

文章编号: 1001-3806(2004)04-0427-04

交叉相位调制不稳定性的进一步分析

钟先琼, 李大义, 陈建国
(四川大学 光电系, 成都 610064)

摘要: 从耦合非线性薛定谔方程出发, 分析了光纤中两光波因交叉相位调制(XPM)所致的调制不稳定性(MI)产生的条件及增益谱。结果表明, 当一光波处于正常群速度色散(GVD)区, 另一光波处于反常群速度色散区时, 与两光波参数有关的扰动增益谱应有 3 种可能的形式; 在一定条件下, 在某一微扰频率范围内, 甚至还会同时出现两种形式的增益谱。

关键词: 交叉相位调制(XPM); 调制不稳定性(MI); 群速度色散(GVD); 增益谱

中图分类号: O437; TN929.11 **文献标识码:** A

Further analysis of modulation instability induced by cross phase modulation

ZHONG Xian-qiong, LI Da-yi, CHEN Jian-guo

(Department of Optoelectronics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Based on the coupled nonlinear Schrödinger equation, conditions and gain spectra of modulation instability (MI) induced by cross phase modulation (XPM) of two optical waves in the optical fiber are analyzed in detail. The results show that when one of the two optical waves propagates in the normal group velocity dispersion (GVD) regime and the other in the anomalous regime, depending on parameters of the two optical waves, perturbation gain spectra may take three possible forms. Under certain circumstances, it is even possible that there are two forms of gain spectra within certain range of perturbation frequency.

Key words: cross phase modulation (XPM); modulation instability (MI); group velocity dispersion (GVD); gain spectrum

引 言

调制不稳定是一种在许多领域中都能观测得到的物理现象。光纤中的调制不稳定性源于非线性和色散的相互作用, 这种作用可使微扰呈指数式增长, 最终使稳态传输的光变得不稳定, 在频域上表现为谱线旁瓣产生, 在时域上使连续或准连续光分裂成一系列短脉冲串。由于它在高重复率超短脉冲产生及光孤子通信中有着重要的应用价值, 人们从理论^[1-11]和实验^[3,12]上对其进行了广泛的研究。研究表明, 自相位调制(SPM)不稳定仅在光纤的反常群速度色散区出现, 而交叉相位调制既可在光纤的反常群速度色散区也可在光纤的正常群速度色散区产生。但是, 在作者已知的文献中, 对 XPM 的不稳定条件和增益谱的讨论还不是完备的。作者从同偏振不同波长的两光波所满足的非线性薛定谔方程出

发, 在只考虑二阶色散的情况下, 详细地分析了光纤中两光波所致的调制不稳定性产生的条件及增益谱, 重点分析了两光波中一光波在正常群速度色散区而另一光波在反常群速度色散区 3 种情况下的不稳定条件和增益谱。结果表明, 当一光波在正常群速度色散区, 而另一光波在反常群速度色散区时, 两光波的微扰不稳定增益谱应有 3 种可能的形式, 对应的不稳定条件与两光波参数的选取密切相关; 参数给定时, 在某一微扰频率范围内, 还出现了两种形式的增益谱。

1 数学模型及理论分析

在光纤中, 偏振相同、波长不同的两个光波的慢变振幅 A_j 满足下列传输方程^[2,3]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_j \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} =$$

$$i \gamma_j (|A_j|^2 + 2|A_{3-j}|^2) A_j \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

式中, v_g 是群速度, γ_j 是非线性系数, β_j 为二阶色散系

作者简介: 钟先琼(1969), 女, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为激光与光通信及非线性光学。

