

文章编号: 1001-3806(2004)01-0088-03

光纤暗孤子相互作用

王润轩

(宝鸡文理学院 物理系, 宝鸡 721007)

摘要: 用变分原理导出了非线性 Schrodinger 方程两个暗孤子间的相互作用, 它作为孤子间距 Δ 和初位相差 θ 的函数, 随 Δ 的增大而指数地衰减。当两个孤子间初位相差 $\theta < \pi/2$ 时相互排斥, $\theta > \pi/2$ 时相互吸引, $\theta = \pi/2$ 时几乎不存在相互作用。解析与数值计算结果相符。验证了与已有理论的一致有效性。

关键词: 暗孤子; 变分原理; 相互作用; 分裂步长变换法

中图分类号: O473 **文献标识码:** A

Interaction between two dark solitons in optical fibers

WANG Run-xuan

(Department of Physics, Baoji College of Arts and Science, Baoji 721007, China)

Abstract: The interaction between two dark solitons of nonlinear Schrodinger equation is derived with the variational principle approach. The interaction as a function of the soliton's separation Δ and their initial relative phase θ shows that the interaction decreased exponentially as Δ raise, and that two solitons repulse with each other when $\theta < \pi/2$, there is almost no interaction when $\theta = \pi/2$, and attract with each other when $\theta > \pi/2$. Analysis conforms to numerical calculation and it has also proved the validity of the existed theory.

Key words: dark solitons; variational principle; interaction; split-step of Fourier transform

引 言

早在 1973 年, HASEGAWA 和 TAPPERT 几乎同时预言了明、暗孤子的存在^[1]。HASEGAWA 首先指出孤子在光纤通信中有应用的可能, 那时在实验上尚未观察到光孤子。直到 1980 年, MOLLENAUE 在实验中成功的观察到明孤子后, 孤子的研究及其在光通信中的应用研究得到了广泛重视^[2,3]。所谓暗孤子是指在宽的脉冲信号背景上叠加一个很短暂的下陷(相当于时间型暗孤子)。由于在一个连续的或长脉冲的背景上触发暗孤子并控制其相位上的困难, 致使暗孤子的实验观测比明孤子整整晚了 7 年。1987 年, EMPLIT 在光纤中利用 π 相位差以产生奇对称性才观测到具有基暗孤子特性的暗脉冲^[4~7]。自此, 光纤暗孤子通信的实验及理论研究得以发展^[8]。ZHAO 和 EOURKOFF 的数值模拟表明, 暗孤子在抗损耗衰减和噪声方面比明孤

子有更优越的特性^[9]。前苏联学者 DIANOV 等人通过数值模拟提出了产生暗孤子序列的方法^[10]。GREDESKUL 和 KIVSHER 从理论上阐明产生暗孤子不像明孤子那样存在阈值^[11]。ZHAO 和 EOURKOFF 数值观测了两个暗孤子的相互作用^[12], 暗孤子在抗相互作用方面优于明孤子。孤子相互作用直接影响通信的质量和容量^[13,14]。诸多优势表明暗孤子在未来超高码率、超大容量光纤通信中有着更加诱人的应用前景。由于支配孤子在光纤中传输的非线性 Schrodinger 方程虽有诸如逆散射法、Hirota 直接法、Bachklund 变换法等等解析方法, 但解的表达式过于复杂, 很难看出孤子的运动图像和相互作用是什么。迫使人们发展各种近似方法, 寻求简便实用的近似解, ZHAO 等^[12]的研究也正是如此。相对明孤子而言, 暗孤子相互作用研究很少, 理论上没有得到很好解决。作者利用变分原理, 导出非线性 Schrodinger 方程两个相干暗孤子相互作用的解析表达式, 分析了它对孤子运动的影响, 并作了与数值计算的比较。孤子运动的物理图景清晰, 影响相互作用的因素明确, 解析结果与数值计算相符, 与已有理论相吻合。

基金项目: 陕西省教育厅专项基金资助项目(00J K112)

