

文章编号: 1001-3806(2004)03-0330-03

## 非对称方孔的夫琅和费和非涅耳衍射

王明灼<sup>1,2</sup>, 吕百达<sup>1,3</sup>

(1. 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064; 2. 自贡师范高等专科学校 理化系, 自贡 643000; 3. 华中科技大学 激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

**摘要:** 基于标量衍射理论, 对均匀平面波通过两个非对称双矩孔的衍射作了解析研究和数值计算, 给出了夫琅和费和非涅耳衍射的横向、轴上和轴外光强分布。研究表明, 可用其最大光强的相对误差来区别夫琅和费和非涅耳衍射, 所得结果与两个圆孔情况一致。

**关键词:** 夫琅和费和非涅耳衍射; 菲涅耳数; 非对称双矩孔; 标量衍射

**中图分类号:** O435 **文献标识码:** A

### Fraunhofer and Fresnel diffraction at two asymmetrical rectangular apertures

WANG Ming-zhuo<sup>1,2</sup>, Lǚ Bǎi-da<sup>1,3</sup>

(1. Institute of Laser Physics and Chemistry, Chengdu 610064, China; 2. Department of Physics and Chemistry, Zigong College, Zigong 643000, China; 3. National Laboratory of Laser Technology, HUST, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Based on the theory of scalar diffraction, the diffraction of a uniform plane wave at two asymmetrical rectangular apertures is studied analytically and numerically. The transversal, on-axis and off-axis intensity distributions of the Fraunhofer and Fresnel diffraction are given and analyzed. It is shown that the Fraunhofer and Fresnel diffraction can be distinguished by the relative error of their maximum intensity. The result is consistent with that for the case of two circular apertures.

**Key words:** Fraunhofer and Fresnel diffraction; Fresnel number; two asymmetrical apertures; scalar diffraction

### 引 言

区分夫琅和费和非涅耳衍射是光学和激光技术中一个基本而又十分重要的问题, 除按这两类衍射的定义和实验布局判断<sup>[1]</sup> 而外, 采用菲涅耳数和瑞利长度是常用的定性判断方法<sup>[2,3]</sup>。当然, 夫琅和费衍射也可以用菲涅耳衍射积分公式计算。GARCIA-SUCERQUIA 等人<sup>[4,5]</sup> 对单色平面波和部分相干光通过两个非对称圆孔的衍射问题用菲涅耳带的方法对这两类衍射作了定量研究, 提出了相应的判据。实际工作中, 除圆孔光阑外, 按应用要求也使用矩孔光阑, 文中针对非对称方孔装置, 使用不同的方法, 即光强误差分析方法判断这两类衍射的差异, 得到了与 GARCIA-SUCERQUIA 等人<sup>[4]</sup> 一致的结果。

### 1 菲涅耳衍射和夫琅和费衍射

设均匀平面波垂直入射边长为  $a$ , 两孔间距  $b$  的双方孔光阑, 光轴通过其中一孔中心, 另一孔上任意点  $(x_0, y_0, 0)$  到光轴的距离为  $r$ , 如图 1 所示, 观测

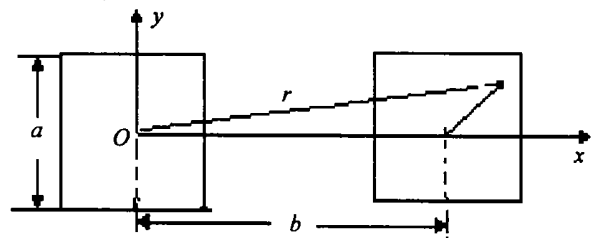


Fig. 1 Notation relating to the aperture setup

平面  $P$  位于  $z$  处。光阑透过率函数可记为:

$$t(x_0, y_0, 0) = \text{rect}(x_0/a) \text{rect}(y_0/a) + \text{rect}[(x_0 - b)/a] \text{rect}(y_0/a) \quad (1)$$

式中,  $\text{rect}(x_0/a) \text{rect}(y_0/a) =$

$$\begin{cases} 1 & |x_0| \leq a/2, |y_0| \leq a/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{。由菲涅耳}$$

衍射积分公式, 中心孔衍射在  $P$  平面的光场分布为:

作者简介: 王明灼 (1950-), 男, 副教授, 现从事激光光学的科研与教学工作。

E-mail: scuzd@163.net

收稿日期: 2003-07-25; 收到修改稿日期: 2003-09-18

$$E_1(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{a/2}^{a/2} \int_{a/2}^{a/2} \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 \quad (2a)$$

