Table of integral transforms [M]. New York: McGraw-Hill, 1954. 15.

[8] SIEGMAN A E. New developments in laser resonators [J]. SPIE, 1990, 1224: 6～9.

[9] 楚晓亮,张　彬. 部分相干高斯光束的 M^2 因子及模系数 [J]. 强激光与粒子束, 2000, 12 (6): 670～672.