

文章编号: 1001-3806(2003)03-0182-03

## 受光阑限制厄米-余弦-高斯光束的解析传输公式\*

周南润 陶向阳 吕百达

(江西师范大学物理与通信电子学院,南昌,330027)

**摘要:** 从 Collins 公式出发,推导出了厄米-余弦-高斯光束通过有硬边光阑近轴  $ABCD$  光学系统传输的递推公式。由递推公式,借助迭代算法,得出受光阑限制的任意阶厄米-余弦-高斯光束的解析传输公式。数值计算例证实了解析传输公式的正确性和优点。

**关键词:** 传输公式;硬边光阑;厄米-余弦-高斯光束

**中图分类号:** O435;TN241 **文献标识码:** A

## Propagation expressions for apertured Hermite-cosine-Gaussian beams

Zhou Nanrun, Tao Xiangyang, Lü Baida

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027)

**Abstract:** Starting from the Collins formula, a recurrence equation of Hermite-cosine-Gaussian (HCG) beams propagating through a paraxial  $ABCD$  system with a hard-edge aperture is derived, from which the propagation expressions for apertured HCG beams of any order can be derived by means of the recursive algorithm. The validity and advantage of our results are confirmed and illustrated by numerical calculations.

**Key words:** propagation equation; hard-edge aperture; Hermite-cosine-Gaussian (HCG) beam

### 引言

在光束传输变换问题的研究中,从 Collins 出发对各类光束通过轴对称光学系统、失调光学系统以及非轴对称的光学系统,在无光阑或光阑衍射效应可忽略情况下的传输变换问题已进行了许多研究<sup>[1-3]</sup>。然而实际工作中,光束传输常受到光阑的限制,光阑的衍射效应对光束特性的影响是应当考虑的。对这类问题,大多数情况下都是直接对 Collins 公式作数值计算,耗费大量的机时。近年来,使用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的方法,求得一些光束通过硬边光阑的近似解析传输公式。这些公式在菲涅耳数较大情况下可足够好地描述光束通过有硬边光阑光学系统的传输行为<sup>[4-6]</sup>。最近, Ccasperson, Tovar 等人从 Maxwell-Heaviside 方程出发,研究了近轴近似下该方程存在一类特解——厄米-正弦类-高斯(HSG)光束<sup>[7]</sup>。并在系统失调、光束离轴和有像散、有增益(或损耗)的

折射率呈平方分布介质等较为一般的情况下,推导了 HSG 光束的传输变换公式。这些公式适用于无光阑限制的情况。与文献[4]~文献[6]中不同,笔者采用递推方法,推导出了厄米-余弦-高斯光束通过有硬边光阑近轴  $ABCD$  光学系统的解析传输公式,并将传输公式推广应用于高斯光阑情况,用数值计算例对解析分工的应用和正确性做了说明。

### 1 传输公式推导

光束通过近轴有限孔径  $ABCD$  光学系统时,由 Collins 公式可得出传输距离为  $z$  时场的分布,即:

$$E(x, z) = \int_{-a}^a \sqrt{i/\lambda} E(x, 0) \times \exp[-i(Ax^2 - 2xx + Dx^2)/B] dx \quad (1)$$

式中,  $\lambda$ ,  $a$  分别为光束的波长和光阑半宽度。由(1)式可得光强分布为:

$$I(x, z) = |E(x, z)|^2 \quad (2)$$

在直角坐标系下,  $z=0$  平面上厄米-余弦-高斯光束的场分布为:

$$E(x, 0) = \cos(\alpha x) H_m(\sqrt{2}x/w_0) \exp[-x^2/w_0^2] \quad (3)$$

式中,  $\alpha$  为一与余弦有关的参数,  $H_m(x)$  为  $m$  阶厄

\* 江西省自然科学基金资助项目。

作者简介:周南润,男,1976年2月出生。硕士研究生。从事激光技术研究。  
收稿日期:2002-08-28

米多项式<sup>[8]</sup>,且: $H_m(-x) = (-1)^m H_m(x)$ ,  
 $H_m(x) = 2m H_{m-1}(x)$ 。

$$H_{m+1}(x) = 2x H_m(x) - 2m H_{m-1}(x) \quad (4)$$

利用欧拉公式:

$$\cos(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)]/2 \quad (5)$$

将(3)式代入(1)式并整理得  $m$  阶厄米-余弦-高斯光束通过近轴  $ABCD$  光学系统变换后的场分布形式为:

$$E_m(x, z) = \frac{S_1}{2} \frac{a}{-a} H_m(2x/w_0) \times$$

$$\exp[-(Px - Q_1)^2] dx + \frac{S_2}{2} \frac{a}{-a} H_m(2x/w_0) \times \exp[-(Px - Q_2)^2] dx \quad (6)$$

