

文章编号: 1001-3806(2004)06-0670-03

菲涅耳近似对硬边光阑衍射光束的适用性

王明灼^{1,2}, 段开棕³, 吕百达^{1,3}

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064; 2. 自贡师范高等专科学校 理化系, 自贡 643000; 3. 华中科技大学 激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘要: 使用基尔霍夫衍射积分公式和菲涅耳衍射积分公式对高斯光束通过方孔光阑的衍射进行了研究。给出了详细的数值计算结果并作了比较。研究表明, 对一给定的束腰宽度 w_0 , 当 w_0 远大于波长 λ 时, 菲涅耳衍射的有效范围与截断参数 δ 有关; 若 w_0 与 λ 可比拟甚至更小时, 则必须使用基尔霍夫衍射积分公式。

关键词: 基尔霍夫衍射; 菲涅耳衍射; 硬边光阑; 高斯光束

中图分类号: TN012; O435 文献标识码: A

Validity of the Fresnel approximation for hard edged diffracted beams

WANG Ming-zhuo^{1,2}, DUAN Kai-liang³, LI Bai-da^{1,3}

(1. Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2. Department of Physics and Chemistry, Zigong College, Zigong 643000, China; 3. National Laboratory of Laser Technology, HUST, Wuhan 430074, China)

Abstract: The diffraction of Gaussian beams at an square aperture is studied based on the Kirchhoff and Fresnel diffraction integrals. Detailed numerical results are presented and compared. It is shown that for a given waist width w_0 ($w_0 \gg \lambda$, λ is wavelength), the valid range of the Fresnel diffraction integral depends on the truncation parameter. Otherwise, if the waist width w_0 is comparable to or even less than the wavelength λ , the Kirchhoff diffraction integral should be used.

Key words: Kirchhoff diffraction; Fresnel diffraction; hard edged aperture; Gaussian beam

引 言

菲涅耳衍射积分及其推广形式——Collins 公式是激光光学中研究光束传输变换广为使用的基本公式^[1]。然而, 仅在菲涅耳积分公式适用条件, 即近轴近似下, 这些公式才能得出与实验相符的正确结果。许多学者对高斯光束的非近轴传输和近轴近似成立的条件已进行了深入研究^[2~4], 但对有光阑情况下菲涅耳衍射积分的适用性涉及甚少。作者使用基尔霍夫衍射积分公式和菲涅耳衍射积分公式对受硬边光阑衍射高斯光束的光强分布作了详细的计算分析, 得出了菲涅耳近似的适用条件。

1 高斯光束通过方孔的衍射

设直角坐标系 (x, y, z) 下, $z = 0$ 面处有初始场分布为:

$$E_0(x_0, y_0, 0) = \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \quad (1)$$

高斯光束入射到边长为 $2a$ 的方孔光阑上, 式中, x_0, y_0 为在 $z = 0$ 面的光阑孔内任意点坐标, w_0 为高斯光束的束腰宽度, 光束通过光阑后在 z 处的光场分布由基尔霍夫衍射积分公式描述:

$$E_K(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-a}^a \int_{-a}^a E_0(x_0, y_0, 0) \times \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1 + \cos\theta}{2} dx_0 dy_0 \quad (2)$$

式中, $r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 是 $(x_0, y_0, 0)$ 点到 (x, y, z) 点的距离, $\cos\theta = z/r$, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长。(2) 式为标量衍射理论的基本公式, 对非近轴标量光束也是适用的。当菲涅耳近似成立, 即衍射面与观察面间距离远大于衍射孔径和观察区线度时, (2) 式化为熟知的菲涅耳衍射积分公式:

$$E_F(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-a}^a \int_{-a}^a E_0(x_0, y_0, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 \quad (3)$$