作者简介: 王润轩(1953-), 男, 副教授, 现主要从事非线性光学研究。

E-mail: wangrunxuan2001@yahoo.com.cn

收稿日期: 2003-01-13; 收到修改稿日期: 2003-07-18

1 理论模型

支配孤子在单模光纤中传输的非线性 Schrodinger 方程为:

$$i u_x - \frac{\sigma}{2} u_t + |u|^2 u = 0 \tag{1}$$

根据 σ 的正负不同,可以得到(1)式的两大类解。当 $\sigma = -1$ (即负群速度色散 GVD) 可得到明孤子结果;而当 $\sigma = 1$ (即正色散区), (1)式化为:

$$i u_x - \frac{1}{2} u_t + |u|^2 u = 0 \tag{2}$$

式中, x 和 t 分别为无量纲传输距离与时间。(2)式除了连续稳定解 $|u| = u_0$ 外,还存在一个连续背景上叠加的暗下陷的孤子解——暗孤子。可以直接验证:

$$u = a \tanh[a(t - \tau + vx)] \exp[i v(t + \tau) + i(a^2 + v^2/2)x + i\delta] \tag{3}$$

为(2)式的单孤子解,其中常参数 a, τ, v 和 δ 分别为孤子的高度(宽度的倒数)、中心位置、传播速度和初相。若令 $v = 0$, 就得到如下静止孤子:

$$u = a \tanh[a(t - \tau)] \exp(i a^2 x + i\delta) \tag{4}$$

现在质心系中研究两个大小和传播速度完全相同的孤子。若不存在相互作用,它们相对质心系恒保持静止,由于相互作用不可避免的存在,非线性 Schrodinger 方程(2)式的双孤子解只能近似地表为 u_1, u_2 的线性叠加,即:

$$u = u_1 + u_2 \tag{5}$$

且假定:

$$\begin{cases} u_1 = a \tanh[b(t + \tau)] \exp[-i \mu(t + \tau) + i b^2 x + i \lambda + i \delta_1] \\ u_2 = -a \tanh[b(t - \tau)] \exp[-i \mu(t - \tau) + i b^2 x + i \lambda + i \delta_2] \end{cases} \tag{6}$$

2 相互作用的导出

将(5)式代入 Lagrange 密度函数:

$$l = \frac{i}{2} (u^* u_x - u u_x^*) + \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 \tag{7}$$

l 表示为自由孤子 Lagrange 密度函数 l_0 与相互作用 Lagrange 密度函数 l_{12} 两部分之和:

$$l = l_0 + l_{12} \tag{8}$$

l 对 t 沿整个实轴的积分,即 $L = \int_{-\infty}^{\infty} l dt$, 去掉背景 Lagrange 密度,略去所有小量的高阶项,可得平均 Lagrange 密度函数 $L = L_0 + L_{12}$, 其中:

$$L_0 = -\frac{4a^2 \mu \tau}{b} + \frac{16}{3} a^2 b + \frac{4a^2 \lambda}{b} - \frac{2a^2 \mu^2}{b} - \frac{8a^4}{3b},$$

$$L_{12} = -4a^2 b I_2 \cos \theta + \frac{4a^4}{b} (\cos 2\theta + 2) I_2 -$$

$$\frac{4a^4}{b} [(\cos 2\theta + 2) - 2\cos \theta] - (-4a^2 b - \frac{4a^2 \lambda}{b} + \frac{4a^2 \mu \tau}{b} + \frac{8a^4}{b}) I_1 \cos \theta + \frac{8a^4}{b} I_3 \cos \theta \tag{9}$$

式中, $I_1 = 0.5\{\Delta + 3 - 2\{\ln[\cosh(\Delta + 1.5)] - \ln(\cos 1.5)\}/\tanh \Delta\}$, $I_2 = \Delta \cosh \Delta / \sinh^3 \Delta - 1/\sinh^2 \Delta$, $I_3 = \Delta \cosh \Delta / \sinh^3 \Delta - \cosh^2 \Delta / \sinh^2 \Delta$ 。 $\Delta = 2b\tau$, 正比于两个孤子的间距 2τ 。