式中:

$$P = 1/w_0^2 + iA/B \quad (7)$$

$$Q_1 = (2ix/B - i)/2P \quad (8)$$

$$Q_2 = (2ix/B + i)/2P \quad (9)$$

$$S_1 = i/B \exp(Q_1^2 - iDx^2/B) \quad (10)$$

$$S_2 = \sqrt{i/B} \exp(Q_2^2 - iDx^2/B) \quad (11)$$

$m=0$  时,对(6)式积分,得余弦-高斯光束经含有硬边光阑的近轴  $ABCD$  光学系统的解析传输公式为:

$$E_0(x, z) = \sqrt{(S_1 F_1 + S_2 F_2)/4P} \quad (12)$$

$$\text{式中: } F_1 = \operatorname{erf}(aP - Q_1) + \operatorname{erf}(aP + Q_1) \quad (13)$$

$$F_2 = \operatorname{erf}(aP - Q_2) + \operatorname{erf}(aP + Q_2) \quad (14)$$

式中,误差函数  $\operatorname{erf}(y)$  的积分表达式为:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y}^y \exp(-t^2) dt \quad (15)$$

$m=1$  时,对(6)式积分,得到 1 阶厄米-余弦-高斯光束经含有硬边光阑的近轴  $ABCD$  光学系统的解析传输公式为:

$$E_1(x, z) = \frac{\sqrt{2}}{2P^2 w_0^2} S_k \{ \exp[-(aP + Q_k)^2] - \exp[-(aP - Q_k)^2] + \sqrt{Q_k F_k} \} \quad (16)$$

同样地,可以得出 2 阶厄米-余弦-高斯光束经含有硬边光阑的近轴  $ABCD$  光学系统的解析传输公式为:

$$E_2(x, z) = \frac{1}{2P^3 w_0^2} S_k \{ -4(aP - Q_k) \exp[-(aP + Q_k)^2] - 4(aP + Q_k) \exp[-(aP - Q_k)^2] + \sqrt{F_k} (2 - P^2 w_0^2 + 4Q_k^2) \} \quad (17)$$

(12) 式、(16) 式和 (17) 式分别给出了余弦-高斯光束、1 阶和 2 阶厄米-余弦-高斯光束通过含有硬边光阑的近轴  $ABCD$  光学系统的解析传输公式。无光

阑情况下 ( $a \rightarrow \infty$ ),  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ ,  $F_1 = F_2 = 2$ , 由 (12) 式、(16) 式和 (17) 式可以得到无光阑情况下余弦-高斯光束、1 阶和 2 阶厄米-余弦-高斯光束的传输公式分别为:

$$\overline{E}_0(x, z) = \sqrt{(S_1 + S_2)/2P} \quad (18)$$

$$\overline{E}_1(x, z) = \frac{\sqrt{2}}{P^2 w_0} (Q_1 S_1 + Q_2 S_2) \quad (19)$$

$$E_2(x, z) = P^3 w_0^2 [S_1 (2 - P^2 w_0^2 + 4Q_1^2) + S_2 (2 - P^2 w_0^2 + 4Q_2^2)] \quad (20)$$

$$\text{令: } E_m^k(x, z) = \frac{S_k}{2} \frac{a}{-a} H_m(2x/w_0) \times \exp[-(Px - Q_k)^2] dx \quad (k=1, 2) \quad (21)$$

利用(4)式,可以得到厄米-余弦-高斯光束通过近轴  $ABCD$  光学系统变换后场分布的递推公式:

$$E_{m+1}^k(x, z) = 2 \frac{2Q_k E_m^k(x, z)}{Pw_0} + 2m(2/P^2 w_0^2 - 1) E_{m-1}^k(x, z) - \sqrt{2} S_k H_m(\sqrt{2}a/w_0) \{ \exp[-(aP - Q_k)^2] - (-1)^m \exp[-(aP + Q_k)^2] \} / 2P^2 w_0 \quad (22)$$