E-mail: zqxqh@263.net

收稿日期: 2003-08-11; 收到修改稿日期: 2004-01-12

数,其定义为: $\beta = d(1/v_g)/d\omega$,反映了群速度 v_g 随光波波长或频率的变化关系。需要指出的是,光纤中的色散包括模式色散、材料色散和波导色散,但对于本文中涉及到的单模光纤,则只存在材料色散和波导色散,二者的总效果可使 β 在某一波长 λ_d (即光纤的零色散波长) 处为 0,当光波长 $\lambda > \lambda_d$ 时, $\beta < 0$,该光波处于光纤的反常群速度色散区(以下简称负色散区),而 $\lambda < \lambda_d$ 时, $\beta > 0$,处于光纤的正常群速度色散区(以下简称正色散区),即群速度 v_g 在光纤零色散波长 λ_d 处为一极大值,若分别处于光纤正、负色散区的两光波波长偏离 λ_d 的量适当,则可使二光波的群速度相等^[3]。在连续(或准连续)情况下,微分方程(1)的稳态解为: $\bar{A}_j = P_j^{1/2} \exp(i\varphi_j)$, P_j 是入射光功率,非线性相移 $\varphi_j = \gamma_j(P_j + 2P_{3-j})z$ 。

为了讨论解的稳定性,在解中加入绝对值远小于 $P_j^{1/2}$ 的微扰 α_j ,于是慢变振幅变为 $A_j = (P_j^{1/2} + \alpha_j) \exp(i\varphi_j)$ 。把有扰动的慢变振幅表达式代入(1)式,线性化后得:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial z} + \frac{1}{v_{g_j}} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_j \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2} = i\gamma_j P_j (\alpha_j + \alpha_j^*) + 2i\gamma_j \sqrt{P_1 P_2} (\alpha_{3-j} + \alpha_{3-j}^*) \quad (2)$$

此微扰方程组的解可写为^[1] $\alpha_j = U_j \cos(kz - \Omega t) + iV_j \sin(kz - \Omega t)$ 的形式,其中 k 和 Ω 分别是微扰波的波数和频率,将试解代入(2)式得到色散关系:

$$[(k - \Omega/v_{g_1})^2 - f_1][(k - \Omega/v_{g_2})^2 - f_2] = C_{\text{XPM}} \quad (3)$$

式中 $f_j = 1/4\beta_j^2 \Omega^2 [\Omega^2 + \text{sgn}(\beta_j) \Omega_{c_j}^2]$, $\Omega_{c_j} = (4\gamma_j P_j / |\beta_j|)^{1/2}$, $C_{\text{XPM}} = 4\gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta_2 P_1 P_2 \Omega^4$ 。在以下两种情况下,可以忽略群速度失配(即可令 $v_{g_1} \cdot v_{g_2} = v_g$):一是当两光波处于同一色散区(正色散区或负色散区)且波长非常靠近时^[3];二是当两光波处于不同色散区(即一束在正色散区,另一束在负色散区)时,由于群速度在零色散波长处为一极大值,因此,若该两光波偏离零色散波长的量适当,也可保证两光波的群速度近似甚至完全相等^[3],也正是在 $v_{g_1} = v_{g_2}$ 的精确工作条件下,TRILLO^[13]和AFANASYEV^[14]等人发现了 XPM 对光孤子。忽略群速度失配时,可以得到(3)式的 4 个根:

$$k = \frac{\Omega}{v_g} \pm \left\{ \frac{f_1 + f_2}{2} \pm \left[\left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right)^2 + C_{\text{XPM}} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} = \frac{\Omega}{v_g} \pm \left\{ \frac{f_1 + f_2}{2} \pm \left[\left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right)^2 - (f_1 f_2 - C_{\text{XPM}}) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4)$$

由微扰 α_j 的表达式可知,若某些微扰频率 Ω 能使 k 为复数,则这些频率的扰动将呈指数式增长从而引起调制不稳定。此时,不稳定扰动的功率增益系数 $g(\Omega) = 2\text{Im}(k)$ ^[3]。

2 不稳定条件及增益谱分析

由于(4)式包含双重根号,无论哪个根号内的式子小于 0 均可使 k 为复数。当内根号里面的式子大于 0 时,对应开方后取正号和负号两种情况,功率增益有两种可能的形式:

$$g(\Omega) = g_1(\Omega) = \sqrt{2} \{ [(f_1 - f_2)^2 + 4C_{\text{XPM}}]^{1/2} - (f_1 + f_2) \}^{1/2} \quad (5)$$

$$g(\Omega) = g_2(\Omega) = \sqrt{2} \{ -[(f_1 - f_2)^2 + 4C_{\text{XPM}}]^{1/2} - (f_1 + f_2) \}^{1/2} \quad (6)$$