经简单积分限变换后,边缘孔衍射在  $P$  平面的光场分布可写为:

$$E_2(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{a/2}^{a/2} \int_{a/2}^{a/2} \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} \times \exp\left\{\frac{ikb}{z} x_0 - x + \frac{b}{2}\right\} dx_0 dy_0 \quad (2b)$$

式中,  $\frac{kb}{z} x_0 - x + \frac{b}{2}$  为两孔光在  $P$  平面上的位相差,两孔衍射在  $P$  平面上总光场分布  $E_{FE}(x, y, z)$  为:

$$E_{FE}(x, y, z) = E_1(x, y, z) + E_2(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{a/2}^{a/2} \int_{a/2}^{a/2} \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} \times \left[1 + \exp\left\{\frac{ikb}{z} x_0 - x + \frac{b}{2}\right\}\right] dx_0 dy_0 \quad (3)$$

式中,  $\lambda$  为波长,  $k$  为波数。对(3)式积分得平面波通过非对称方孔菲涅耳衍射的场分布:

$$E_{FE}(x, y, z) = \frac{(-1)^{3/2} \exp(ikz)}{2i} \left[ \operatorname{erf}(\zeta_1) + \operatorname{erf}(\zeta_2) - \operatorname{erf}(\zeta_1') - \operatorname{erf}(\zeta_2') \right] \times \left[ \operatorname{erf}(\eta_1) - \operatorname{erf}(\eta_2) \right] \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= (-1)^{3/4} \sqrt{k/2z} (x - a/2) \\ \zeta_2 &= (-1)^{3/4} \sqrt{k/2z} (x - a/2 - b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1' &= (-1)^{3/4} \sqrt{k/2z} (x + a/2) \\ \zeta_2' &= (-1)^{3/4} \sqrt{k/2z} (x + a/2 - b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= (-1)^{1/4} \sqrt{k/2z} (y - a/2) \\ \eta_2 &= (-1)^{1/4} \sqrt{k/2z} (y + a/2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\operatorname{erf}(\zeta)$  为误差函数,由(4)式得沿  $x$  方向光强分布公式:

$$I_{FE}(x, 0, z) = |E_{FE}(x, 0, z)|^2 = \pi / (-1)^{3/4} / 2 \sqrt{2\pi} \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{(-1)^{3/4} a \sqrt{k}}{2 \sqrt{2z}}\right] [\operatorname{erf}(\zeta_1) + \operatorname{erf}(\zeta_2)] - [\operatorname{erf}(\zeta_1') + \operatorname{erf}(\zeta_2')] \right\}^2 \quad (8)$$

对(3)式作夫琅和费近似得:

$$E_{FI}(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times$$

$$\int_{a/2}^{a/2} \int_{a/2}^{a/2} \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)\right] \times \left\{ 1 + \exp\left[\frac{ikb}{z}\left(x_0 - x + \frac{b}{2}\right)\right] \right\} dx_0 dy_0 = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathbf{F}\{t(x_0, y_0, 0)\} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{F}\{t(x_0, y_0, 0)\}$  为  $t(x_0, y_0, 0)$  的傅里叶变换,由(9)式得到平面波通过非对称方孔夫琅和费衍射场的公式:

$$E_{FI}(x, y, z) = \frac{a^2 \exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \left\{ \operatorname{sinc}(af_x) \operatorname{sinc}(af_y) + \operatorname{sinc}[a(f_x - f_b)] \operatorname{sinc}(af_y) \right\} \quad (10)$$

式中,  $\operatorname{sinc}(\cdot) = \frac{\sin(\cdot)}{\cdot}$ 。沿  $x$  方向光强分布为:

$$I_{FI}(x, 0, z) = |E_{FI}(x, 0, z)|^2 = (a^2/\lambda z)^2 \times \left\{ [\operatorname{sinc}(af_x)]^2 + [\operatorname{sinc}[a(f_x - f_b)]]^2 + 2 \operatorname{sinc}(af_y) \operatorname{sinc}[a(f_x - f_b)] \cos[\phi] \right\} = 4 \frac{a^2}{\lambda z} \operatorname{sinc}^2 a f_x - \frac{f_b}{2} \cos^2 \frac{kb}{2z} x - \frac{b}{2} \quad (11)$$

