

文章编号: 1001-3806(2003)04-0299-03

## 高斯光束通过含硬边光阑复杂光学系统的传输\*

赵光普<sup>1,2</sup> 吕百达<sup>1,3</sup>

(<sup>1</sup>四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064) (<sup>2</sup>宜宾学院电子信息与工程系, 宜宾, 644007)  
(<sup>3</sup>华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉, 430074)

摘要: 使用矩阵分解方法, 推导出了高斯光束通过内含硬边光阑  $ABCD$  光学系统的解析传输公式, 并作了物理分析。以高斯光束通过空间滤波器所作的数值计算为例对理论结果进行了说明。对进一步的推广应用亦作了讨论。

关键词: 传输公式; 矩阵分解; 含硬边光阑  $ABCD$  光学系统; 高斯光束  
中图分类号: O435 文献标识码: A

## Propagation of Gaussian beams passing through complicated $ABCD$ optical system with internal hard edge aperture

Zhao Guangpu<sup>1,2</sup>, Lü Baida<sup>1,3</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)  
(<sup>2</sup> Department of Electronic Information and Engineering, Yibin College, Yibin, 644007)  
(<sup>3</sup> National Laboratory of Laser Technology, HUST, Wuhan, 430074)

**Abstract:** Based on matrix decomposition method, the analytical propagation expression for Gaussian beams passing through complicated  $ABCD$  optical systems with internal hard edge aperture is derived and analyzed physically. The theoretical result is illustrated with numerical examples of Gaussian beams passing through a spatial filter. Finally its extensive application is also discussed.

**Key words:** propagation equation; matrix decomposition;  $ABCD$  optical system with internal hard edge aperture; Gaussian beam

### 引 言

迄今, 从 Collins 公式<sup>[1]</sup>出发, 对光束通过近轴  $ABCD$  光学系统的传输已作了许多研究<sup>[2,3]</sup>。当有硬边光阑时, 若光阑位于入射参考面上, 利用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数叠加的方法, 常可推出近似解析传输公式<sup>[3,4]</sup>。但若硬边光阑不在入射参考面上, 而置于复杂光学系统内时, 直接利用 Collins 公式遇到困难。人们对解析公式感兴趣的主要原因是: (1) 对光束在多个光学元件中的传输问题, 使用解析公式可大量节约机时, 便于在微机上操作; (2) 可直接从解析公式出发, 分析光束的传输变换规律、影响光束场分布的物理因素、以及硬

边光阑对光束质量的影响等等。笔者提出了一个研究光束通过内含硬边光阑复杂  $ABCD$  光学系统传输变换的解析方法, 对所得解析公式作了物理分析, 并以高斯光束通过空间滤波器为例进行了数值计算和讨论。最后, 指出了文中所用方法和所得结果可能的推广应用。

### 1 理论推导

高斯光束通过图 1 所示内含硬边光阑近轴复杂  $ABCD$  光学系统时, 可采用矩阵分解的方法<sup>[4]</sup>, 将  $ABCD$  矩阵等效分解为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_2 C_1 & A_2 B_1 + B_2 D_1 \\ A_1 C_2 + C_1 D_2 & B_1 C_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$  分别为入射参考面  $RP_1$  至光阑所在平面  $RP_0$  之间与  $RP_0$  至出射参考

\* 华中科技大学激光技术国家重点实验室资助项目。

作者简介: 赵光普, 男, 1963 年 5 月出生。副教授。现从事激光光学的教学与科研工作。

收稿日期: 2002-08-16; 收到修改稿日期: 2002-11-18

面  $RP_2$  之间光学系统的传输矩阵。

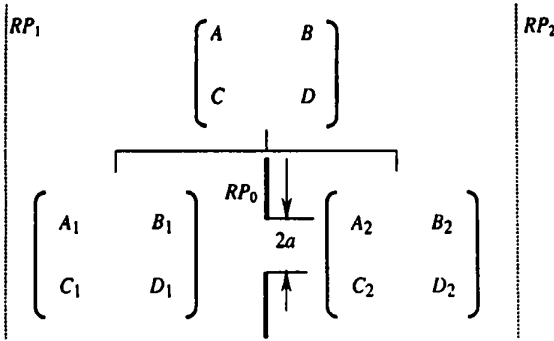


Fig. 1 Complicated optical system consisting of two  $AB_1C_1D_1$  optical systems ( $i=1,2$ ) and an internal hard-edge aperture

设 1 维高斯光束在入射参考面  $RP_1$  上的场分布为:

$$E_0(x_0, 0) = \exp(-x_0^2/w_0^2) \quad (2)$$

式中,  $w_0$  为束腰宽度, 为简单起见, 这里只研究 1 维情况, 但很容易推广到 2 维。光束通过近轴  $ABCD$  光学系统的传输遵从 Collins 公式<sup>[1]</sup>:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x_0, 0) \times \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax_0^2 - 2xx_0 + Dx^2)\right] dx_0 \quad (3)$$