(3) 式是在近轴光学中普遍使用的公式。

作者简介: 王明灼(1950), 男, 副教授, 现从事激光光学的科研与教学工作。

E-mail: wms@zgc.edu.cn

收稿日期: 2003-10-20; 收到修改稿日期: 2004-03-15

2 矩孔光阑衍射的计算及光强误差分析

引入菲涅耳数 $F = a^2/\lambda$, 将(1)式代入(2)式和(3)式并令 $y = 0$, 得:

$$I_K(x, 0, z) = |E_K(x, 0, z)|^2 = \left| \frac{1}{i\lambda} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \frac{\exp(ikr)}{2r} \left(1 + \frac{a^2}{\mathcal{N}r}\right) dx_0 dy_0 \right|^2 \quad (4)$$

$$I_F(x, 0, F) = |E_F(x, 0, F)|^2 = \pi^2 \exp\left[-\frac{2k^2 w_0^2 \mathcal{N}x}{4a^2 + k^2 w_0^4 \mathcal{N}}\right] \left| (-1)^{3/4} w_0^2 \operatorname{erf}\left[\frac{(-1)^{3/4} a \eta^2}{\xi}\right] \times \frac{\operatorname{erf}(-1)^{3/4} (a \eta^2 - k w_0^2 x) / \xi}{k w_0^2 \lambda + 2ia^2/F} - \operatorname{erf}(-1)^{3/4} (-a \eta^2 - k w_0^2 x) / \xi \right|^2 \quad (5)$$

式中, $\xi = w_0 \sqrt{[2a^2/(\mathcal{N})][2ia^2/(\mathcal{N}) + k w_0^2]}$, $\eta = \sqrt{k w_0^2 + 2ia^2/(\mathcal{N})}$ 。

(4)式和(5)式分别为用基尔霍夫和菲涅耳衍射积分公式计算出硬边光阑衍射高斯光束在 $F = \text{const}$ 处 x 方向的光强分布, 计算例见图 1。截断参数 δ

$= a/w_0 = 1$, 虚线表示菲涅耳衍射光强 I_F , 实线表示基尔霍夫衍射光强 I_K 。

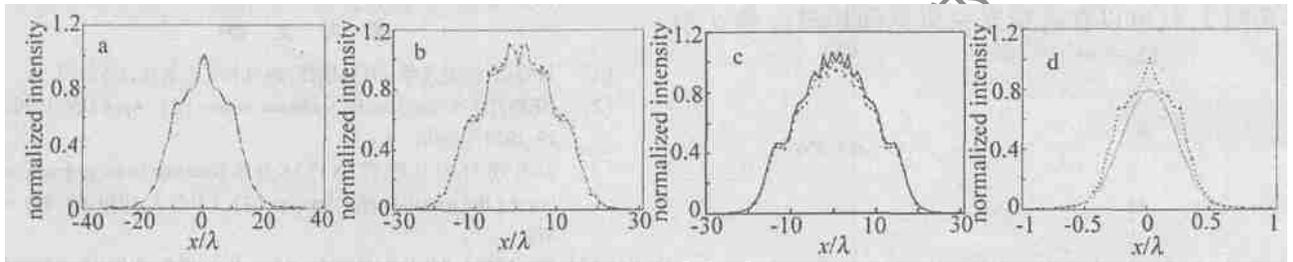


Fig. 1 Transversal intensity distributions of a Gaussian beam diffracted at an aperture

a- $w_0 = 20\lambda$, $a = w_0$, $F = 3$ b- $w_0 = 20\lambda$, $a = w_0$, $F = 6$ c- $w_0 = 20\lambda$, $a = w_0$, $F = 9.4$ d- $w_0 = 0.5\lambda$, $a = w_0$, $F = 3$

当束腰宽度远大于波长($w_0 = 20\lambda$), 并且 $\delta = 1$ ($w_0 = 0.5\lambda$) 时, 近轴近似失效, 用(4)式、(5)式计算 $F = 3$ 时, 由(4)式、(5)式得到相同计算结果见图 1a; 但当 $F \geq 6$ 时, 两曲线出现差异, 见图 1b 和图 1c; 而当束腰宽度与波长相比拟甚至小于波长

时, 近轴近似失效, 用(4)式、(5)式计算出的结果相差甚大, 见图 1d。由图可见, 在轴上 ($x = y = 0$) 光强相差最大。在(4)式、(5)式中令 $x = 0$, 得轴上光强计算公式为:

$$I_K(0, 0, F) = |E_K(0, 0, F)|^2 = \left| \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \frac{\exp\{ik \sqrt{[a^2/(\mathcal{N})]^2 + x_0^2 + y_0^2}\}}{2 \sqrt{[a^2/(\mathcal{N})]^2 + x_0^2 + y_0^2}} \times \left\{ 1 + \frac{a^2/(\mathcal{N})}{\sqrt{[a^2/(\mathcal{N})]^2 + x_0^2 + y_0^2}} \right\} dx_0 dy_0 \right|^2 \quad (6)$$

$$I_F(0, 0, F) = |E_F(0, 0, F)|^2 = 4\pi^2 \left| -\frac{(-1)^{1/4} w_0^2 F}{\zeta^2} \operatorname{erf}\left[\frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}w_0} \zeta\right] \operatorname{erf}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{i\sqrt{2}w_0} \zeta\right] \right|^2 \quad (7)$$

