

文章编号: 1001-3806(2003)05-0447-03

HG 光束经内含光阑光学系统传输的递推算法*

陶向阳 涂海华 吕百达

(江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌, 330027)

摘要: 推导出了厄米-高斯(HG)光束通过内含硬边光阑的近轴 ABCD 光学系统传输递推公式, 由此可得出任意阶次的 HG 光束场分布的解析表达式, 并可解析地研究光阑对传输的影响。给出了数值计算用以说明所得的解析结果的应用和优点。

关键词: 厄米-高斯(HG)光束; 近轴光学系统; 内置光阑; 递推算法

中图分类号: O435 文献标识码: A

The recurrence algorithm of Hermit-Gaussian beams through a paraxial optical system with an internal hard-edge aperture

Tao Xiangyang, Tu Haihua, Lü Baida

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027)

Abstract: A recurrence propagation formula of Hermit-Gaussian (HG) beams through a paraxial optical ABCD system with an internal hard edge aperture is derived, from which the analytical propagation equation of HG beams of any orders can be obtained, and the effect of the aperture on the propagation can be studied analytically. Numerical examples are put forward to illustrate the application and advantage of our analytical results.

Key words: Hermite Gaussian (HG) beam; paraxial optical system; internal aperture; recurrence algorithm

引言

对激光束通过有光阑近轴光学系统的传输问题, 除了对少数光束如高斯光束、双曲余弦高斯光束^[1]能得到解析的传输公式外, 一般情况下难以得到解析结果。因此, 需要直接对广义惠更斯-菲涅耳衍射积分^[2]进行数值计算。由于直接数值积分所耗时多, 对大型复杂多光阑光学系统中的光传输, 在 Pentium 机上计算变得十分困难, 寻求解析和近解析方法的工作引起广泛的研究兴趣^[3~6]。笔者对厄米高斯(HG)光束经内含硬边光阑的复杂 ABCD 光学系统的传输问题进行研究, 用递推方法得出了解析的传输公式, 并对光阑效应进行了分析。

1 理论模型

在笛卡尔坐标系中, 束腰位置位于 $z = 0$ 处的二维 HG 光束的场分布为:

$$E(x, 0) = H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) \exp \left[-\frac{ikx^2}{2q_0} \right] \quad (1)$$

式中, $q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = iz_0$ (2)

H_m 为 m 阶厄米多项式, w_0 为对应基模高斯光束的束腰宽度, z_0 为瑞利长度, λ 为波长。本文中研究 HG 光束通过内含硬边光阑的 ABCD 光学系统的传输问题。如图 1 所示, 设 H-G 光束通过 $z = z_1$

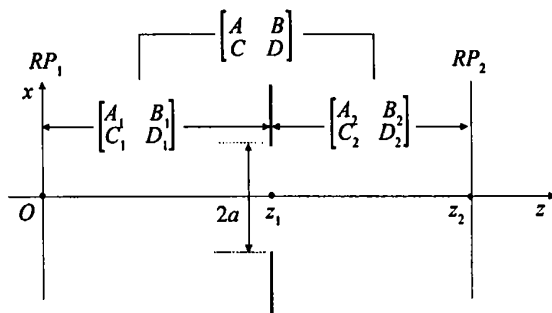


Fig. 1 A general optical ABCD system including an internal hard edge aperture

处含有宽度为 a 的硬边光阑的近轴 ABCD 光学系统, 且:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式, 在 $z = z_1$ 处

* 江西省自然科学基金资助项目。

作者简介: 陶向阳, 男, 1965 年 5 月出生。教授。现从事光束传输与变换研究。

收稿日期: 2002-12-17; 收到修改稿日期: 2003-04-14

(未经光阑)场分布为:

$$E(x, z_1^-) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(x', 0) \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda B_1}(A_1 x'^2 - 2xx' + D_1 x^2)\right] dx' \quad (4)$$