式中,  $\lambda$  为波长,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数。(2) 式代入 (3) 式积分得:

$$E_1(x_1, z) = \sqrt{\frac{ik}{2B_1}} \frac{1}{\sqrt{P_0}} \exp(-Q_0 x_1^2) \quad (4)$$

式中,

$$P_0 = (2B_1 + ikA_1w_0^2)/2B_1w_0^2 \quad (5)$$

$$Q_0 = ikD_1/2B_1 + k^2/4B_1^2P_0 \quad (6)$$

(4) 式为高斯光束通过  $A_1B_1C_1D_1$  光学系统后到达硬边光阑所在  $RP_0$  参考面前的场分布解析传输公式。  $E_1(x_1, z)$  经带硬边光阑 (半宽度为  $a$ ) 的  $A_2B_2C_2D_2$  光学系统的传输仍由 (3) 式表征, 但积分限应由  $-a$  至  $a$ 。将 (4) 式代入 (3) 式, 利用误差函数公式<sup>[6]</sup>:

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y}^y \exp(-t^2) dt \quad (7)$$

积分之, 最后结果整理为:

$$E(x, z) = \frac{kF}{2iR} \sqrt{\frac{B_2}{P_0B_1}} \times \exp\left[-\frac{k(k + iD_2R^2/2B_2)}{R^2} x^2\right] \quad (8)$$

式中,  $R = \sqrt{2B_2(iA_2k + 2B_2Q_0)}$  (9)

$$F = \text{erf}\left[\frac{kx - iaR^2/2B_2}{R}\right] - \text{erf}\left[\frac{kx + iaR^2/2B_2}{R}\right] \quad (10)$$

(8) 式即为高斯光束通过内含硬边光阑复杂  $ABCD$  光学系统解析传输公式, 是文中的主要解析结果。(8) 式表明, 高斯光束通过内含硬边光阑复杂  $ABCD$  光学系统后, 其场分布  $E(x, z)$  不仅与光学系统矩阵元有关, 而且还依赖于硬边光阑的宽度  $a$ 。与文献 [5] 中采用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的近似方法不同, 笔者所得 (8) 式是一个用误差函数表示的解析传输公式。计算结果表明, 利用 (8) 式和与直接对 Collins 公式 (3) 式作数值积分所得结果完全一致。

特例:

(1) 硬边光阑的孔径  $a \rightarrow \infty$  时, 易证 (8) 式简化为:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{ik}{2B}} \frac{1}{\sqrt{P'}} \exp[-Q'x^2] \quad (11)$$

式中,  $P' = \frac{1 + (ikA/2B)w_0^2}{w_0^2} \quad (12)$

$$Q' = \frac{ikD}{2B} + \frac{k^2}{4B^2P'} \quad (13)$$

(11) 式为高斯光束通过无光阑限制  $ABCD$  光学系统解析传输公式。与文献 [7] 中 (5) 式, 当  $A_0 = 1, \Omega_0 = 0$  时是一致的。

(2) 若  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 即高斯光束通过带

硬边光阑  $A_2B_2C_2D_2$  光学系统的传输。(8) 式成为:

$$E(x, z) = \frac{w_0S}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \exp\left[\frac{k(D_2T^2 - kw_0^2)}{2B_2iT^2} x^2\right] \quad (14)$$

式中,  $T = \sqrt{-2iB_2 + A_2kw_0^2} \quad (15)$

$$S = \text{erf}\left[\frac{(1+i)(aT^2 - kw_0^2x)}{2w_0T\sqrt{B_2}}\right] + \text{erf}\left[\frac{(1+i)(aT^2 + kw_0^2x)}{2w_0T\sqrt{B_2}}\right] \quad (16)$$

当  $A_0 = 1, \Omega_0 = 0$  时, (14) 式与文献 [6] 中 (16) 式一致。

## 2 数值计算及结果分析

现以高斯光束通过图 2 所示空间滤波器的传输为例, 说明 (8) 式的应用。滤波器由共焦放置的焦距分别为  $f_1, f_2$  的透镜  $F_1, F_2$  及滤波小孔组成。设入射参考面  $RP_1(z=0)$  位于透镜  $F_1$  前方  $d_1$  处, 出射参考面  $RP_2$  位于透镜  $F_2$  后方  $d_2$  处, 滤波小孔的半宽为  $a$ , 则  $A_1B_1C_1D_1$  和  $A_2B_2C_2D_2$  变换矩阵分别为:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_1 \\ -1/f_1 & 1 - d_1/f_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d_2/f_2 & f_2 \\ -1/f_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

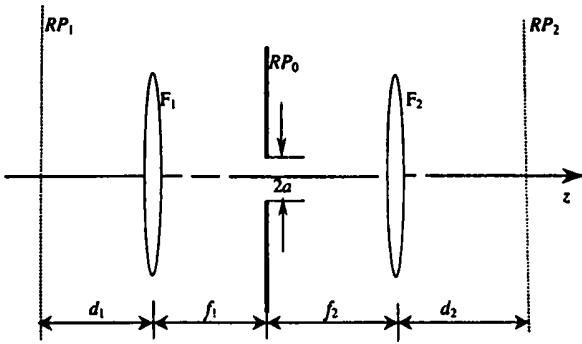


Fig. 2 Schematic illustration of the spatial filter

将(17)式、(18)式代入(8)式即可得到高斯光束通过带有硬边光阑的空间滤波器时,场分布解析公式:

$$E(x, z) = \frac{kFw_0}{2iR} \frac{f_2}{\sqrt{f_1}} \exp\left[-\frac{k^2}{R^2}x^2\right] \quad (19)$$

