第 28 卷 第 4 期
2004 年 8 月

激 光 技 术
LASER TECHNOLOGY

Vol. 28, No. 4
August, 2004

文章编号: 1001-3806(2004)04-0337-03

湍流大气中传输光波的波相位结构解析函数

张逸新[1,2], 陶纯堪[2]
(1. 江南大学 理学院, 无锡 214036; 2. 南京理工大学 电光学院, 南京 210014)

摘要: 在湍流大气对传输光波调制的双尺度湍涡(大尺度湍涡和小尺度湍涡)近似下, 研究了用于计算描述湍流大气中传输光波相干长度变化的核心函数(互相干函数)的关键因子波结构函数(WSF), 通过建立包含不同尺度湍流因子的折射率起伏谱密度函数, 导出了可以用于精确理论分析平面波与球面波在湍流大气中传播时所产生的诸如到达角起伏和相干性变化等效应的波相位结构函数的精确解析式, 同时给出了便于数值计算的近似误差在 2% 范围以内的波相位结构函数的精确渐近表达式。

关键词: 光波传播; 大气湍流; 折射率起伏谱密度函数; 相位结构函数
中图分类号: TN012; TN929.12　　文献标识码: A

Wave structure function of light wave propagating in turbulent atmosphere

ZHANG Yi-xin[1,2], *TAO Chun-kan*[2]
(1. School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China; 2. School of Electro Optics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014, China)

Abstract: In the approximation of the modulation process of two-scale eddies (inner scale and outer scale eddies) for light wave propagation in turbulent atmosphere, we study the wave structure function (WSF) used to calculate the mutual coherence function from which the transverse coherence length can readily be determined for an infinite plane wave or spherical wave. Analytical expressions are derived by means of the development of the modulation model of the power spectral density of the refractive-index fluctuations which include the factor of small-scale and large-scale sizes turbulence eddies for the wave structure function associated with the propagation of infinite plane waves and spherical waves through isotropic and homogeneous turbulence. For computational case, the approximation expressions for the structure function of infinite plane waves and spherical waves propagating through isotropic and homogeneous turbulence are also developed by simple interpolation method, whose error is less than 2%.

Key words: wave propagation; atmospheric turbulence; structure function; refractive-index fluctuation

引 言

波结构函数(WSF)是用于计算描述湍流大气中传输光波相干长度变化的核心函数——互相干函数(MCF)的关键因子, 而相干长度直接影响传输光束的扩展和成像分辨率。因此, 要全面分析大气成像系统的分辨率和光束的扩展等问题, 必须深入研究相位结构函数。相位结构函数解析关系的求解依赖于所选用的折射率功率谱数学模型。尽管 Kolmogorov 谱的形式很简单, 能得出平面波和球面波相位结构函数解析式, 但是其不包含湍流的内、外尺度。而随着研究的深入, 人们发现湍流内、外尺度对湍流大气传输效应的影响越来越成为不可忽略的因子[1,2]。但是, 能得出相位结构函数解析式的 Tatarskii 谱模型仅包含内尺度效应, 而由 von Karman 谱得出的相位结构模型又仅包含外尺度因子[3]。而用被广泛采用的包含湍流内尺度 l_0 和湍流外尺度 L_0 的折射率起伏修整 von Karman 谱密度函数[3~5]进行分析, 则仅能得到相位结构函数的无穷级数解[6]和被认为是"标准近似"的近似关系[5]。至今未见到得出相位结构函数的解析关系的报道。

作者通过分析不同尺度湍涡的大气湍流对传输光波调制作用的机制, 研究大气湍流折射率起伏谱的调制模型, 并由此分析得出了弱湍流大气中传输的平面波和球面波的相位结构因子精确和近似关系。

基金项目: 教育部重点科学技术资助项目(01091)
作者简介: 张逸新(1956-), 男, 教授, 硕士, 研究方向为光波在湍流大气中的传输与成像。
E-mail: zyx@sytu.edu.cn
收稿日期: 2003-09-01; 收到修改稿日期: 2003-12-12

1 滤波湍谱模型

根据湍流的串级模型理论, 大气湍流由尺度不同的各级湍涡所构成, 把形成统计均匀各向同性湍流的最大与最小湍涡边界称为湍流外尺度和湍流内尺度。对于不同的时刻, 湍流的内外尺度是动态变化的。为此, 可假定: (1) 检测器接收到的光信号是经小尺度湍涡的散射和大尺度湍涡折射再调制后的随机信号; (2) 大尺度湍涡和小尺度湍涡对传输光波的调制作用是相互统计独立的; (3) 在双尺度调制形式下, Rytov 近似依然成立[7, 8]。