式中, $\zeta = \sqrt{2ia^2 + kFw_0^2 \lambda}$ 。

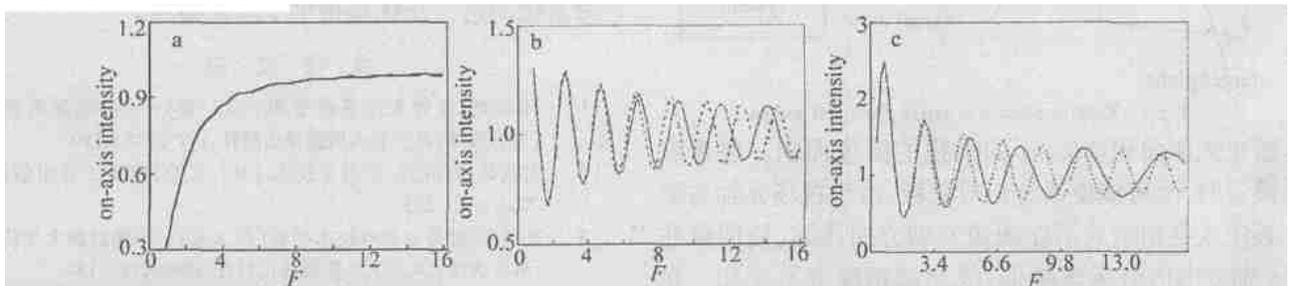


Fig. 2 On-axis intensity distributions of a Gaussian beam diffracted at an aperture

a- $w_0 = 20\lambda$, $\delta = 2.2$ b- $w_0 = 20\lambda$, $\delta = 1.0$ c- $w_0 = 20\lambda$, $\delta = 0.5$

图 2 是(6)式、(7)式计算得出的方孔光阑衍射高斯光束轴上光强分布。虚线表示菲涅耳公式计算

出的轴上光强 I_F , 实线表示基尔霍夫公式计算出的轴上光强 I_K 。由图 2a 可知, 当 $\delta > 2$ 时, 两曲线重合, 菲涅耳衍射公式是适用的, 随着 δ 的减小, 见图 2b, 特别对 $\delta = 0.5$, 见图 2c, 在菲涅耳数较大(即离光阑较近)区域, 菲涅耳衍射公式会出现较大误差。为定量研究两者在不同位置处光强分布的差别大小, 定义轴上光强相对误差 σ :

$$\sigma = |I_K(F) - I_F(F)| / I_K(F) \quad (9)$$

图 3 为相对误差取定值($\sigma = 4\%$)时, 方孔衍射高斯光束 F 数随 δ 变化的曲线图。计算参数 $w_0 = 20\lambda$ 。在图中曲线下方的区域内, 菲涅耳衍射公式是有效的, 与用基尔霍夫公式计算的结果相符。例如, 当 $\delta = 1$ 时, $F < 5.1$, 菲涅耳衍射公式适用, 而对 $\delta = 0.5$, 则应有 $F < 2.1$, 与图 2b 和图 2c 一致。利用图 3, 就可以在高斯光束束宽和相对误差 σ 给

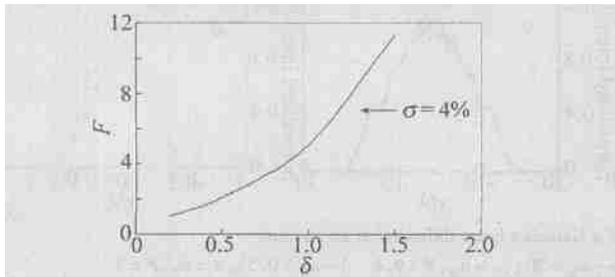


Fig. 3 Dependence of Fresnel number F on the truncation parameter δ for $\sigma = 4\%$

