文章编号: 1001- 3806(2004)06- 0664- 03

一种变折射率光学系统光线追迹的新方法

王润轩
(宝鸡文理学院 物理系,宝鸡 721007)

摘要: 光线方程仅在系统折射率为轴对称分布及近轴近似条件下可求得解析解,而对非近轴光线,尤其是变折射率系统,只能用计算机进行光线追迹,求数值解。常用之法是 Taylor 级数展开法,可达到一定精度,但计算量相当大。变形光线方程后,对定义的新变量直接应用一种标准的数学积分技术 ——Runge- Kutta 方法,可达同样精度要求,而计算量大为减小。此法的另一好处是在于计算过程中简化了各光学平面两侧折射率的计算。在介绍 Runge- Kutta 方法的同时,给出算例以与 Taylor 级数展开法比较。

关键词: 变折射率光学;光线追迹;Runge- Kutta 方法;Taylor 方法
中图分类号: O436　　**文献标识码**: A

A new method of ray tracing in gradient index optics

WANG Run-xuan
(Department of Physics ,Baoji College of Arts & Science ,Baoji 721007 ,China)

Abstract : As to the nonlinear optical equations ,the exact analytical solutions can only be available on the condition that the refractive index of the medium is axial symmetry with the paraxial approximation. Beyond these conditions ,the analysis of the equations should resort to computer simulations. The traditional simulation based on Taylor series is a very intricate method consuming a great number of time. However ,by introducing new proper variables ,the Runge- Kutta method is an economic method on this problem. In this method ,the calculations related to the refractive index on either side of the optical planes are greatly simplified. The Runge- Kutta method is introduced and the comparisons between these two methods are also presented.

Key words : gradient index optics ;ray tracing ;Runge- Kutta method ;Taylor method

引　言

变折射率光学(gradient index optics , GRIN) 是研究光在变折射率媒质中传播和成像规律的一个老课题。由于近年来激光技术、光纤通信技术以及集成光学发展的需要,尤其是计算机技术的发展,可以用数值解法来求解光线方程,随之而来的 GRIN 系统的光线追迹, GRIN 系统的自动设计理论和算法, GRIN 系统的像质评价以及实测系统, GRIN 透镜棒的制作工艺等都蓬勃发展起来,国际间学术交流不断,专题会议频繁举行,业已形成光学领域中的专门课题。所以给它取了一个新名称: GRIN 成像光学。众所周知,光线方程仅对系统折射率为轴对称分布且在近轴近似条件下,可求得解析解,但对非近轴光线经过系统难以求得解析解,只能用计算机进行光线追迹,求数值解。光线追迹便成为 GRIN 光学的基础[1]。作者由 Lagrange 方程导出光线方程,改变其形式,定义新变量,采用 Runge- Kutta 算法[2]直接求解变形的光线方程,给出结果和实例以与常用的 Taylor 展开法比较,达到精度要求而计算量小,不失为 GRIN 系统光线追迹的新方法[3]。

基金项目:陕西省教育厅专项基金资助项目(04JK121)
作者简介:王润轩(1953-) ,男,副教授,主要从事非线性全光通信研究。
E-mail:wangrunxuan2001 @eyou. com
收稿日期:2003- 11- 20;收到修改稿日期:2004- 04- 02

1　GRIN 光学的理论模型

Hamilton 光学中的 Largrange 方程为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}(\partial L/\partial \dot{x})/\mathrm{d}z = \partial L/\partial x \\ \mathrm{d}(\partial L/\partial \dot{y})/\mathrm{d}z = \partial L/\partial y \end{cases} \quad (1)$$

把光学 Lagrange 函数:

$$L = n(x,y,z)(1+\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2} \quad (2)$$

代入(1)式,并把光线的空间轨迹方程记作: $x = x(z)$, $y = y(z)$,则光线的弧元 $\mathrm{d}s$ 写为:

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} = dz(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} \tag{3}$$

整理可得：

$$d(n dx/ds)/ds = \partial n/\partial x \tag{4}$$

$$d(n dy/ds)/ds = \partial n/\partial y \tag{5}$$

$$d(n dz/ds)/ds = \partial n/\partial z \tag{6}$$

(4) 式～(6) 式写成矢量式，如下：

$$d(n d\mathbf{r}/ds)/ds = \nabla n \tag{7}$$

这便是通常的光线方程，其实质是光线传播轨迹的微分方程，而今作为 GRIN 光学的理论基础，给出初始条件，原则上就可求出光线的传播轨迹。

2　GRIN 系统的光线追迹

上述光线方程一般难以求得解析解，但对一些折射率为轴对称分布的系统，在近轴近似条件下，可求得解析解。这些近轴光线都交于一点，形成完善的像。但是非近轴光线经过系统后不交于近轴像点，形成像差，这些非近轴光的解析解难以求得，但可用电子计算机进行光线追迹、求数值解，至此光线追迹便成为系统设计的基础。