而当内根号里的式子小于 0 时,经复数运算后可以得到的功率增益为:

$$g(\Omega) = g_3(\Omega) = \{ -(f_1 + f_2) + 2[f_1 f_2 - C_{\text{XPM}}]^{1/2} \}^{1/2} \quad (7)$$

当两光波同处于正色散区或同处于负色散区(即 β_1 和 β_2 同号)时,(4)式内根号内的式子必然都大于 0,易得出调制不稳定条件为: $f_1 f_2 < C_{\text{XPM}}$,增益谱只能为(5)式,这与文献报道的结果一致^[1-3]。然而当一光波处于正色散区,另一光波处于负色散区(不妨设 $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$)时, $C_{\text{XPM}} < 0, f_2 > 0$,但 f_1 可正可负,于是(4)式的内根号项 $\{ [(f_1 - f_2)/2]^2 + C_{\text{XPM}} \}^{1/2}$ 不但有成为实数的可能性,而且也有成为虚数的可能性。在笔者见到的文献中,前人对调制不稳定性的讨论都是针对内根号为实数并且内根号前取负号的情况,而忽略了内根号为虚数以及内根号为实数但内根号前取正号的情况,因而这些讨论是有疏漏的,正是这些疏漏,使导出的扰动增益表达式和调制不稳定条件也有疏漏。考虑到两光波的调制不稳定条件及对应的增益谱表达式与参数的选取有复杂的关系,为简单起见,在本文中,只就 $\beta_2 = -\beta_1 > 0$ 这种特殊情况进行讨论。

要使(4)式内根号为实数,应该有:

$$[(f_1 - f_2)/2]^2 + C_{\text{XPM}} > 0,$$

$$\text{或} \quad [(f_1 + f_2)/2]^2 > f_1 f_2 - C_{\text{XPM}} \quad (8a)$$

由于假设 $\beta_2 = -\beta_1 > 0$,于是(8a)式成立条件为:

$$\Omega_{c_1}^2 + \Omega_{c_2}^2 > 4\Omega_{c_1} \Omega_{c_2} \quad (8b)$$

内根号为实数时,由于不稳定条件和扰动增益还与内根号前正负号的选取有关,故分以下(1)和(2)两种情况分析。

(1) 若(4)式内根号前取“-”，则不稳定增益为(5)式，对应的不稳定条件为下面(a)和(b)两情形的并集。

(a) $(f_1 + f_2)/2 \geq 0, f_1 f_2 < C_{XPM}$ 。即微扰频率须满足：

$$(\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2 \leq \Omega^2 < \Omega_2^2 \quad (9a)$$

光波参数须满足：

$$\Omega_{c_1}^2 + \Omega_{c_2}^2 > 4\Omega_{c_1}\Omega_{c_2} \text{ 和 } \Omega_{c_1}^2 > \Omega_{c_2}^2 \quad (9b)$$

其中：

$$\Omega_2^2 = (\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2 + \{[(\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2]^2 - 3\Omega_{c_1}^2\Omega_{c_2}^2\}^{1/2} \quad (9c)$$

(b) $(f_1 + f_2)/2 < 0$ 。即微扰频率须满足：

$$\Omega^2 < (\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2 \quad (10a)$$

光波参数须满足： $\Omega_{c_1}^2 > \Omega_{c_2}^2$ (10b)

求(9a)式、(10a)式的并集，并考虑到(8b)式，则扰动不稳定功率增益取(5)式时的不稳定条件为：

$$0 < \Omega^2 < \Omega_2^2 \quad (11)$$

参数须满足(9b)式。

(2) 若(4)式内根号前取“+”，则不稳定增益为(6)式，不稳定条件为： $(f_1 + f_2)/2 < 0, f_1 f_2 > C_{XPM}$ 。考虑到(8b)式，则扰动不稳定功率增益为(6)式时的不稳定条件为：

$$0 < \Omega^2 < \Omega_1^2 \quad (12a)$$

参数须满足(9b)式。其中：

$$\Omega_1^2 = (\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2 - \{[(\Omega_{c_1}^2 - \Omega_{c_2}^2)/2]^2 - 3\Omega_{c_1}^2\Omega_{c_2}^2\}^{1/2} \quad (12b)$$

