

文章编号: 1001-3806(2004)03-0323-04

## 高斯光束通过非线性梯度折射率透镜的传输特性

张廷蓉<sup>1,2</sup>, 吕百达<sup>1,3</sup>

(1. 西南交通大学 理学院, 成都 610031; 2. 四川师范大学 电子工程学院, 成都 610066; 3. 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

**摘要:** 基于无像差自聚焦理论, 使用  $ABCD$  定律导出了高斯光束在非线性梯度折射率介质中的解析传输公式。采用矩阵光学方法研究了高斯光束通过非线性梯度折射率透镜的传输特性。结果表明, 介质的非线性性和非均匀性、激光功率及入射光束参数影响其传输特性。

**关键词:** 非线性光学; 传输; 矩阵光学; 非线性 GRIN 介质; 高斯光束

**中图分类号:** O435 **文献标识码:** A

### Propagation properties of Gaussian beams through a nonlinear gradient-index lens

ZHANG Ting-rong<sup>1,2</sup>, LYU Bai-da<sup>1,3</sup>

(1. College of Science, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. College of Electronics Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China; 3. Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** Based on the aberrationless theory of self-focusing, the closed-form propagation expressions for Gaussian beams through a nonlinear gradient-index medium are derived by means of the  $ABCD$  law. By using the matrix optics method, the propagation properties of Gaussian beams through a nonlinear gradient-index lens are studied. It is shown that the nonlinearity and inhomogeneity of the medium, laser power and input beam parameter affect their propagation properties.

**Key words:** nonlinear optics; propagation; matrix optics; nonlinear gradient-index medium (nonlinear GRIN medium); Gaussian beam

### 引 言

梯度折射率透镜由于其体积小和特有的成像特性, 在光通信领域发挥了重要作用<sup>[1,2]</sup>。近年来, 随着非线性纤维光学的迅速发展, 非线性梯度折射率透镜的成像特性引起了人们的研究兴趣<sup>[3]</sup>。有关高斯光束在非线性介质中的传输特性及自聚焦点附近的研究已有大量报道<sup>[4~7]</sup>。BELANGER 和 PARE<sup>[5]</sup>定义了非线性介质中的光束复参数  $q_{nl}$ , 将光束复参数满足的非线性微分方程转换为线性微分方程, 导出了高斯光束在均匀无损耗非线性介质中的光束宽度和等相面曲率半径公式。MAGNI 等人<sup>[8]</sup>采用非线性  $ABCD$  矩阵分析了高斯光束在均匀非线性 Kerr 介质中的传输规律。本文中基于无像差自聚焦理论

和 BELANGER 与 PARE 定义的  $q_{nl}$  参数, 运用  $ABCD$  定律研究了高斯光束在非线性非均匀介质中的传输特性, 进而将其用于研究高斯光束通过非线性梯度折射率透镜的传输特性, 导出了高斯光束经过此透镜传输后的束腰宽度及束腰位置公式, 讨论了介质的非线性性和非均匀性、激光功率及入射光束束腰位置对其传输特性所产生的影响。

### 1 非线性介质中的基本波方程及光束复参数

设光束沿  $z$  轴在均匀非线性 Kerr 介质中传输。介质的折射率为:

$$n = n_0 + \frac{1}{2} n_2 |E|^2 \quad (1)$$

式中,  $n_0$  为介质的线性折射率,  $n_2$  为介质的非线性折射系数。在柱坐标系中, 光场可写为:

$$E(r, z, t) = A(r, z) \exp[i(\omega t - kz)] \quad (2)$$

式中,  $A$  为电场包络,  $\omega$  为角频率,  $k$  为光波波数。在慢变振幅和傍轴近似下, 其包络  $A$  满足非线性 Schrödinger 方程<sup>[4]</sup>:

基金项目: 四川省教育厅重点资助项目 (2002A089)

作者简介: 张廷蓉 (1962-), 女, 副教授, 现从事激光光束传输与变换研究。

E-mail: TRzhang@mail.sc.cninfo.net

收稿日期: 2003-07-23

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2ki \frac{\partial A}{\partial z} + k^2 \frac{n_2}{n_0} / A / ^2 A = 0 \quad (3)$$

式中,  $\nabla_{\perp}^2$  是横向拉普拉斯算子。对方程(3)的数值解和近似解析解已作了许多研究, 结果表明, 该方程存在自相似解<sup>[9]</sup>。