所谓光线追迹，是指对过定点的一条光线(给定空间坐标和方向余弦)，求出满足光线方程 $d(n d\mathbf{r}/ds)/ds = \nabla n$ 的邻近点的光线坐标(空间坐标和方向余弦)。常用的方法是把光线的空间坐标矢量 $\mathbf{r}$ 在起始点 p_0 附近按光线的弧长展开成 Taylor 级数：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0) + \left.\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|_{s=s_0}\Delta s + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|_{s=s_0}(\Delta s)^2 + \cdots \tag{8}$$

再把 $d\mathbf{r}/ds$ 作类似展开：

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|_{s=s_0} + \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|_{s=s_0}\Delta s + \cdots \tag{9}$$

式中，$d\mathbf{r}/ds$ 表示光线的切向单位矢量，以 τ 表示；$d^2\mathbf{r}/ds^2$ 表示光线的法向单位矢量，以 $\mathbf{k}$ 表示。于是有：

$$\mathbf{k} \cdot \tau = 0 \tag{10}$$

(9) 式可写成：

$$\tau(s) = \tau(s_0) + \mathbf{k}(s_0)\nabla s_0 + \cdots \tag{11}$$

光线方程可写成：

$$(dn/ds) \cdot (d\mathbf{r}/ds) + n d^2\mathbf{r}/ds^2 = \nabla n \tag{12}$$

即

$$\tau dn/ds + n\mathbf{k} = \nabla n \tag{13}$$

由 (12) 式两边点乘以 τ 得：

$$dn/ds = \tau \cdot \nabla n \tag{14}$$

由 (13) 式和 (14) 式可得：

$$\mathbf{k} = [\nabla n - \tau(\tau \cdot \nabla n)]/n \tag{15}$$

这样，就可求得起始点附近满足光线方程的光线坐标 $\mathbf{r}$ 及 τ。所取 Δs 越小，计算越精确。

上述方法要进行 Taylor 级数展开。为达到一定精度，要求保留项数较多，且 Δs 取得很小，计算量非常大。这里介绍一种新方法，达到一定精度，而所需计算量较小。其基本思想是把光线方程变形后，对定义的新变量直接应用标准的数学积分技术，如 Runge-Kutta 方法，求解变形的光线方程。

写出光线方程：

$$d[n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}/ds]/ds = \nabla n(\mathbf{r}) \tag{16}$$

式中，$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 为光线上某点的位置坐标，$n(\mathbf{r})$ 为折射率分布，ds 为沿光线的弧元。

该方程不便于直接积分，要改变它的形式定义新的变量 t 为：

$$t = \int\frac{ds}{n}, \quad dt = \frac{ds}{n} \tag{17}$$

于是光线方程(16) 式可写成：

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = n\nabla n \tag{18}$$

或

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \nabla n^2/2 \tag{19}$$

定义光线矢为：

$$\mathbf{T} = d\mathbf{r}/dt \tag{20}$$

显然，有：

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = n\frac{d\mathbf{r}}{ds} = n\frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{i}} + n\frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{j}} + n\frac{dz}{ds}\hat{\mathbf{k}} = n\cos\alpha\mathbf{i} + n\cos\beta\mathbf{j} + n\cos\gamma\mathbf{k} \tag{21}$$

式中，α, β, γ 分别是光线矢与 x, y, z 轴的夹角，所以光线矢 $\mathbf{T}$ 的 3 个分量是 3 个光线方向的余弦。用 Runge-Kutta 方法进行数值积分，求解 (19) 式的计算量如同求解一阶微分方程的计算量一样少。

此方法还有一个好处，在计算过程中，可同时求得 $\mathbf{T}$，这就简化了各个光学表面两侧折射率的计算。

把折射定律用光线矢表示为：

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + b\mathbf{v} \tag{22}$$

式中，$\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ 分别为折射前后的光线矢，$\mathbf{v}$ 为折射点处的光学表面的法向单位矢。b 为一与折射点处的入射角及折射前后的折射率有关的系数。上式两边都点乘 $\mathbf{v}$，可求得 b：

$$b = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{v} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = [n'^2 - n^2 + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})^2]^{1/2} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = [n'^2 - n^2 + n^2\cos^2\theta]^{1/2} - n\cos\theta \tag{23}$$