综合(1)和(2)后可见，在(4)式内根号为实数的情况下要产生调制不稳定，参数须满足(9b)式，微扰频率须满足(11)式(注意 $\Omega_1^2 < \Omega_2^2$)。由于(11)式和(12a)式的交集即为(12a)式，故在此交集范围内，增益有 $g_1(\Omega)$ 和 $g_2(\Omega)$ 两种形式。对 $\Omega_1^2 \leq \Omega^2 < \Omega_2^2$ ，增益只有 $g_2(\Omega)$ 。还可看出，在 $0 < \Omega^2 < \Omega_1^2$ 时有 $f_1 f_2 > C_{XPM}$ ，在 $\Omega_1^2 < \Omega^2 < \Omega_2^2$ 时有 $f_1 f_2 < C_{XPM}$ ，即在 $f_1 f_2 < C_{XPM}$ 和 $f_1 f_2 > C_{XPM}$ 两种情况下均可能出现调制不稳定，而文献上只报道了前一种情况。

以上讨论了内根号为实数时的不稳定条件和扰动增益谱公式，下面给出增益谱图。图 1a 和图 1b 中分别为内根号前取正和取负时对应的增益谱图 $g_2(\Omega)$ 和 $g_1(\Omega)$ ，由于 $g(-\Omega) = g(\Omega)$ ，因而在图中只画出了 $\Omega \geq 0$ 的那一半。由图可见，光波参数相同时， $g_2(\Omega)$ 的谱峰和谱宽均大于 $g_1(\Omega)$ ，但随着处于正常色散区的那一光波的入射光功率 P_2 的增大，2 个增益谱的差异减小；在图 2a 和图 2b 中，给出了微扰频率给定时， $g_2(\Omega)$ 和 $g_1(\Omega)$ 随 P_2 的变化曲线，从图

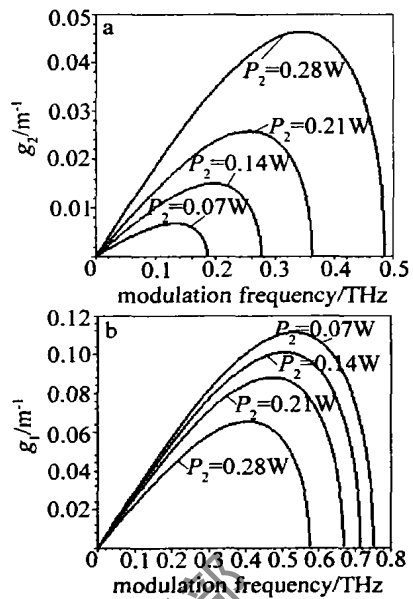


Fig 1 Gain spectra (a) g_2 and (b) g_1 at different input power P_2
a--- $\beta_1 = \beta_2 = 10\text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 15\text{W}/\text{km}$; $P_1 = 4\text{W}$ b--- $\beta_1 = \beta_2 = 10\text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 15\text{W}/\text{km}$; $P_1 = 4\text{W}$

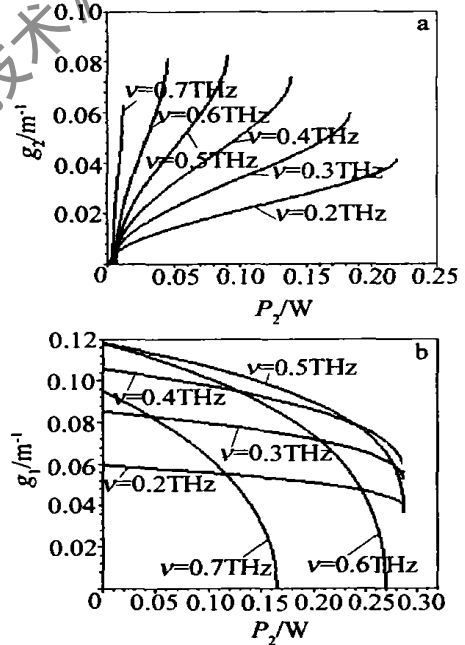


Fig 2 Variations of (a) g_2 and (b) g_1 with P_2 for several modulation frequencies
a--- $\beta_1 = \beta_2 = 10\text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 15\text{W}/\text{km}$; $P_1 = 4\text{W}$ b--- $\beta_1 = \beta_2 = 10\text{ps}^2/\text{km}$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 15\text{W}/\text{km}$; $P_1 = 4\text{W}$