与文献[4]~文献[6]中的近似公式不同,(22)式是一个解析的传输公式。在近轴近似下,其计算结果与从 Collins 公式直接做数值计算结果是完全一致的。(22)式为笔者得出的主要理论结果。由(22)式进行递推,可以得出任意阶厄米-余弦-高斯光束通过近轴  $ABCD$  光学系统变换后的解析传输公式。例如,3 阶厄米-余弦-高斯光束的场分布为:

$$E_3(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{k=1,2} Q_k E_2^k(x, z) / Pw_0 + 2m(2/P^2 w_0^2 - 1) E_1^k(x, z) - \sqrt{2} S_k H_3(\sqrt{2}a/w_0) \times \{ \exp[-(aP - Q_k)^2] - \exp[-(aP + Q_k)^2] \} / 2P^2 w_0 \quad (23)$$

解析公式的一个优点是光阑效应对场分布的影响可以解析地表示出来。例如  $m=0$  和 2 时,

$$\overline{E}_0 - E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4P} [S_1 (2 - F_1) + S_2 (2 - F_2)] \quad (24)$$

$$\overline{E}_2 - E_2 = \frac{1}{2P^3 w_0^2} S_k \{ -4(aP - Q_k) \exp[-(aP + Q_k)^2] - 4(aP + Q_k) \exp[-(aP - Q_k)^2] + \sqrt{(2 - F_k) (2 - P^2 w_0^2 + 4Q_k^2)} \} \quad (25)$$

( $\overline{E}_0 - E_0$ ) 和 ( $\overline{E}_2 - E_2$ ) 表征了光阑对余弦-高斯光束和 2 阶厄米-余弦-高斯光束场分布的影响。

对位于  $z=0$  面上透射率为:

$$T(x) = \begin{cases} \exp(-x^2/a^2) & -a \leq x \leq a \\ 0 & x > a \text{ 或 } x < -a \end{cases} \quad (26)$$

的高斯光阑,如果将(22)式中的  $w_0$  用  $w = 1/\sqrt{1/f^2 + 1/w_0^2}$  代替,递推公式(22)式仍然适用。其中  $C$  为与高斯函数有关的常数。

### 2 数值计算与分析

现以 1 阶和 3 阶厄米-余弦-高斯光束通过透镜光阑系统为例,说明公式的应用。透镜光阑系统的变换矩阵为:

$$\begin{matrix} A & B & 1 & z & 1 & 0 \\ C & D & 0 & 1 & -1/f & 1 \end{matrix} \quad (26)$$

计算参数为透镜焦距  $f = 100\text{mm}$ ,  $a = 1.06\mu\text{m}$ ,  $a = 1\text{mm}$ ,  $b = 1\text{mm}^{-1}$ 。计算结果如图 1、图 2 所示。图 1

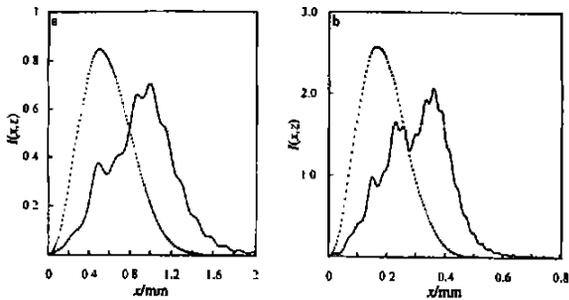


Fig. 1 Irradiance distributions of an HCG beam of order 1 focused by an aperture lens, (—) hard-edge aperture; (---) Gaussian aperture a— $z/f = 2.5$  b— $z/f = 0.5$

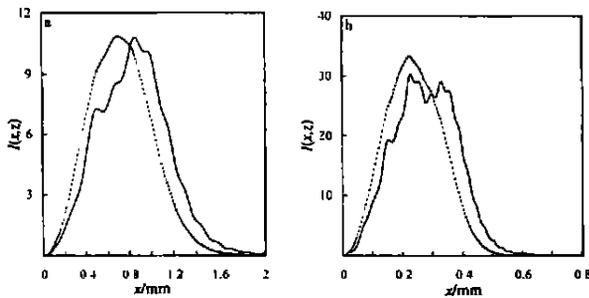


Fig. 2 Irradiance distributions of an HCG beam of order 3 focused by an aperture lens, (—) hard-edge aperture; (---) Gaussian aperture a— $z/f = 2.5$  b— $z/f = 0.5$