式中,  $f_x = x/\lambda z$ ,  $f_b = b/\lambda z$ 。

## 2 数值计算结果和分析

图 2 为用(8)式和(11)式作出的横向光强分布图。图 2a 中,  $z = 2844\text{mm}$  ( $F = 0.05$ ), 图 2b 中,  $z = 94.8\text{mm}$  ( $F = 1.5$ ), 图 2c 中,  $z = 284.4\text{mm}$  ( $F = 0.5$ ), 计算参数为:  $a = 0.2\text{mm}$ ,  $b = 0.3\text{mm}$ ,  $\lambda = 632.8\text{nm}$ 。图中,实线表示菲涅耳衍射  $I_{FE}$ ,虚线表示夫琅和费衍射  $I_{FI}$ 。图 2a 中两条曲线完全重合,光强分布一样,属于夫琅和费衍射域,图 2b 中两条曲线光强差异很大,夫琅和费衍射和菲涅耳衍射的光强分布有显著差异。图 2c 中两条曲线有差别,差别主要出现在最大光强和最小光强处,因此,对两类衍射的区分主要在菲涅耳数  $F < 0.5$  范围进行。此外,3 个图中都可见光强的最大值不在光轴处,体现非对称双孔干涉的影响。

在(8)式和(11)式中,令  $x = 0$  得到夫琅和费和非涅耳衍射轴上光强,见图 3,计算参数为  $a = 0.2\text{mm}$ ,  $b = 0.3\text{mm}$ ,  $\lambda = 632.8\text{nm}$ 。为确定差别大小,计算相对误差,定义为:

$$\delta(F) = \frac{|I_{FI}(F) - I_{FE}(F)|}{I_{FE}(F)} \quad (12)$$

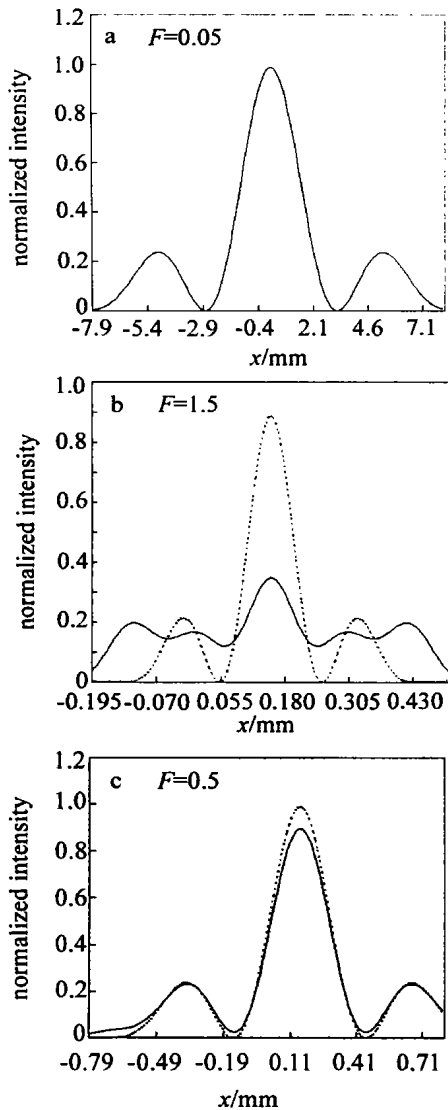


Fig. 2 Transversal intensity distributions of the Fraunhofer and Fresnel diffraction —  $I_{FE}$ ;  $\cdots$   $I_{FI}$

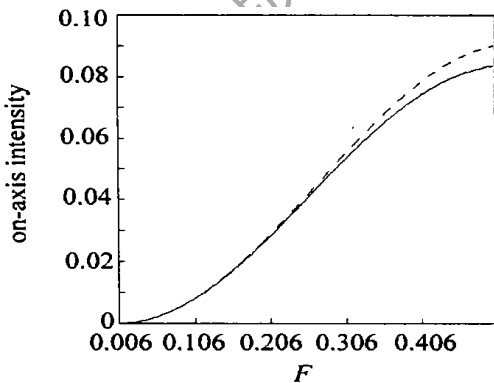


Fig. 3 On-axis intensity distributions versus Fresnel number  $F$  —  $I_{FE}$ ;  $\cdots$   $I_{FI}$

式中,  $\delta(F)$  表示两光强  $I_{FE}(F)$ ,  $I_{FI}(F)$  的相对误差, 计算参数为  $b=0.3\text{mm}, 0.6\text{mm}$ , 其余同图 3, 代入 (8) 式、(11) 式和 (12) 式, 结果如图 4 所示。图中误差都随  $F$  的增大而增大, 但光阑参数不同, 误差随  $F$  变化的大小不一样, 当  $F=0.5$ ,  $\delta(F)$  不到 8%。