可见， $g_1(\Omega)$ 随 P_2 的减小而增大， $g_2(\Omega)$ 随 P_2 的增大而增大。 $g_2(\Omega)$ 和 $g_1(\Omega)$ 均要求 P_2 在由(9b)式决定的范围内取值，由图可见，这一范围是很小的，且数值上 P_2 比 P_1 小得多。

要使(4)式内根号为虚数，应该有：

$$[(f_1 - f_2)/2]^2 + C_{XPM} < 0,$$

或 $[(f_1 + f_2)/2]^2 < f_1 f_2 - C_{XPM} \quad (13)$

在 $\beta_2 = -\beta_1 > 0$ 时, (13) 式成立的条件为 $\Omega_{c_1}^2 + \Omega_{c_2}^2 < 4\Omega_{c_1}\Omega_{c_2}$, 此时扰动增益为(7)式。易看出, (13)式成立时, 必然有: $f_1 f_2 > C_{XPM}$ 。

3 结论

详细分析光纤中两光波交叉相位调制不稳定性的结果表明, 文献[1]~[3]中关于 XPM 产生的必要条件为 $f_1 f_2 < C_{XPM}$, 增益谱公式为 $g_1(\Omega)$ 的结论只对两光波同在正色散区或同在负色散区时才是唯一的。当一光波处于正色散区, 而另一光波处于负色散区时, 由于(4)式中内根号可能为实数也可能为虚数, 使问题变得复杂。研究表明, 无论在 $f_1 f_2 < C_{XPM}$ 还是在 $f_1 f_2 > C_{XPM}$ 的情形下均可能产生调制不稳定, 而且不稳定增益有 3 种可能的形式, 甚至还可能出现在某一调制频率区域内有两个不稳定增益的情形。以 $\beta_2 = -\beta_1 > 0$ 为例, 在内根号为实数的情况下, 发生不稳定的条件是: 两光波参数须满足 $\Omega_{c_1}^2 + \Omega_{c_2}^2 > 4\Omega_{c_1}\Omega_{c_2}$ 和 $\Omega_{c_1}^2 > \Omega_{c_2}^2$, 扰动频率须满足 $0 < \Omega^2 < \Omega_2^2$ 。此时, 调制不稳定又分以下两情况: (1) 如果扰动频率满足 $0 < \Omega^2 < \Omega_1^2$, 扰动增益有两种, 即 $g_1(\Omega)$ 和 $g_2(\Omega)$; (2) 如果扰动频率满足 $\Omega_1^2 \leq \Omega^2 < \Omega_2^2$, 那么增益为 $g_2(\Omega)$ 。在内根号为虚数的情况下, 发生调制不稳定的条件是两光波参数满足 $\Omega_{c_1}^2 + \Omega_{c_2}^2 < 4\Omega_{c_1}\Omega_{c_2}$, 此时扰动增益为 $g_3(\Omega)$ 。

初步研究了增益系数的规律, 结果表明: 光波参数相同时, $g_2(\Omega)$ 的谱峰和谱宽均大于 $g_1(\Omega)$, 但随着处于正色散区的那一光波的入射光功率 P_2 的增大, 2 个增益谱的差异减小; $g_2(\Omega)$ 和 $g_1(\Omega)$ 随处于正色散区的那一光波的入射光功率 P_2 的变化规律不同, $g_1(\Omega)$ 随 P_2 的减小而增大, $g_2(\Omega)$ 随 P_2 的增大而增大; 在微扰频率给定时, $g_2(\Omega)$ 和 $g_1(\Omega)$ 均要求 P_2 在一很小范围内取值, 且数值上 P_2 比 P_1 小得多。当扰动增益系数为 $g_3(\Omega)$ 时, 只要光纤中稍