$I = \int L dx$ 是人们熟知的作用量,变分原理 $\delta I = 0$ 导致所有参变量函数 $\lambda(x), \mu(x), \alpha(x), \tau(x)$ 所服从的 Lagrange-Euler 方程为一阶常微分方程组。经过一系列计算可得一类似于能量守恒的公式:

$$\frac{1}{2} a^2 g^2(\Delta) \dot{\tau}^2 + p(\Delta) = \epsilon \tag{10}$$

式中, ϵ 为积分常数。(10)式可解释为:在质心坐标系中,每个孤子如同质量为 $a^2 g^2(\Delta)$ 的粒子(不是光子)在势场 $p(\Delta)$ 中运动一样, ϵ 就是每个孤子的总能量,但由于质量 $a^2 g^2(\Delta)$ 随 Δ 而变化,为消除其对相互作用分析带来的不便,将(10)式变形为:

$$\frac{1}{2} \dot{\tau} + F(\Delta, \epsilon) = 0 \tag{11}$$

式中, $F(\Delta, \epsilon) = [p(\Delta) - \epsilon]/a^2 g^2$, 可理解为某种赝势,从而(11)式可理解为单位质量的粒子在赝势场 Δ 中的运动。图 1 表示 $\epsilon = 0$ 时,取 ($b = 1$) 相应于不同初位相差 Δ 的赝势曲线。图中表明:相互作用随 Δ 的增大而指数地衰减。当 $\theta < \pi/2$ 时,暗孤子间相互排斥;当 $\theta = \pi/2$ 时,暗孤子间几乎无相互作用;当 $\theta > \pi/2$ 时,暗孤子间相互吸引。

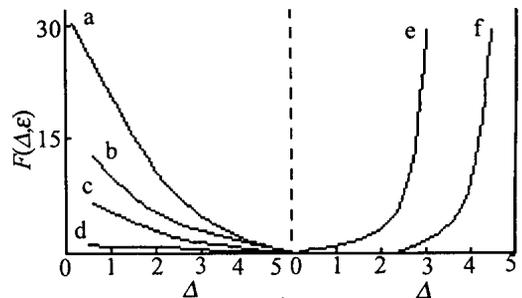


Fig. 1 Potential curves $F(\Delta, \epsilon) - \Delta$ with different values of initial relative phase θ , Δ is the dimensionless separation between two solitons $\epsilon = 0$ a, b, c, d, e, f—the different values of initial relative phase $\theta = 0, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/4$

3 两个暗孤子相互作用的数值研究

基于(2)式,借助分裂步长变换法^[15,16],可对两

个暗孤子相互作用进行数值模拟。图2给出等幅不同初始间隔下两个暗孤子相互作用的演化过程,由图看出:暗孤子表现出排斥特性。当初始间距 $\Delta = 2.5$ 时,排斥势能很大,因此两个暗孤子迅速分离;当 $\Delta = 5$ 时,在归一化距离为 60 至更长的范围内,初始排斥势能极弱,孤子几乎保持着不变的距离。

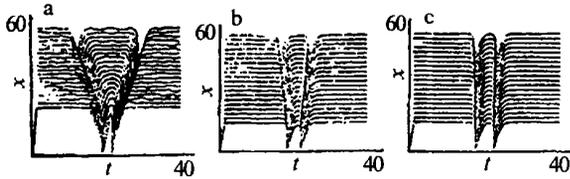


Fig. 2 Interaction between dark solitons
a— $\Delta=2.5$ b— $\Delta=3.75$ c— $\Delta=5.0$

4 解析与数值计算结果的讨论

文献[17]中基于逆散射理论得到同相与反相双明孤子的相互作用力:

$$2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \mp 8e^{-2q} \quad (12)$$