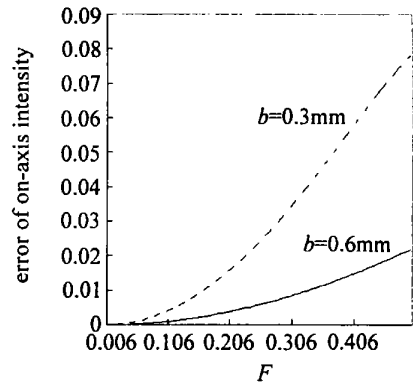


Fig. 4 Relative error  $\delta$  of the on-axis intensity distributions versus Fresnel number  $F$  —  $b=0.6\text{mm}$ ;  $\cdots$   $b=0.3\text{mm}$

由图 2 可知, 光强最大位置  $x = b/2$  处差异最大, 将  $x = b/2$  代入 (8) 式、(11) 式及 (12) 式, 得到轴外光强和光强误差随  $F$  变化曲线图 5 和图 6。图 5 是光强随非涅耳数的变化, 计算参数同图 3。与图 3 比较知, 此时, 随  $F$  增大两曲线差异变化更大。

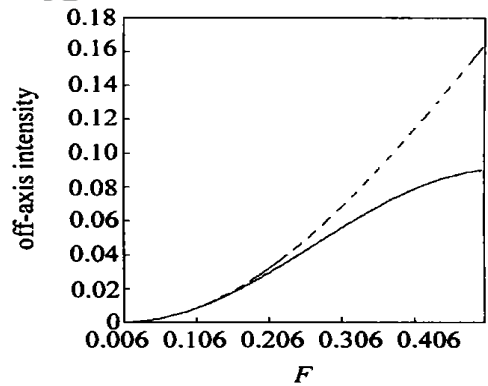


Fig. 5 Off-axis intensity distributions versus Fresnel number  $F$  —  $I_{FE}$ ;  $\cdots$   $I_{FI}$

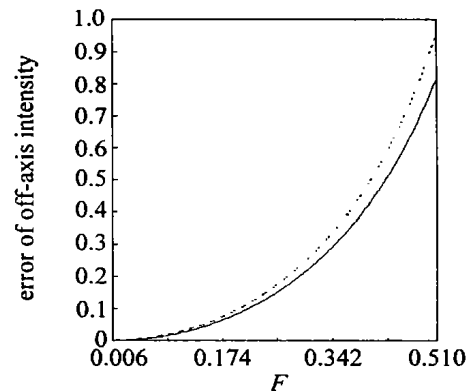


Fig. 6 Relative error  $\delta$  of off-axis intensity distributions versus Fresnel number  $F$  —  $b=0.3\text{mm}$ ;  $\cdots$   $b=0.6\text{mm}$

图 6 是轴外光强误差变化曲线, 计算参数同图 4。由图可见, 光强误差随非涅耳数的变化要比图 4 大得多, 如  $F=0.5$ , 图 4 的误差小于 0.08, 该图的误差接近 1。采用文献 [4] 中光强误差为 12% 时对应的 (下转第 336 页)

浦作用下的  $C+L$  波段(1527nm~1607nm)最佳平坦喇曼增益,泵浦波长选择范围为 1400nm~1500nm,输入功率在 300mW 以内。图 4 中 3 个泵浦波长分别为 1427.8nm,1456.9nm,1494.1nm,输入功率为 146.24mW,93.776mW,99.366mW。图 5 中 5 个泵浦波长依次为 1421.2nm,1434.5nm,1452.4nm,1472.5nm,1499.2nm,输入功率 73.924mW,80.398mW,70.991mW,36.068mW,79.243mW。

比较两图可以看出,5 个泵浦实现了比 3 个泵浦更好的信号平坦喇曼增益谱,同时也可以更加清楚地得到泵浦波长和功率设置的基本原则。由文献 [5] 中喇曼增益谱线看出,单一泵浦波长可以产生约 20nm 的平坦喇曼增益,泵浦频率和增益谱峰值相距约 13.2THz。根据图 1 所示合成喇曼增益计算方法,泵浦波长的恰当分布,可以使产生的喇曼增益峰值的位置相互均衡以实现平坦的叠加效果。同时由于泵浦与泵浦、信号与信号之间也会由于 SRS 作用产生能量传递,为了实现多路信号平坦的增益谱,需要在短波长区设置更大的泵浦光功率。