有扰动, 就会导致原两光波的不稳定。

最后需要补充说明的是: 上面的讨论只是对 $\beta_2 = -\beta_1 > 0$ 这种简单情况进行的, 如果 $\beta_2 \neq -\beta_1$, 情况会复杂些。若再考虑到损耗、高阶色散、高阶非线性效应、群速度失配等因素影响的话, 那么 XPM 所致 MI 的条件和相应的扰动功率增益系数会变得更加复杂。

参考文献

- [1] AGRAWAL G P. Modulation instability induced by cross phase modulation [J]. Phys Rev Lett, 1987, 59(8): 880~883.
- [2] AGRAWAL G P. Modulation instability induced by cross phase modulation in optical fibers [J]. Phys Rev, 1989, A39(7): 3406~3413.
- [3] AGRAWAL G P. 非线性光纤光学原理及应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2002. 165~183.
- [4] ROTHENBERG J E. Modulation instability of copropagating frequencies for normal dispersion [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(7): 813~814.
- [5] 杨爱玲, 王晶, 苗洪利 *et al.* 色散缓变光纤中交叉相位调制不稳定增益谱 [J]. 激光技术, 2003, 27(1): 44~46.
- [6] WABNITZ S. Modulation polarization instability of light in a nonlinear birefringent dispersive medium [J]. Phys Rev, 1988, A38(4): 2018~2021.
- [7] CAVALCANTI S B, CRESSONI J C, da CRUZ H R *et al.* Modulation instability in the region of minimum group velocity dispersion of single mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation [J]. Phys Rev, 1991, A43(11): 6162~6165.
- [8] KUMAR S, SELVARAJAN A, ANAND G V. Nonlinear copropagation of two optical pulses of different frequencies in birefringent fibers [J]. JOSA A, 1994, B11(5): 810~817.
- [9] 王晶, 冯占民, 苗洪利 *et al.* 交叉相位调制产生调制不稳定性的基态增益谱 [J]. 光电子·激光, 2000, 11(1): 83~85.
- [10] 徐文成, 罗爱平, 郭旗 *et al.* 色散缓变光纤中的调制不稳定性分析 [J]. 光学学报, 2000, 20(10): 1435~1439.
- [11] 张书敏, 徐文成, 罗爱平 *et al.* 色散缓变光纤中飞秒光脉冲的调制不稳定性研究 [J]. 光学学报, 2001, 21(6): 656~659.
- [12] TAI K, HASEGAWA A, TOMITA A. Observation of modulation instability in optical fibers [J]. Phys Rev Lett, 1986, 56(2): 135~138.
- [13] TRILLO S, WABNITZ S, WRIGHT E M *et al.* Optical solitary waves induced by cross phase modulation [J]. Opt Lett, 1988, 13(10): 871~873.
- [14] AFANASYEV V V, KIVSHAR Y S, KONOFOP V V *et al.* Dynamics of coupled dark and bright optical solitons [J]. Opt Lett, 1989, 14(15): 805~807.
- [8] KIM J, BOYRAZ O. Gain enhancement in cascaded fiber parametric amplifier with quasi-phase matching: theory and experiment [J]. J Lightwave Technol, 2001, 19(2): 247~251.
- [9] HO M C, UESAKA K, MARHIC M E *et al.* 200nm bandwidth fiber optical amplifier combining parametric and raman gain [J]. J Lightwave Technol, 2001, 19(7): 977~981.
- [10] YANG F S, HO M C, MARHIC M E *et al.* Demonstration of two pump fiber optical parametric amplification [J]. Electron Lett, 1997, 33: 812~813.
- [11] WONG K K Y, MARHIC M E, UESAKA K *et al.* Polarization independent two pump fiber optical parametric amplifier [J]. IEEE Photon Technol Lett, 2002, 14(7): 911~913.
- [12] SU Y K, WANG L J, AGARWAL A *et al.* Simultaneous 3R regeneration and wavelength conversion using a fiber parametric limiting amplifier [J]. OFC, 2001, 1: MG4-1~MG4-3.

(上接第 386 页)