现有理论表明[9], 在弱湍流起伏区域, 可以用 Rytov 方法分析光的传输规律。然而, Rytov 近似没有考虑湍流的内、外尺度的影响, 所以, 其仅适用于描述光波在弱起伏区域内的传播规律。为了把 Rytov 近似推广到适用于描述强湍流起伏区光的传播, 考虑到假定(2) 和(3), 则接收器间传输的光波可以表示为:

$$U(x, y, L) = U_0(x, y, L) \times \exp[\Psi_0(x, y, L) + \Psi_m(x, y, L)] \qquad (1)$$

式中, L 是光波的传输距离, $(x, y) = \rho$ 是距光源为 L 处, 垂直于传播路径的横向平面内的观察点位置, $U_0(x, y, L)$ 是不存在湍流时的光波场, 而 $\Psi_0(x, y, L)$, $\Psi_m(x, y, L)$ 分别描述了以折射作用为主的大尺度湍涡和以散射作用为主的小尺度湍涡引入的复相位。由(1) 式, 光强可记为:

$$I(x, y, L) = |U(x, y, L)|^2 = I_0 \cdot I_m \qquad (2)$$

式中, I_0, I_m 分别反映了大尺度和小尺度湍涡所产生的调制作用, 归一化(2) 式, 即取 $\langle I_0\rangle = \langle I_m\rangle = 1$, 则光闪烁方差可以表示为:

$$\sigma_I^2 = \langle I_0^2\rangle\langle I_m^2\rangle - 1 = (1+\sigma_0^2)(1+\sigma_m^2) - 1 \qquad (3)$$

式中, σ_0^2 和 σ_m^2 分别表示不同尺度湍涡所产生的归一化方差, ⟨ ⟩表示系综平均。进一步把 σ_0^2 和 σ_m^2 表示为 $\sigma_0^2 = \exp(\sigma_{\ln I_0}^2) - 1$ 和 $\sigma_m^2 = \exp(\sigma_{\ln I_m}^2) - 1$, (3) 式又可以记为:

$$\sigma_I^2 = \exp(\sigma_{\ln I_0}^2 + \sigma_{\ln I_m}^2) - 1 = \sigma_I^2 = \exp(\sigma_{\ln I}^2) - 1 \qquad (4)$$

由(4) 式, 有:

$$\sigma_I^2 = \sigma_{\ln I_0}^2 + \sigma_{\ln I_m}^2 \qquad (5)$$

在 Rytov 近似下, 有限孔径接收到的平面与球面光波的闪烁方差可表示为[7]:

平面波:

$$\sigma_{\ln I, \mathrm{pl}}^2(\rho) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa\varphi_n(\kappa)\exp(-\kappa^2\rho^2/4) \times [1 - \cos(L\kappa^2\xi/k)]\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi \qquad (6)$$

球面波:

$$\sigma_{\ln I, \mathrm{sph}}^2(\rho) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa\varphi_n(\kappa)\exp(-\kappa^2\xi^2\rho^2/4) \times \{1 - \cos[L\kappa^2\xi(1-\xi)/k]\}\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi \qquad (7)$$

式中, k 是传输光波的波数, κ 为空间波数[3]。当仅考虑外尺度影响时选用常用的 von Karman 湍谱[5] 的等价指数谱[10]:

$$\varphi_n(\kappa, L_0) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}[1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)] \qquad (8)$$

式中, $\kappa_0 = 2\pi/L_0$, C_n^2 是折射率结构常数。而当仅考虑内尺度影响时用 Tatarskii 湍流谱[3]:

$$\varphi_n(\kappa, l_0) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}\exp(-\kappa^2/\kappa_0^2) \qquad (9)$$

为简化计, 下面以平面波为例导出湍谱的调制模型。由(5) 式、(6) 式、(8) 式和(9) 式, 有:

$$\sigma_{\ln I, \mathrm{pl}}^2(\rho) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa\varphi_n(\kappa, L_0)\exp(-\kappa^2\rho^2/4) \times [1 - \cos(L\kappa^2\xi/k)]\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi + 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa\varphi_n(\kappa, l_0) \times \exp(-\kappa^2\rho^2/4)[1 - \cos(L\kappa^2\xi/k)]\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa[\varphi_n(\kappa, L_0) + \varphi_n(\kappa, l_0)] \times \exp(-\kappa^2\rho^2/4)[1 - \cos(L\kappa^2\xi/k)]\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi \qquad (10)$$