式中已略去了一个不重要的随传输距离 z 变化的相位因子。对(4)式积分得^[7]:

$$E(x, z_1^-) = A_m H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w_1} \right] \exp\left[-\frac{ik}{2q_1} x^2\right] \quad (5)$$

$$\text{式中, } A_m = \left[A_1 + \frac{B_1}{q_0} \right]^{-1/2} \left[\frac{A_1 - B_1/q_0}{A_1 + B_1/q_0} \right]^{m/2} \quad (6)$$

$$\text{复参数 } q_1 \text{ 遵从 } ABCD \text{ 定律: } q_1 = \frac{A_1 q_0 + B_1}{C_1 q_0 + D_1} \quad (7)$$

$$\text{束宽: } w_1 = \sqrt{\frac{-\lambda}{\pi \text{Im}(1/q_1)}} \quad (8)$$

于是, 输出面($z = z_2$ 处)的场分布:

$$E(x, z_2) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B_2}} \cdot \int_{-a}^a E(x', z_1^-) \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda B_2}(A_2 x'^2 - 2xx' + D_2 x^2)\right] dx' = A_m \sqrt{\frac{i}{\lambda B_2}} \cdot \int_{-a}^a H_m \left[\frac{\sqrt{2}x'}{w_1} \right] \exp\left[-\left(\frac{ik}{2q_1} + \frac{i\pi A_2}{\lambda B_2}\right) x'^2 - \frac{i\pi}{\lambda B_2}(-2xx' + D_2 x^2)\right] dx' \quad (9)$$

令 $m(m = 0, 1, 2 \dots)$ 阶 H-G 光束的场分布为 E_m , 并将上式改写成:

$$E_m = S \int_{-a}^a H_m[\sqrt{2}x'/w_1] \exp[-(Px' - Qx)^2] dx' \quad (10)$$

$$\text{式中, } P = \sqrt{\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{q_1} + \frac{A_2}{B_2} \right)} \quad (11)$$

$$Q = \frac{i\pi}{\lambda B_2 P} \quad (12)$$

$$S = A_m \sqrt{\frac{i}{\lambda B_2}} \cdot \exp\left[\left(Q^2 - \frac{i\pi D_2}{\lambda B_2}\right) x^2\right] \quad (13)$$

根据厄米多项式的性质:

$$\left. \begin{aligned} H_m(-x) &= (-1)^m H_m(x) \\ H_{m+1}(x) &= 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x) \\ H_m'(x) &= 2mH_{m-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

及误差函数的定义:

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-y}^y \exp(-t^2) dt \quad (15)$$

对(10)式直接积分运算后得到基模高斯光束($m =$

0) 及 TEM₁ 模 H-G 光束($m = 1$) 的解析表示分别为:

$$E_0 = \frac{\sqrt{\pi}FS}{2P} \quad (16)$$

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}S}{P^2 w_1} \{ \exp[-(aP + Qx)^2] - \exp[-(aP - Qx)^2] + \sqrt{\pi}QFx \} \quad (17)$$

$$\text{式中, } F = \text{erf}(aP - Qx) + \text{erf}(aP + Qx) \quad (18)$$

利用厄米函数的性质, 将(10)式改写为:

$$E_m = S \int_{-a}^a \frac{1}{2(m+1)} H_{m+1}' \left[\frac{x'}{w_1} \right] \times \exp[-(Px' - Qx)^2] dx' \quad (19)$$

$$\text{式中, } w_1' = w_1/\sqrt{2} \quad (20)$$

对(19)式进行分部积分处理, 得:

$$E_m = \frac{Sw_1'}{2(m+1)} H_{m+1} \left[\frac{x'}{w_1'} \right] \exp[-(Px' - Qx)^2] \Big|_{-a}^a + \frac{Sw_1'}{2(m+1)} \int_{-a}^a 2P(x' - Qx) H_{m+1} \left[\frac{x'}{w_1'} \right] \times \exp[-(Px' - Qx)^2] dx' = \frac{Sw_1'}{2(m+1)} H_{m+1} \left[\frac{a}{w_1'} \right] \times \{ \exp[-(aP - Qx)^2] - (-1)^{m+1} \exp[-(aP + Qx)^2] \} + \frac{Pw_1'^2}{2(m+1)} E_{m+2} + Pw_1'^2 E_m - \frac{Pw_1' Qx}{m+1} E_{m+1} \quad (21)$$

即:

$$E_{m+2} = \frac{2(m+1)}{Pw_1'^2} \left(\frac{Pw_1' Qx}{m+1} E_{m+1} + (1 - Pw_1'^2) E_m - \frac{Sw_1'}{2(m+1)} H_{m+1} \left[\frac{a}{w_1'} \right] \{ \exp[-(aP - Qx)^2] - (-1)^{m+1} \exp[-(aP + Qx)^2] \} \right) \quad (22)$$