### 3 结论

FRA 具有全波段可放大和增益谱较宽的优点,多泵浦 FRA 更可以通过合理配置实现超宽带平坦的喇曼增益。利用多步平均功率法对多泵浦 FRA 简化功率方程进行数值计算,全面考虑了泵浦与泵浦,泵浦与信号,信号与信号间的相互作用,得到在 DWDM 通信系统中应用的多泵浦 FRA 的数学模型,并利用该模型分析了实现宽带平坦喇曼增益的泵浦

优化算法。分析结果表明,泵浦与泵浦、信号与信号之间的 SRS 作用对信号喇曼增益谱平坦性有非常大的影响,通过多泵浦波的个数、输入功率和频率间隔的适当搭配,可以实现 DWDM 系统多路信号超宽带平坦喇曼增益谱。

### 参考文献

- [1] EMORI Y, TANAKA K, NAMIKI S. 100nm bandwidth flat gain Raman amplifiers pumped and gain-equalised by 12-wavelength-channel WDM laser diode unit [J]. *Electron Lett*, 1999, 35(16): 1355~1356.
- [2] KIDORF H, ROTTWITT K, NISSOV M *et al.* Pump interactions in a 100nm bandwidth Raman amplifier [J]. *IEEE Photon Technol Lett*, 1999, 11(5): 530~532.
- [3] FLUDGER C, MARONEY A, JOLLEY N. An analysis of the improvements in OSNR from distributed Raman amplifiers using modern transmission fibers [J]. *Optical Fiber Communication Conference*, 2000, 4: 100~102.
- [4] NAMIKI S. Recent advances in Raman amplifiers [J]. *Opt Commun*, 2001, 5: 162~181.
- [5] AGRAWAL G P. *Nonlinear fiber optics* [M]. 3rd edition, New York: Academic Press, 2001. 299~300.
- [6] NAMIKI S, EMON Y. Ultrabroad-band amplifiers pumped and gain-equalized by wavelength-division-multiplexed high-power laser diodes [J]. *IEEE Journal on Select Topics Quantum Electron*, 2001, 7(1): 3~16.
- [7] LIU X M, ZHANG H Y, GUO Y L. A novel method for Raman amplifier propagation equations [J]. *IEEE Photon Technol Lett*, 2003, 15(3): 392~394.
- [8] MIN B, LEE W J, PARK N Y. Efficient formulation of Raman amplifier propagation equations with average power analysis [J]. *IEEE Photon Technol Lett*, 2000, 12(11): 1486~1488.
- [9] ZHOU X, LU Ch, SHUM P *et al.* A simplified model and optimal design of a multiwavelength backward-pumped fiber Raman amplifier [J]. *IEEE Photon Technol Lett*, 2001, 13(9): 945~947.

(上接第 332 页)

菲涅耳数,由图中曲线得到:当  $F=0.230$ ,  $\delta(F)=0.11975$ (实线),  $F=0.216$ ,  $\delta(F)=0.11972$ (虚线),综合考虑实线和虚线的误差,可用二者平均值,即将  $F=0.223$  作为菲涅耳和夫琅和费衍射的判断标准,当  $F \leq 0.223$  是夫琅和费衍射,  $F > 0.223$  是菲涅耳衍射。

### 3 小结

使用标量衍射理论对均匀平面波通过两个非对称矩孔的衍射作了详细研究,采用在夫琅和费和非涅耳衍射的交界区 ( $F < 0.5$ ) 用轴上和轴外最大光强相对误差 12% 来区分两类衍射的方法,得到当  $F \leq 0.223$  是夫琅和费衍射,  $F > 0.223$  是菲涅耳衍

射的结论。这一方法更为直观,且物理图像清晰。所得结果与 GARCIA-SUCERQUIA 等<sup>[4]</sup>用菲涅耳波带法对两圆孔衍射研究结果一致。

### 参考文献

- [1] BORN M, WOLF E. *Principles of Optics* [M]. 5th ed, Oxford: Pergamon Press, 1993. 412~514.
- [2] 卢亚雄,吕百达. *矩阵光学* [M]. 大连:大连理工大学出版社, 1989. 55.
- [3] SIEGMAN A E. *Lasers* [M]. Mill Valley, CA: University Science Books, 1986. 634, 668.
- [4] GARCIA-SUCERQUIA J I, CASTANEDA R, MEDINA F F *et al.* Distinguishing between Fraunhofer and Fresnel diffraction by the Young's experiment [J]. *Opt Commun*, 2001, 200: 15~22.
- [5] GARCIA-SUCERQUIA J I, CASTANEDA R, MEDINA F F. Fresnel-Fraunhofer diffraction and spatial coherence [J]. *Opt Commun*, 2002, 205: 239~245.