形式上记滤波形式的湍流谱为 $\varphi_n(\kappa, L_0, l_0)$, 则由(6) 式, 有:

$$\sigma_{\ln I, \mathrm{pl}}^2(\rho) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^1\int_0^\infty \kappa\varphi_n(\kappa, L_0, l_0) \times \exp(-\kappa^2\rho^2/4)[1 - \cos(L\kappa^2\xi/k)]\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi \qquad (11)$$

比较(10) 式和(11) 式, 有:

$$\varphi_n(\kappa, L_0, l_0) = [\varphi_n(\kappa, L_0) + \varphi_n(\kappa, l_0)] = 0.033 a_n C_n^2 \kappa^{-11/3}[\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) + 1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)] \qquad (12)$$

式中, $\kappa_m = 5.92/l_0$, a_n 是待定系数, 其可以取 $\varphi_n(\kappa, L_0 \to \infty, l_0 \to 0) \approx 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}$ 决定, 即 $a_n = 1/2$, 即:

$$\varphi_n(\kappa, L_0, l_0) = 0.0165 C_n^2 \kappa^{-11/3} \times [\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2) + 1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)] \qquad (13)$$

2 平面波和球面波相位结构因子精确解析式

平面波在均匀各向同性湍流大气中传输的相位结构因子定义为[3]:

$$D_\mathrm{p}(\rho) = 8\pi^2 k^2 L \int_0^\infty [1 - \mathrm{J}_0(\kappa\rho)]\varphi_n(\kappa, l_0, L_0)\,\mathrm{d}\kappa \qquad (14)$$

式中, ρ 是垂直于波传输方向的横向平面内波前上两点的距离。把(13) 式代入(14) 式, 即得到平面波相位结构因子的解析关系:

$$D_\mathrm{p}(\rho) = 1.303 C_n^2 k^2 L \Gamma(-5/6)\kappa_m^{-5/3} \times \{[1 - {}_1\mathrm{F}_1(-5/6; 1; -\kappa_m^2\rho^4/4)] +$$

$$(\kappa_0/\kappa_m)^{-5/3}\,{}_1F_1(-5/6;1;-\kappa_0^2\rho^2/4)\}\qquad(15)$$

式中，${}_1F_1(a,b,y)$ 是合流超几何函数，$\Gamma(x)$ 为伽玛函数。利用恒等式[6]：

$$ {}_1F_1(-5/6;1;-y)-1=\frac{5y}{6}\,{}_2F_2(1/6,1;2,2;-y)\qquad(16)$$

式中，${}_2F_2(a,b;c,d;y)$ 是广义合流超几何函数。有平面波相位结构函数的另一个解析关系：

$$D_p(\rho)=3.280C_n^2k^2Ll_0^{-1/3}\rho^2\times\{{}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_m^2\rho^2/4)-(l_0/L_0)^{-5/3}\times{}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_0^2\rho^2/4)+(l_0/L_0)^{-5/3}\}\qquad(17)$$

对于球面波，其在均匀各向同性湍流大气中传输的相位结构因子定义为[3]：

$$D_{sp}(\rho)=8\pi^2k^2\int_0^\infty\int_0^1[1-J_0(\kappa\rho\eta/L)]\times\varphi_n(\kappa,l_0,L_0)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\kappa\qquad(18)$$

通过类似于(15)式的计算，即得到球面波相位结构因子的解析关系：

$$D_{sp}(\rho)=1.303C_n^2k^2L\Gamma(-5/6)\kappa_m^{-5/3}\times\{[1-{}_2F_2(-5/6;1/2;1,3/2;-\kappa_m^2\rho^2/4)]+(\kappa_0/\kappa_m)^{-5/3}\,{}_2F_2(-5/6;1/2;1,3/2;-\kappa_0^2\rho^2/4)\}\qquad(19)$$

进一步运用数学恒等关系[6]：

$${}_2F_2(-5/6,1/2;1,3/2;-y)-1=\frac{5y}{18}\,{}_3F_3(1/6,3/2,1;1/2,2,5/2;-y)\qquad(20)$$

式中，${}_3F_3(a,b,c;d,e,f;y)$ 是另一广义合流超几何函数。把(20)式代入(19)式有球面波相位结构函数的另一个解析关系：

$$D_{sp}(\rho)=1.0930C_n^2k^2Ll_0^{-1/3}\rho^2\times\{{}_3F_3(1/6,3/2,1;2,2,5/2;-\kappa_m^2\rho^2/4)-(l_0/L_0)^{-5/3}\times{}_3F_3(1/6,3/2,1;2,2,5/2;-\kappa_0^2\rho^2/4)+(l_0/L_0)^{-5/3}\}\qquad(21)$$