对(22)式进行简单运算, 并将(20)式回代后可得到:

$$E_{m+1} = \frac{2\sqrt{2}QxE_m}{Pw_1} + 2m \left[\frac{2}{P^2 w_1'^2} - 1 \right] E_{m-1} - \frac{\sqrt{2}S}{P^2 w_1} H_m \left[\frac{\sqrt{2}a}{w_1} \right] \{ \exp[-(aP - Qx)^2] - (-1)^m \exp[-(aP + Qx)^2] \} \quad m \geq 1 \quad (23)$$

(23)式表明, 如果知道 E_{m-1}, E_m , 就可以对(23)式作递推运算得到 E_{m+1} , 即利用(23)式进行递推需要两个起值, (16)式和(17)式正好给出了 E_0 和 E_1 的解析表达式。利用(16)式、(17)式及(23)式, 就可以得到 TEM₂, TEM₃, TEM₄ ... 模 H-G 光束的场分布函数, 例如:

$$E_2 = \frac{S}{P^3 w_1^3} \{ -4(aP - Qx) \exp[-(aP + Qx)^2] - 4(aP + Qx) \exp[-(aP - Qx)^2] +$$

$$\sqrt{\pi}F(2 - P^2w_1^2 + 4Q^2x^2) \quad (24)$$

$$E_3 = -\frac{2\sqrt{2}S}{P^4w_1^3}\{\exp[-(aP + Qx)^2] \times [(4 + 4a^2P^2 - 3P^2w_1^2 + 4aPQx + 4Q^2x^2) \times (-1 + \exp(4aPQx)) + 8aPQx] - \sqrt{\pi}FQx(6 - 3P^2w_1^2 + 4Q^2x^2)\} \quad (25)$$

$$E_4 = \frac{2\sqrt{2}QxE_3}{Pw_1} + 6\left(\frac{2}{P^2w_1^2} - 1\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}S}{P^2w_1}H_3\left[\frac{\sqrt{2}a}{w_1}\right] \times \{\exp[-(aP - Qx)^2] + \exp[-(aP + Qx)^2]\} \quad (26)$$

...
当光阑效应可忽略时, $F = 2$, (16) 式、(17) 式、(24) 式和(25) 式分别简化为:

$$E_0 = \frac{\sqrt{\pi}S}{P} \quad (27)$$

$$E_1 = \frac{2\sqrt{2\pi}QxS}{P^2w_1} \quad (28)$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\pi}S}{P^3w_0^2}(2 - P^2w_0^2 + 4Q^2x^2) \quad (29)$$

$$E_3 = \frac{4\sqrt{2\pi}S}{P^4w_0^3}Qx(6 - 3P^2w_0^2 + 4Q^2x^2) \quad (30)$$

容易证明, (27) 式~ (30) 式与文献[7] 中的(4) 式是一致的。由此, 光阑对 TEM_m 模 H-G 光束($m = 0, 1, 2, 3$) 传输的影响可解析地表示为:

$$E_0 - E_0 = \frac{\sqrt{\pi}S}{2P}(2 - F) \quad (31)$$

$$E_1 - E_1 = \frac{\sqrt{2\pi}S Qx}{P^2w_1}(2 - F) - \frac{\sqrt{2}S}{P^2w_1} \times \{\exp[-(aP + Qx)^2] - \exp[-(aP - Qx)^2]\} \quad (32)$$

$$E_2 - E_2 = \frac{\sqrt{\pi}S}{P^3w_1^2}(2 - P^2w_1^2 + 4Q^2x^2)(2 - F) + \frac{S}{P^3w_1^2}\{4(aP - Qx)\exp[-(aP + Qx)^2] + 4(aP + Qx)\exp[-(aP - Qx)^2]\} \quad (33)$$

$$E_3 - E_3 = \frac{2\sqrt{2}S}{P^4w_1^3}\exp[-(aP + Qx)^2] \times \{(4 + 4a^2P^2 - 3P^2w_1^2 + 4aPQx + 4Q^2x^2) \times [-1 + \exp(4aPQx)] + 8aPQx\} + \frac{2\sqrt{2\pi}S}{P^4w_1^3}Qx(6 - 3P^2w_1^2 + 4Q^2x^2)(2 - F) \quad (34)$$