(上接第 174 页)

### 3 结论

使用 Jones 矩阵法分析 V 型折叠腔-内腔倍频系统有效消除 SFG 的条件,得到了消除 SFG 的基波 QWP 片法、交叉双倍频晶体法、倍频晶体 HWP 片法等若干典型配置方式,其中一些方法已得到实验证实。该分析方法可以推广应用于含更多腔臂折叠腔的内腔倍频系统,有实际应用意义。

#### 参考文献

[1] Baer T. J O S A, 1986, B3(9) : 1175 ~ 1180.

为  $w_0 = 1.2\text{mm}$ ,  $b = 0.55\text{mm}$  的 1 阶厄米-余弦-高斯光束通过透镜光阑系统在相对传输距离为 (a)  $z/f = 2.5$ , (b)  $z/f = 0.5$  时的光强分布(图中实线为硬边光阑情况,虚线为高斯光阑情况)。图 2 为  $w_0 = 1.5\text{mm}$ ,  $b = 2\text{mm}$  的 3 阶厄米-余弦-高斯光束通过透镜光阑系统在相对传输距离为 (a)  $z/f = 2.5$ , (b)  $z/f = 0.5$  时的光强分布(图中实线为硬边光阑情况,虚线为高斯光阑情况)。由图可知,适当的高斯光阑对光强剖面可以起到平滑的作用。采用解析传输公式的计算结果与直接积分 Collins 公式的结果一致,但后者所耗时较大,例如对图 2a、图 2b 中的参数,二者耗时比分别为 (a) 23 : 1 和 (b) 58 : 1。

### 3 结论

采用递推方法推导出了受硬边光阑限制的厄米-余弦-高斯光束通过近轴 ABCD 光学系统传输的解析公式,并且给出了计算例。用解析传输公式不仅可以节省耗时,而且便于进行物理分析。所得解析传输公式同时适用于硬边光阑和高斯光阑情形,文中的推导也适用于厄米-正弦-高斯光束、厄米-双曲余弦-高斯光束、厄米-双曲正弦-高斯光束,因而具有广泛的应用意义。

#### 参考文献

[1] Bagini V, Borghi R, Gori F. J O S A, 1996, 13(7) : 1385 ~ 1394.  
 [2] Li Y. J. J O S A, 1987, 4 : 1237 ~ 1242.  
 [3] 吕百达. 强激光的传输与控制. 北京:国防工业出版社, 1999 : 28, 37, 95 ~ 102.  
 [4] Wen J. J, Breazeale M. A. J Acoust Soc Amet, 1988, 83 : 1752 ~ 1756.  
 [5] Ding D, Liu X. J O S A, 1999, A16(6) : 1286 ~ 1293.  
 [6] 罗时荣, 吕百达. 中国激光, 2002, A29(5) : 425 ~ 428.  
 [7] Casperson L. W, Hall D. G, Tovar A. A. J O S A, 1997, 14 : 3341 ~ 3348.  
 [8] Siegman A. E. Laser. Mill Valley : California University Science Books, 1986 : 686.

[2] Oka M, Kubota S. Opt Lett, 1988, 13(10) : 805 ~ 807.  
 [3] James G. E, Harrel E. M. Phys Rev, 1989, A41(5) : 2778 ~ 2790.  
 [4] Gaebler V, Liu B. N, Eichler H. J. Opt Lett, 2000, 25(18) : 1343 ~ 1345.  
 [5] Li D. H, Zhu Ch. H, Gaebler V. et al. Opt Commun, 2001, 189 : 357 ~ 364.  
 [6] Ustyugov V. L, Orlov O. A, Khaleev M. M. et al. A P L, 1997, 71(2) : 154 ~ 156.  
 [7] Kojima T, Fujikawa S, Yasui K. et al. IEEE J Q E, 1999, 35(3) : 377 ~ 380.  
 [8] Hemmati H, Lesh J. R. IEEE J Q E, 1992, 28(4) : 1018 ~ 1020.  
 [9] Friob L, Mandel P, Viktorov E. A. Quantum Semiclass Opt, 1998, 10 : 1 ~ 17.