非线性介质中的高斯光束复参数定义为<sup>[5]</sup>:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \sigma \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (4)$$

$$\sigma = 1 - P_0 / P_c \quad (5)$$

式中,  $\lambda$  为光波波长,  $R$  为光束等相面曲率半径,  $w$  为束宽,  $P_0$  为激光功率,  $P_c = c\epsilon_0 \lambda^2 / (2\pi n_2)$  为高斯光束自聚焦临界功率。下面将采用(4)式, 讨论高斯光束在非均匀非线性介质中的传输行为。

## 2 高斯光束在非均匀非线性介质中的传输公式

设有一线性  $ABCD$  光学系统, 输入、输出参考面处在同一介质中, 则描述该系统的传输矩阵  $M =$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ 为么模矩阵。}$$

采用  $q$  参数定义(4)式, 并将  $ABCD$  定律推广到高斯光束非线性传输情形, 则  $q$  参数满足:

$$q_2^{-1} = (C + Dq_1^{-1}) / (A + Bq_1^{-1}) \quad (6)$$

一般情况下,  $A, B, C, D$  既可表示实数矩阵元, 也可表示复数矩阵元。当  $A, B, C, D$  取实数时, 将(4)式代入(6)式, 分离实、虚部得:

$$\frac{w_2^2}{w_1^2} = \frac{A^2 + \frac{2AB}{R_1} + B^2 \left[ \frac{1}{R_1^2} + \frac{\lambda^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4} \right]}{AD - BC} \quad (7)$$

应用么模矩阵性质得:

$$w_2^2 = w_1^2 \left[ \left( A + \frac{B}{R_1} \right)^2 + \frac{\lambda^2 B^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4} \right] \quad (8)$$

同理可导出:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\left( A + \frac{B}{R_1} \right) \left( C + \frac{D}{R_1} \right) + BD \frac{\lambda^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4}}{A^2 + \frac{2AB}{R_1} + B^2 \left[ \frac{1}{R_1^2} + \frac{\lambda^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4} \right]} \quad (9)$$

利用(8)式可得:

$$\frac{w_2^2}{R_2} = w_1^2 \left[ A + \frac{B}{R_1} \right] \left[ C + \frac{D}{R_1} \right] + BD \frac{\lambda^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4} \quad (10)$$

(8)式、(10)式为高斯光束在非线性 Kerr 介质中的传输公式。

对于非线性梯度折射率 Kerr 介质, 其折射率可

表示为:

$$n = n_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \beta^2 r^2 \right] + \frac{1}{2} n_2 / E / ^2 \quad (11)$$

式中,  $\beta$  为梯度折射率参数,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $n_0$  为介质轴上的折射率。现将这种介质作如下处理, 其非均匀性用传输矩阵表示:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta z & \sin \beta z / \beta \\ -\beta \sin \beta z & \cos \beta z \end{bmatrix} \quad (12)$$

非线性用  $q$  参数(4)式表示, 将(12)式中的  $A, B, C, D$  矩阵元代入(8)式、(10)式得:

$$w_2^2 = w_1^2 \left[ \cos \beta z + \frac{\sin \beta z}{\beta R_1} + \frac{\lambda^2 \sigma \sin^2 \beta z}{\pi^2 \beta^2 w_1^4} \right] \quad (13)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \left[ \cos \beta z + \frac{\sin \beta z}{\beta R_1} - \beta \sin \beta z + \frac{\cos \beta z}{R_1} \right] + \frac{\sin 2\beta z}{2\beta} \frac{\lambda^2 \sigma}{\pi^2 w_1^4} \quad (14)$$

(13)式和(14)式为高斯光束在非线性梯度折射率介质中的传输公式, 容易证明, 它们与 WEN 等<sup>[9]</sup>导出的公式一致。

需要指出的是, 当光束功率大于临界功率时,  $\sigma$  取负值。由于在介质内可能出现束宽  $w_2 = 0$  的情况, 即产生自聚焦崩塌现象, 傍轴近似失效。因此, 文中仅限于讨论小于临界功率的情况。

## 3 高斯光束通过非线性梯度折射率透镜的传输

高斯光束通过非线性梯度折射率透镜的传输如图1所示。设变换前后高斯光束束腰位于  $P_0, P_3$  平面, 且与透镜左右两端面相距分别为  $l_0$  和  $l_1$ 。