2 计算结果及分析

将(16) 式、(17) 式和递推公式(23) 式用于图 2

所示二薄透镜间有一硬边光阑的光学系统, 透镜焦

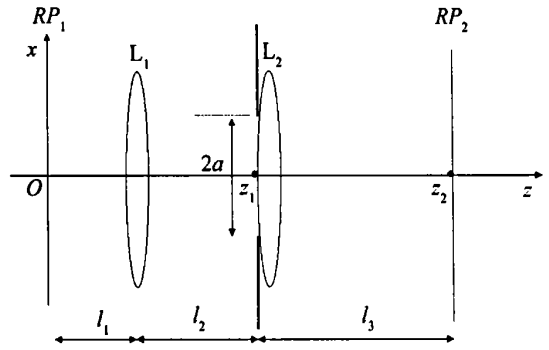


Fig. 2 Two lens optical system with an internal hard edge aperture 距分别为 f_1 和 f_2 , 透镜 L_1 距入射参考面 RP_1 为 l_1 , 两透镜间相距 l_2 , 透镜 L_2 距输出参考面 RP_2 为 l_3 , 进行数值计算, 得出 H-G 光束经系统传输后的相对光强分布如图 3 所示。计算所用参数为,

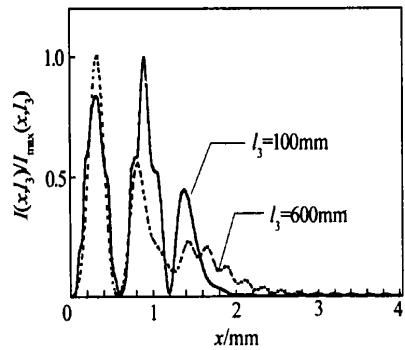


Fig. 3 Relative intensity distributions of a TEM₂ H-G beam through the system shown in Fig. 2, the calculation parameters are seen in the text

$\lambda = 1.06\mu\text{m}$, $m = 7$, $f_1 = f_2 = 200\text{mm}$, $l_1 = 300\text{mm}$, $l_2 = 400\text{mm}$, $a = 1.5\text{mm}$, $w_0 = 1\text{mm}$; 图中实线对应于 $l_3 = 100\text{mm}$, 虚线对应于 $l_3 = 600\text{mm}$ 。计算结果与直接对(10) 式作数值积分所得结果完全一致, 这正是预期的结果, 因为推导出的传输公式在近轴近似下是严格的解析结果。光阑效应对 H-G 光束传输影响的数值结果如图 4 所示, 计算参数 $m = 2$, 其余参数与图 3 中实线所用参数相同。图 4 给出了 a 分别为 0.5mm, 1.0mm, 1.5mm, 2.0mm 和 2.7mm 时 $|E_2 - E_2|/|E_2|_{\text{max}}$ 随 x 的变化图形。由图可知, 随 a 的增大, 光阑效应逐渐减弱。对 TEM₂ 模, 当 $a = 2.7\text{mm}$ 时 $|E_2 - E_2|/|E_2|_{\text{max}}$, 光阑效应可忽略。

大量的数值计算表明, 递推算法与采用直接数值积分计算结果相比可大大地缩短机时。以图 3 中 $l_3 = 100\text{mm}$ 时的计算为例, 机时比为 1:120, 当 $a = 3\text{mm}$, 时机时比为 1:250; 这充分说明用本文中所述

(下转第 452 页)

高。当 $I = 14A$ 时, 对应 g^* 参数(见图 3)上的 Pb 临界点, 此时, 谐振腔已在非稳状态, 功率明显的下降, 直到越过该非稳区进入下一稳定区, 激光功率又会线性提高。当增至 $I = 24A$, 激光器处于又一非稳区($x_3 \sim x_4$ 段), 输出功率又开始下降。

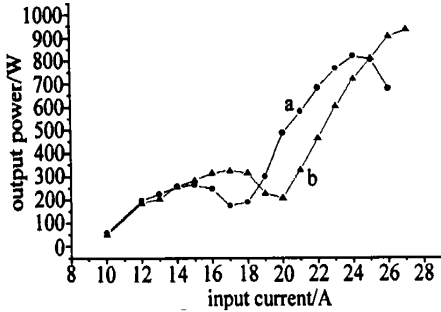


Fig. 5 Output power versus pump power
a— $d = 200mm$ b— $d = 155mm$

为了提高激光功率的输出, 可适当减小 d 值(即缩短腔长使 d 从 $200mm$ 减小到 $155mm$), 则图 5 中曲线 a 向右移动(变为曲线 b 的情况)。使得在较高注入功率时光腔能够处于稳定的状态, 也就提高输出功率。