式中，θ 为折射点处的入射角，n, n' 分别为折射前后的折射率。

定义 3 个列矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{bmatrix},$$

$$D = n\begin{bmatrix} \partial n/\partial x \\ \partial n/\partial x \\ \partial n/\partial z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial n^2/\partial x \\ \partial n^2/\partial y \\ \partial n^2/\partial z \end{bmatrix} \tag{24}$$

(19)式写成矩阵形式:

$$d^2 R/dt^2 = D(R) \tag{25}$$

于是,给定初始条件 $R_0(x_0, y_0, z_0)$ 及 $T_0(T_{0x}, T_{0y}, T_{0z})$,由 (R_0, T_0) 可相继求得 (R_1, T_1), (R_2, T_2), (R_n, T_n)。根据 Runge-Kutta 算法,追迹光线通过媒质的公式为:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + \Delta t\left[T_n + \frac{1}{6}(A + 2B)\right] \\ T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(A + 4B + C) \end{cases} \tag{26}$$

式中,

$$\begin{cases} A = \Delta t D(R_n) \\ B = \Delta t D\left(R_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot T_n + \frac{1}{8}\Delta t \cdot A\right) \\ C = \Delta t D\left(R_n + \Delta t \cdot T_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot B\right) \end{cases} \tag{27}$$

Δt 是 t 的增量,且 D 不含 t,所以,在计算时,实际 t 值无关重要,只要有 Δt 即可。Δt 的值由折射率分布及精度要求而定。显然,折射率梯度越大时,要达到一定的精度,要求 Δt 越小,这就使计算量增大。在一定精度要求下,Δt 是衡量数值计算法效率的标准。实践证明,这种方法用相当大的 Δt 值可获得足够的精度。所以此法较其它算法工作量少得多。下面举例说明此方法的精度与 Δt 的关系。

例(1):对 $n^2 = 2.5 - 0.1(x^2 + y^2)$ 棒用光线追迹法从 $z = 0$ 到 $z = 1$,各种 Δt 值的精度见表 1。此例

Table 1 $z = 1$ place of percents error margin

Δt	$z = 1$ place of percents error margin
0.05	6×10^{-10}
0.10	8×10^{-9}
0.20	1×10^{-7}
0.25	4×10^{-6}

中折射率梯度很高,如用 Taylor 级数展开,要达一定的精度,就应保留较多的项,而且 Δs 应小,所以计算量很大。

例(2):$n(z) = 1.55 - \alpha z$ 单片入射表面,出射表面处 $z = 2$,当 $\alpha = 0.02$ 时,此法计算精度达 10^{-11};当 $\alpha = 0.2$ 时,$\Delta t = 0.35$,百分误差为 10^{-7},用其它方法,要达到百分误差 10^{-7},要求 $\Delta t = 0.01$,计算量增加 35 倍。

例(3):$n(z) = 1.55 - 0.005(x^2 + y^2) + 0.022 - 0.0052^2$ 单片透镜,第 1 表面处 $z = 0$,曲率为 0.1;第 2 表面处 $z = 1.0$,曲率为 -0.06477,像面 $z = 10.615405$,起始光线平行于 z 轴交第 1 面于(0.4;0.0),用此法计算由第 1 面追到像面,精度高达 10^{-8}。

3 结束语

随着计算机技术的发展和科学技术的进步,科学与工程计算的应用范围已扩大到许多学科领域,例如,计算力学、计算物理、计算光学等等。实验、理论、计算已成为目前人们进行科学活动的 3 大方法。笔者旨在介绍 GRIN 成像光学中较为实用的计算方法,有兴趣的读者可进一步阅读参考文献[1]和参考文献[2]。在变形光线方程的基础上,定义新变量,采用 Runge-Kutta 算法直接求解变形的光线方程,给出结果和实例与常用的 Taylor 展开法比较,达到精度要求而计算量小,不失为 GRIN 系统光线追迹的新方法。该方法可用于求已知折射率分布的光学系统的点列图,还可以根据 Seidel 像差理论选择合适的初始结构,设计出最佳分布系统。

参 考 文 献

[1] 易 明. 现代几何光学 [M]. 南京:南京大学出版社,1986. 183~186.

[2] 易大义,陈道琦. 数值分析引论 [M]. 杭州:浙江大学出版社,1996. 402~408.

[3] 刘秉琦. 失调光学系统光线追迹公式 [J]. 应用光学,1996,16(2):18~22.