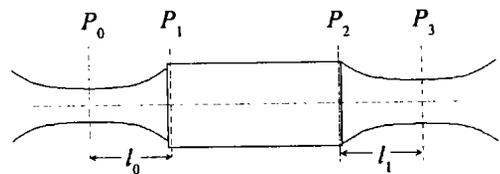


Fig. 1 Propagation of Gaussian beam through a nonlinear GRIN lens

由  $P_0$  面到  $P_1$  面及  $P_2$  面到  $P_3$  面的传输矩阵分别为<sup>[10]</sup>:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

设  $q_0, q_1, q_2, q_3$  分别为  $P_0, P_1, P_2, P_3$  面处的  $q$  参数, 其定义如下:

$$1/q = 1/R - i\lambda / (n_0\pi w^2) \quad (17)$$

式中,  $R$  为光束等相面曲率半径,  $w$  为束宽,  $n_0$  为线性介质的折射率(空气中为 1), 特别地, 在  $P_0, P_3$  面  $R \rightarrow \infty$ 。

使用  $ABCD$  定律, 并分离实、虚部得到在  $P_1$  面上的光束参数:

$$w_1 = w_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda l_0^2}{\pi n_0^2 w_0^4}} \quad (18)$$

$$R_1 = n_0 l_0 + \frac{(\pi n_0 w_0^2 / \lambda)^2}{n_0 l_0} \quad (19)$$

同理, 可得  $P_3$  平面上的  $q$  参数:

$$\frac{1}{q_3} = \frac{n_0(1 + z_0^2 R_2^2)}{n_0 l_1(1 + z_0^2 R_2^2) + R_2 + iz_0 R_2^2} \quad (20)$$

式中,  $z_0 = \lambda / (\pi n_0 w_0^2)$ 。将上式分离实、虚部, 得到光束经透镜传输后的束腰位置  $l_1$  及束腰宽度  $w_3$ :

$$l_1 = - \frac{n_0 R_2^2 \pi^2 w_2^4}{\lambda^2 R_2^2 + \pi^2 n_0^2 w_2^4} \quad (21)$$

$$w_3 = \frac{\lambda R_2 w_2}{\sqrt{\lambda^4 R_2^2 + \pi^2 n_0^2 w_2^4}} \quad (22)$$

式中,  $R_2, w_2$  满足:

$$w_2^2 = \frac{\pi^2 w_0^4 + \lambda^2 l_0^2}{\pi^2 w_0^2} \left[ \cos \beta z + \frac{\sin \beta z}{\beta} \frac{n_0 l_0 \lambda^2}{n_0^2 l_0^2 \lambda^2 + \pi^2 n_0^2 w_0^4} + \frac{\lambda^2 \sigma \sin^2 \beta z}{\pi^2 \beta^2} \frac{\pi^4 w_0^4}{(\pi^2 w_0^4 + \lambda^2 l_0^2)^2} \right] \quad (23)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\pi^2 w_0^4 + \lambda^2 l_0^2}{\pi^2 w_0^2 w_2^2} \left[ \cos \beta z + \frac{\sin \beta z}{\beta} \frac{n_0 l_0 \lambda^2}{n_0^2 l_0^2 \lambda^2 + \pi^2 n_0^2 w_0^4} \right] \times \left[ -\beta \sin \beta z + \frac{n_0 l_0 \lambda^2 \cos \beta z}{n_0^2 l_0^2 \lambda^2 + \pi^2 n_0^2 w_0^4} + \frac{\lambda^2 \sigma \sin 2\beta z}{\pi^2 2\beta} \frac{\pi^4 w_0^4}{(\pi^2 w_0^4 + \lambda^2 l_0^2)^2} \right] \quad (24)$$