这种缩短腔长的设计方案受到了激光器机械设计的限制。不过可以通过调节各个棒的注入电流而使 3 个棒热焦距尽量相等, 对棒的热效应进行补偿, 工作曲线更接近理想状态, 稳定区间得以扩大。图 6 为 $d = 180mm$ 时采用这种补偿和未采用补偿而得到的对比曲线。可以看出注入电流补偿前功率

曲线 A 有功率明显下降的现象。补偿后得到的曲线 B 则线性增长, 在高注入的情况下也未出现功率的下降的趋势。

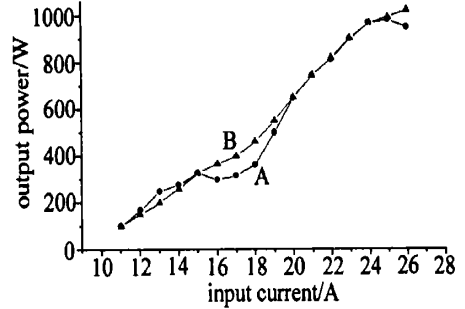


Fig. 6 Output laser power versus pump power
A— $d = 180mm$ (not using thermal compensation) B— $d = 180mm$ (using thermal compensation)

3 结 论

多棒串接高功率固体激光器热效应是导致激光器输出功率下降的主要因素。在实际光腔设计中, 通过对棒的热效应的补偿来达到棒间的匹配耦合是解决上述问题的最佳方案。

感谢黄维玲、王海林、王 英、曹红兵、陈泽民、杨克成等老师和同学的悉心指导及热情帮助。

参 考 文 献

[1] Driedger K P, Hflander R M, Weber H. IEEE J Q E, 1988, 24 (4): 665~ 673.
[2] 吕百达. 激光光学. 成都: 四川大学出版社, 1992: 16~ 53.
[3] 周炳琨. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 1995: 142~ 150.

(上接第 449 页)

方法来研究 H-G 光束的实用性。

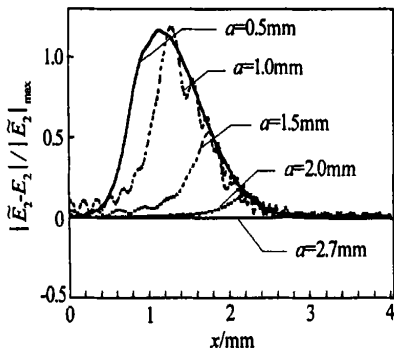


Fig. 4 Effect of hard edge aperture on the TEM₂ H-G beam

3 小 结

对 H-G 光束经内含硬边光阑的复杂 ABCD 光学系统的传输进行了研究, 推导出了 H-G 光束传输的递推公式, 由此可得任意阶 H-G 光束的传输公式,

且能解析地对光阑效应进行研究。所得公式是严格的解析结果, 适用于含硬边光阑且 $B \neq 0$ 的近轴 ABCD 光学系统。对 $B = 0$ 情况, 需用矩阵分解方法另加推导。为表述简明, 文中公式是用二维(x, z) H-G 光束写出的, 但推广到三维(x, y, z) H-G 光束是直截了当的。递推算法简单、便于编程实现, 且比直接数值积分计算大大地缩短了机时, 具有实际应用价值。

参 考 文 献

[1] Lü B D, Ma H, Zhang B. Opt Commun, 1999, 164: 165~ 170.
[2] Collins S A. J O S A, 1970, 60(9): 1168~ 1177.
[3] Wen J J, Breazeale M A. J Acoust Soc Amer, 1988, 83(7): 1752~ 1756.
[4] Ding D, Liu X. J O S A, 1999, A 16: 1286~ 1293.
[5] Lü B D, Luo S R. J Mod Opt, 2001, 48: 2169~ 2178.
[6] 陶向阳, 周南润, 吕百达. 强激光与粒子束, 2003, 15(1): 50~ 54.
[7] Lü B D, Zhang B, Cai B W. J Mod Opt, 1993, 40: 1736~ 1743.