式中, $2q$ 为孤子间距。(12)式有解:

$$\begin{cases} 2(q - q_0) = \ln[\cosh^2(2xe^{-q_0})] \\ 2(q - q_0) = \ln[\cos^2(2xe^{-q_0})] \end{cases} \quad (13)$$

分别相应于反相与同相孤子对。文献[12]中通过数值模拟,给出了两个暗孤子的相互作用经验公式:

$$2(q - q_0) - 2xe^{-2q_0} = \ln[\cosh(2xe^{-2q_0})] \quad (14)$$

由(12)式可得两个暗孤子相互作用力:

$$2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = +4e^{-2q}(2e^{-2q_0} - e^{-2q}) \quad (15)$$

形式上,(12)式与(13)式稍有变化,指数为 $-2q_0$ 仅能表明暗孤子相互作用比明孤子弱,但相互作用机制并不明晰。作者的解析结果是严格的。分析表明:两个暗孤子是短程相互作用,在 $\Delta = 3$ 时, $F(\Delta, \epsilon)$ 才显著不为 0。数值计算在 Δ 较大时与解析结果相符。作者的解析与计算显然优于文献[12]中的结果。

5 结论

两个暗孤子的相互作用在 Δ 较小时相互作用

较强,随着 Δ 的增大相互作用明显减弱,它作为孤子间距 Δ 和初位相差 θ 的函数,随 Δ 的增大而指数地衰减,当两个孤子间初位相差 $\theta < \pi/2$ 时相互排斥, $\theta > \pi/2$ 时相互吸引, $\theta = \pi/2$ 时几乎不存在相互作用。解析与数值计算结果相符,也验证了与已有理论的一致有效性。当初始间距 $\Delta = 5$ 时,几乎无相互作用。明孤子与暗孤子相互作用特性的根本区别源于它们场分布中的相位不同。明孤子在整个脉冲中有恒定的相位,而暗孤子在中心处有一相位突变,正是这一相位突变使其在相互作用方面与明孤子规律不同。当 $\Delta = 5$ 时,暗孤子在归一化距离为 60 至更长距离范围内因其初始排斥势能极弱,孤子几乎保持着不变的间距,这显示出暗孤子的通信应用前景。

参考文献

- [1] HASEGAWA A, TAPPERT F. A P L, 1973, 23(7):142~145.
- [2] WEINER J S, PEARSON D B, BLOW K J. A P L, 1983, 49(5):925~930.
- [3] TAL K, HEGARTY J, TSANG W T. A P L, 1987, 51(6):86.
- [4] MOLLENAUER L F, STOLEN R H, GORDEN G P. Phys Rev Lett, 1980, 45(3):1095~1097.
- [5] HASEGAWA A, KODAMA Y. Proc of IEEE, 1981, 69(23):174~176.
- [6] HASEGAWA A, KODAMA Y. Opt Lett, 1991, 15(8):1443~1446.
- [7] EMPLIT P, HAMAIDE J P. Opt Commun, 1987, 62(4):3749~3751.
- [8] ALAN G R, SKINNER S K, YAN J R. Opt Lett, 1991, 15(9):156~157.
- [9] ZHAO W, BOURKOFF E. Opt Lett, 1989, 13(10):703~704.
- [10] DIANOV E M, MAMYSHEV P V, BLOW K J. Opt Lett, 1989, 13(12):1008~1010.
- [11] GREDESKUL S A, KIVSHER Y S. Opt Lett, 1989, 13(14):1281~1283.
- [12] ZHAO W, BOURKOFF E. Opt Lett, 1987, 11(14):1371~1374.
- [13] GEORGE T. Opt Commun, 1991, 25(7):195~196.
- [14] ROTHENBERG J E. Opt Lett, 1990, 23(15):443~444.
- [15] TAHA T R, ABLOWITZ M J. A P L, 1984, 55(10):203~205.
- [16] HARDIN R H, TAPPERT F D. SIAM Rev, 1973, 15(1):423~425.
- [17] GORDON J P. Opt Lett, 1983, 8(4):596~597.