(21) 式~(24) 式可称为高斯光束通过非线性梯度折射率介质的成像变换公式<sup>[10]</sup>。

### 4 计算结果与讨论

用 (21) 式~(24) 式进行数值计算。图 2 至图 7

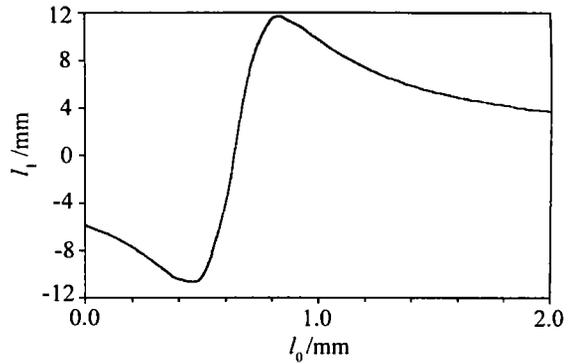


Fig. 2 Variation of the imaging distance  $l_1$  with object distance  $l_0$

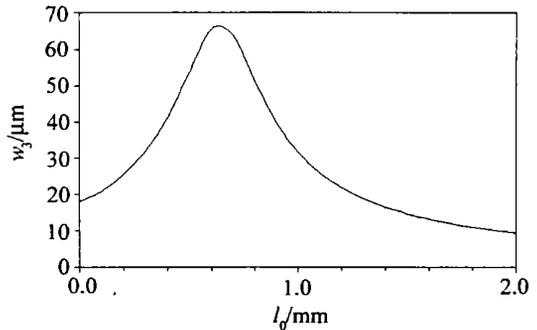


Fig. 3 Variation of the waist width  $w_3$  with object distance  $l_0$

计算中所取参数为<sup>[3]</sup>:  $n_0 = 1.6$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$  及非线性介质长度  $z = 4 \text{mm}$ 。图 2、图 3 为当  $\sigma = 0.5$ ,  $\beta = 0.316 \text{mm}^{-1}$ ,  $w_0 = 10\lambda$  时, 高斯光束经非线性 GRIN 透镜传输后束腰宽度  $w_3$  和束腰位置  $l_1$  (像距) 随入射光束束腰位置  $l_0$  (物距) 的变化关系。由图 2 可以看出, 当  $l_0 < 0.7 \text{mm}$  时,  $l_1$  取负值, 透镜成“虚像”; 当  $l_0 = 0.8 \text{mm}$  时,  $l_1$  达到最大值; 随着  $l_0$  进一步增大,  $l_1$  单调减小。由图 3 可以看出, 当  $l_0 = 0.6 \text{mm}$  时,  $w_3$  达到最大值, 此后随着  $l_0$  的增大,  $w_3$  单调减小, 其结果与 CHEN 等人<sup>[3]</sup>采用变分法所得结果一致; 另外还发现, 当  $l_0 = 2.7 \text{mm}$  时,  $w_3$  小于  $w_0$ , 透镜对高斯光束有“聚焦”作用。图 4、图 5 表示, 当

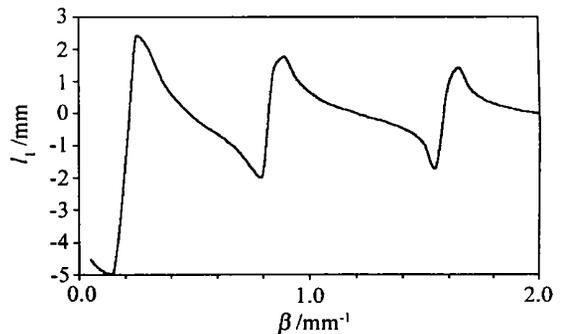


Fig. 4 Variation of the imaging distance  $l_1$  with graded-index coefficient  $\beta$   $\sigma = 0.5$ ,  $l_0 = 2 \text{mm}$ ,  $w_0 = 0.02 \text{mm}$  时,  $w_3$  和  $l_1$  随梯度折射率参数  $\beta$  的变化关系。计算表明,  $l_1$  和  $w_3$  随透镜非均匀性的增加而呈现周期性振荡变化并有下降

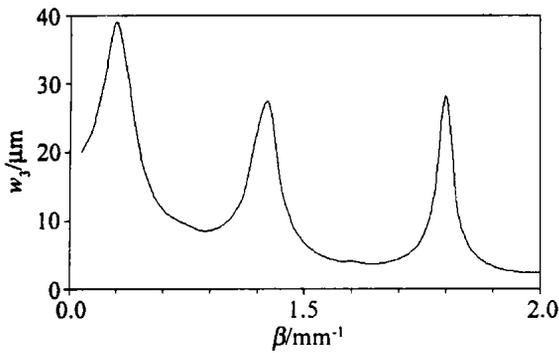


Fig.5 Variation of the waist width  $w_3$  with graded-index coefficient  $\beta$  趋势。图6、图7表示,当  $l_0 = 0.7\text{mm}$ ,  $\beta = 0.316\text{mm}^{-1}$ ,  $w_0 = 10\lambda$  时,  $w_3$  和  $l_1$  随激光归一化功率  $P_0/P_c$