(上接第 669 页)

2.3 监测系统相对位置的影响

在实际测试过程中, 监测系统的视轴与目标靶的法线是不重合的, 目标靶与监测系统的视轴方向有一个夹角 α , 见图 5, CCD 靶面上实际成像面积为

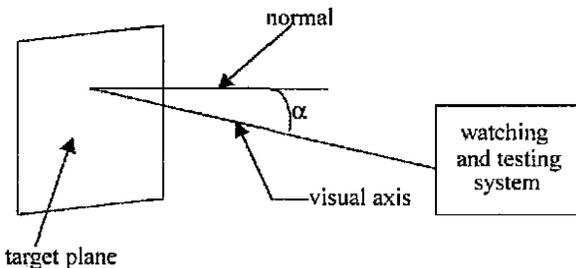


Fig. 5 Relative position of target plane and system

激光光斑面积与 $\cos\alpha$ 的乘积的图像面积。在系统设置时, 尽可能使系统正对靶板, 由于视场光轴与靶板法线夹角造成了在图像 y 轴方向压缩, 使图像在 y 轴方向的分辨率降低, 故测试精度有所变化。在系统设置时, 夹角 α 一般在 $10^\circ \sim 15^\circ$ 范围。则由此引起的最大角偏差为:

$$\delta\theta_0 = \delta\theta / \cos\alpha \quad (6)$$

当夹角 $\alpha = 15^\circ$, $\delta\theta_0 = 0.09388\text{mrad}$ 。

定时, 确定对应某一截断参数 δ , 菲涅耳衍射积分公式适用的 F 数的范围。或者反之, 确定 F 数给定时 δ 的取值范围。一般而言, δ 越大, F 数也越大, 反之亦然。

3 结 论

对高斯光束通过方孔光阑衍射作了详细计算和比较。分析表明, 当有硬边光阑时, 光强分布与束腰宽度 w_0 , 截断参数 δ 和菲涅耳数 F 有关。对某一给定 w_0 ($w_0 \gg \lambda$) 值, 菲涅耳衍射积分公式有效的菲涅耳数 F 随截断参数 δ 的增大而增加, 反之亦然。而当 $w_0 \approx \lambda$ 或 $w_0 < \lambda$ 时, 菲涅耳近似失效, 应当使用基尔霍夫公式。该研究结果对有光阑衍射的光传输计算模拟中衍射积分公式的正确选择有应用意义。

参 考 文 献

- [1] 吕百达. 激光光学 [M]. 成都: 四川大学出版社, 1992. 53.
- [2] NEMOTO S. Nonparaxial Gaussian beams [J]. Appl Opt, 1990, 29: 1940~ 1946.
- [3] AGRAWAL O P, PATTANAYAK D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation [J]. J O S A, 1979, 69: 575~ 578.
- [4] DUAN K L, LI B D. Nonparaxial analysis of far field properties of Gaussian beams diffracted by an aperture [J]. Opt Expr, 2003 (11): 1474~ 1479.
- [5] BORN M, WOLF E. Principles of optics [M]. 7th ed, Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 478.

3 结束语

通过以上分析及计算可知, 测试精度与大气传输、光学系统的设计及 CCD 都有关系, 且光学系统对其影响较大, 而 CCD 对其影响相对较小。另外, 测试精度随着测试地点和测试相对位置的不同将发生变化, 考虑到可能出现的位置, 测试精度一般不超过 0.1mrad 。由于实际测试时受诸多因素影响, 所以, 实际值与理论值可能存在一定差异, 但这一结果为系统的进一步优化提供了理论参考。

参 考 文 献

- [1] 孙再龙. 红外光电系统手册 (第 5 卷) —— 被动光电系统 [M]. 天津: 八三五八所翻译出版社, 1997. 142~ 199.
- [2] 安毓英, 刘继芳. 光电子技术 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2002. 168~ 203.
- [3] 孙再龙. 红外与光电技术手册 (第 2 卷) —— 辐射的大气传输 [M]. 天津: 八三五八所翻译出版社, 1993. 118~ 154.
- [4] 李晓彤. 几何光学和光学设计 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997. 94~ 128.
- [5] 吕海宝, 颜树华. 激光光电检测 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000. 183~ 189.