3　近似关系

类似于文献[6]中对${}_2F_2(a,b;c,d;y)$与${}_3F_3(a,b,c;d,e,f;y)$的渐近和内插分析，可以得到：

$${}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_m^2\rho^2/4)\approx\begin{cases}1-0.365(\rho/l_0)^2, & \rho\ll l_0\\ 0.889(l_0/\rho)^{1/3}, & \rho\gg l_0\end{cases}\qquad(22)$$

$${}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_0^2\rho^2/4)\approx\begin{cases}1-0.365(\rho/L_0)^2, & \rho\ll L_0\\ 0.889(L_0/\rho)^{1/3}, & \rho\gg L_0\end{cases}\qquad(23)$$

和内插关系：

$${}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_m^2\rho^2/4)\approx[1+2.033(\rho/l_0)^2]^{-1/6}\qquad(24)$$

$${}_2F_2(1/6,1;2,2;-\kappa_0^2\rho^2/4)\approx[1+2.033(\rho/L_0)^2]^{-1/6}\qquad(25)$$

把(24)式和(25)式代入(17)式，有误差不大于2%的平面波相位结构函数近似关系：

$$D_p(\rho)=3.280C_n^2k^2Ll_0^{-1/3}\rho^2\{[1+2.033(\rho/l_0)^2]^{-1/6}-(l_0/L_0)^{-5/3}[1+2.033(\rho/L_0)^2]^{-1/6}+(l_0/L_0)^{-5/3}\}\qquad(26)$$

类似平面波的分析，可以得出球面波的波结构函数内插关系：

$$D_{sp}(\rho)=1.0930C_n^2k^2Ll_0^{-1/3}\rho^2\{[1+(\rho/l_0)^2]^{-1/6}-(l_0/L_0)^{-5/3}[1+(\rho/L_0)^2]^{-1/6}+(l_0/L_0)^{-5/3}\}\qquad(27)$$

4　结　论

在湍流大气对传输光波调制的双尺度湍涡调制近似的基础上得出了包含湍流内外尺度作用的调制折射率起伏模型，研究并导出了包含湍流内外尺度影响的无限平面波和球面波相位结构函数的解析(17)式和(21)式，同时运用 ANDREWS 等[5]提出的内插近似关系，得出与解析关系(17)式和(21)式对应的误差在2%以内的近似关系(26)式和(27)式。这些结果为进一步“精确”分析平面波与球面波在湍流大气中传播时所产生的诸如到达角起伏和相干性变化等效应的理论与实验数据分析提供了分析基础。

参　考　文　献

[1]　SASIELA R J, SHELTON J D. Transverse spectral filtering and mellin transform techniques applied to the effect of outer scale on tilt and tilt anisoplanatism [J]. J O S A, 1993, A10(4): 646~660.

[2]　CHESNOKOV S S, SKIPETROV S E. Optical resolution through atmospheric turbulence with finite outer scale [J]. Opt Commun, 1997, 141(1): 113~117.

[3]　LAWRENCE R S, STROHBEHN J W. A survey of clear air propagation effects relevant to optical communications [J]. Proc IEEE, 1970, 58(10): 1523~1545.

[4]　LUTOMIRSKI R F, YURA H T. Wave structure function and mutual coherence function of an optical wave in a turbulent atmosphere [J]. J O S A, 1971, 61(4): 482~492.

[5]　ANDREWS L C, PHILLIPS R L. Laser beam propagation through random media [M]. Washington: SPIE Optical Engineering Press, 1998. 53~55.

[6]　ANDREWS L C, VESTER S. Analytic expressions for the wave structure function based on a bump spectral model for refractive index fluctuations [J]. J Modern Opt, 1993, 40(5): 591~598.

[7]　ANDREWS L C, AL-HALASH M A, HOPEN C Y *et al*. Theory of optical scintillation: Gaussian-beam wave model [J]. Wave Random Media, 2001, 11(2): 271~291.

[8]　ANDREWS L C, PHILLIPS R L, HOPEN C Y. Aperture averaging of optical scintillations: power fluctuations and the temporal spectrum [J]. Wave Random Media, 2000, 10(1): 53~70.

[9]　塔塔斯基 V I. 湍流大气中波的传播理论 [M]. 北京：科学出版社，1978. 109~144.

[10]　VOISEKHOVICH V V. Outer scale of turbulence: comparison of different models [J]. J O S A, 1995, A12(6): 1346~1353.