式中,

$$Q_0 = \frac{ik}{2f_1} \left(1 - \frac{d_1}{f_1}\right) + \frac{k^2 w_0^2}{4B_1^2} \quad (20)$$

$$R = \sqrt{2f_2 \left[ ik \left(1 - \frac{d_2}{f_2}\right) + 2f_2 Q_0 \right]} \quad (21)$$

$$F = \operatorname{erf}\left[\frac{kx - iaR^2/2f_2}{R}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{kx + iaR^2/2f_2}{R}\right] \quad (22)$$

设滤波器透镜焦距  $f_1 = f_2 = f = 0.8\text{m}$ , 且  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $\lambda = 1.06\mu\text{m}$ ,  $w_0 = 1.2\text{mm}$ , 将以上数值代入(19)式中进行数值计算, 典型例示于图 3、图 4 中。图 3

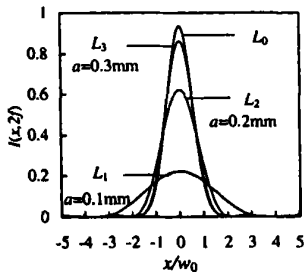


Fig. 3 Intensity distributions  $I(x, 2f)$  at the plane  $z = 2f$  of a Gaussian beam passing through a spatial filter, the calculation parameters are seen in the text

中  $L_0$  为高斯光束在自由空间中传输  $2f$  距离后, 在  $z = 2f$  平面上的光强分布,  $L_1, L_2, L_3$  为高斯光束通过空间滤波器后, 滤波小孔半径分别为  $0.1\text{mm}, 0.2\text{mm}, 0.3\text{mm}$  时,  $z = 2f$  平面上的光强分布。从

图中可以看出, 入射高斯光束通过空间滤波器后, 由于滤波小孔的衍射作用, 在中央主极大两侧对称出现一些强度为极值的次极大点。滤波小孔越小, 衍射效应越明显。图 4 为高斯光束通过透镜焦距分别为  $0.6\text{m}, 0.8\text{m}, 1\text{m}$  的空间滤波器时, 在  $z = 2f$  面处轴上光强随空间滤波器截止频率  $\nu = 2\pi a/\lambda$  的变化曲线。可以发现截止频率较低时, 轴上光强受  $f$  的变化影响不大, 当  $0 < \nu < 20\text{cm}^{-1}$  时, 3 条曲线基本重合, 说明尽管透镜焦距  $f$  不同, 相同  $\nu$  值点对应轴上光强却是相同的; 当  $\nu > 30\text{cm}^{-1}$  时, 最大光强趋于一稳定值, 几乎不再随  $\nu$  的增加而变化, 且  $f$  越小, 所趋稳定值越大。

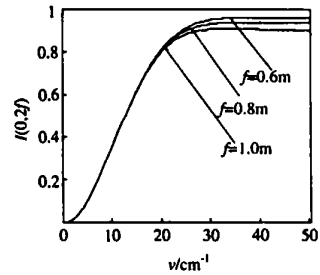


Fig. 4 On-axis intensity distributions  $I(0, 2f)$  at the plane  $z = 2f$  of a Gaussian beam passing through a spatial filter versus cut off frequency  $\nu$

### 3 结论

使用矩阵分解方法, 推导出了高斯光束通过内含硬边光阑  $ABCD$  光学系统的解析传输公式。以高斯光束通过空间滤波器为例进行了数值计算, 并对结果作了分析。由于内含光阑的复杂光学系统原则上都可以写成  $A_1 B_1 C_1 D_1 + \text{硬边光阑} + A_2 B_2 C_2 D_2$  的形式, 本文中所用方法可进一步推广用于研究其它类型光束通过内含多个硬边光阑复杂光学系统的传输变换问题, 所得结果具有较为广泛的应用意义。

### 参考文献

- [1] Collins S A, J O S A, 1970, A60: 1168~ 1177.
- [2] Siegman A E. Lasers. Mill Valley C A: University Science Books, 1986.
- [3] 吕百达. 激光光学. 2 版, 成都: 四川大学出版社, 1992.
- [4] Wen J J, Breazeale M A. J A S A, 1988, 83(5): 1752~ 1756.
- [5] 王喜庆, 梁国栋, 吕百达. 强激光与粒子束, 2001, 4(13): 418~ 422.
- [6] 王连祥, 方保植, 张鸣镛 et al. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 1979: 613.
- [7] Lü B D, Ma H, Zhang B. Opt Commun, 1999, 164: 165~ 170.