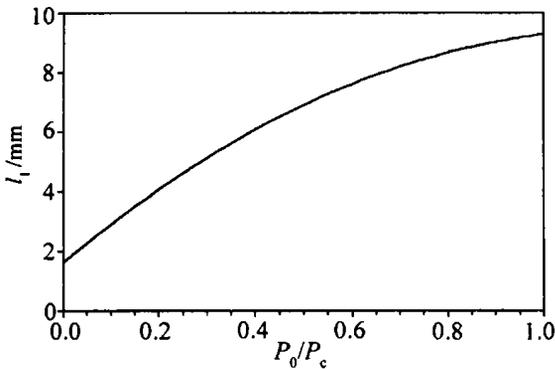


Fig.6 Variation of the imaging distance  $l_1$  with normalized power  $P_0/P_c$

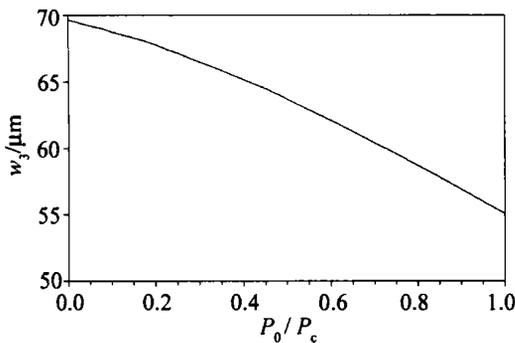


Fig.7 Variation of the waist width  $w_3$  with normalized power  $P_0/P_c$  的变化关系。由图可以看出,随着光束归一化功率  $P_0/P_c$  的增大,  $l_1$  单调增大,  $w_3$  单调减小;计算还表明,当  $l_0$  取值进一步增大时,归一化功率对  $l_1$  和  $w_3$  的影响逐渐变小;当  $l_0 > 3.0\text{mm}$  时,归一化功率的

变化对  $l_1$  和  $w_3$  几乎不产生影响。

## 5 结论

根据无像差自聚焦理论和矩阵光学方法对高斯光束通过非均匀非线性介质的传输特性作了理论分析和数值计算。结果表明,高斯光束通过非线性 GRIN 透镜的传输特性不仅与入射光束的参数有关,而且与透镜介质的非均匀性和非线性有关。当入射光束功率小于临界功率时,采用推广的 ABCD 定律是研究非线性 GRIN 透镜传输特性的一个简单而有效的方法。

## 参考文献

- [1] SUN X H, MA H, MING H, *et al.*, Experimental and theory analysis of Gradient-index lens, Diffraction by matrix optics [J]. Chinese Phys Lett, 2003, 20(3): 374~376.
- [2] MARCHAND E W, NISHIHARA H. Gradient-index optics: introduction by the feature editors [J]. Appl Opt, 1990, 29: 3991~3997.
- [3] CHEN Z H, LAI H. Imaging properties of Gaussian beams with a nonlinear graded-index rod lens [J]. J O S A, 1992, B9(12): 2248~2251.
- [4] ANDERSON D, BONNEDAL M. Variational approach to nonlinear self-focusing of Gaussian laser beams [J]. Phys Fluids, 1979, 22(1): 105~109.
- [5] BELANGER P, PARE C. Self-focusing of Gaussian beams: an alternate derivation [J]. Appl Opt, 1983, 22(9): 1293~1295.
- [6] PORRAS M A, ALDA J, BERNABEU E. Nonlinear propagation and transformation of arbitrary laser beams by means of the generalized ABCD formalism [J]. Appl Opt, 1993, 32(30): 5885~5891.
- [7] FEIT M D, FLECK J A. Beam nonparaxiality, filament formation, and beam breakup in the self-focusing of optical beams [J]. J O S A, 1988, B5(3): 633~640.
- [8] MAGNI V, CCELLO G, SILVESTRI S D. ABCD matrix analysis of propagation of gaussian beams through Kerr media [J]. Opt Commun, 1993, 96(4~6): 348~355.
- [9] 文双春, 范滇元. 梯度折射率介质中高斯光束非线性传输特性 [J]. 强激光与粒子束, 2000, 12(6): 657~660.
- [10] 吕百达. 激光光学——激光束的传输变换和光束质量控制 [M]. 2版, 成都: 四川大学出版社, 1992. 85~97.