

文章编号: 1001-3806(2003)02-0155-03

非傍轴厄米-高斯光束及其高阶修正*

段开棕

吕百达

(洛阳师范学院物理系, 洛阳, 471022)

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064)

摘要: 使用级数修正公式研究了非傍轴厄米-高斯光束的传输。用数值计算例子说明了修正公式的适用范围。结果表明, 在束宽可与波长相比时, 修正公式是发散的, 并分析了发散的原因。

关键词: 非傍轴厄米-高斯光束; 光束传输; 非傍轴修正

中图分类号: TL632.1; O435; O436.1 **文献标识码:** A

Non-paraxial Hermite-Gaussian beams and their higher-order corrections

Duan Kailiang

(Department of Physics, Luoyang Normal College, Luoyang, 471022)

L ÜBaida

(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: The propagation of Hermite-Gaussian beams beyond the paraxial approximation is studied through the series expansion. The validity of the expansion formula is illustrated with numerical examples. It is shown that the formula becomes divergent, if the beam width is comparable with the wavelength. The corresponding physical analysis is also made.

Key words: non-paraxial Hermite-Gaussian beam; beam propagation; non-paraxial correction

引 言

在半导体激光器的光束传输问题研究中, 要处理大发散角、小束宽的光束传输问题。这类问题在物理上可归结为求波动方程的严格解。一般情况下, 傍轴波动光学的方法已不适用^[1]。迄今, 对非傍轴光束已进行了许多研究工作。例如, Nemoto 和 Varga 证明, 当光束束腰宽度小于 10 个波长, 特别是腰斑尺寸可与波长相比时, 在傍轴条件下得到的厄米-拉盖尔高斯光束已不能正确描述这种光束的传输规律^[2,3], Takenaka 则在 Lax 等人的工作^[4]基础上, 采用级数修正的方法, 对傍轴条件下的复参数高阶厄米-拉盖尔高斯光束公式进行修正, 给出了光束的非傍轴传输修正公式^[4]。Laabs 将 Takenaka 的修正公式应用于厄米-高斯光束, 推出了厄米-高斯非傍轴修正传输公式, 并与非傍轴的衍射积分公

式的计算结果相比较, 得到了一致的结果^[5]。笔者对非傍轴厄米-高斯光束的传输特性作了进一步的研究, 对级数修正公式用于处理小尺寸、大发散角光束传输时的适用范围作了详细的数值计算和分析。

1 非傍轴厄米-高斯光束在自由空间传输的修正公式

在直角坐标系下, 厄米-高斯光束在 z 平面的场分布可写为^[5]:

$$M_{HGn}^{(0)}(x, z) = (2/\pi)^{1/4} \sqrt{/(2^n n! w_0)} \times (/ *)^{n/2} H_n(\sqrt{2}^* x / w_0) \exp(-x^2 / w_0^2) \quad (1)$$

式中, $H_n(\cdot)$ 表示 n 阶厄米多项式, 上标 (0) 表示傍轴近似, $= (1 - iz / z_0)^{-1}$ 是一个与传输距离有关的复标量, $z_0 = kw_0^2 / 2$, 是基模高斯光束的瑞利长度, w_0 是基模高斯光束束腰宽度, $*$ 表示复共轭。由 (1) 式表示的厄米-高斯光束在自由空间传输的非傍轴修正公式为^[5]:

$$M_{HGn}(x, z) = M_{HGn}^{(2s)} = \sum_{s=0} f^{2s} \times$$

* 华中科技大学激光技术国家重点实验室基金和国家高技术青年基金资助项目。

作者简介: 段开棕, 男, 1968 年 7 月出生。硕士研究生, 讲师。现从事激光光束的传输变换研究。

收稿日期: 2001-12-27; 收到修改稿日期: 2002-01-31

$$c_p^{(2s)} = \frac{(-1)^{s+p} (2s)!}{s!(p-1)!(s-p)!(s+p)!} \left(-\frac{w_0}{2} \right)^{2s+2p} \frac{\partial^{2s+2p}}{\partial x^{2s+2p}} M_{HGn}^{(0)}(x, z) \quad (2)$$

$$c_p^{(2s)} = \frac{(-1)^{s+p} (2s)!}{s!(p-1)!(s-p)!(s+p)!} \quad (s = 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

式中, $f = w_0 / l$, $l = kw_0^2$ 为衍射长度, $\theta = 1 - \dots$ 。
 (2)式可看作小量 f 的幂级数,它只包含偶数项,级数的第 $s + 1$ 项 ($s = 1, 2, \dots$) $M_{HGn}^{(2s)}(x, z)$ 称为 $M_{HGn}(x, z)$ 的第 $2s$ 阶修正。

2 非傍轴厄米-高斯光束的传输特性

现在利用(1)式、(2)式计算 $n = 2$ 的厄米-高斯光束和基模高斯光束从平面 $z = 0$ 到 $z = 50\text{mm}$ 光强分布。以 $I_n(x, z)$ 表示 $M_{HGn}(x, z)$ 的光强, $I_n^{(0)}(x, z) = |M_{HGn}^{(0)}(x, z)|^2$, $I_n^{(2s)}(x, z) = |M_{HGn}^{(2s)}(x, z)|^2$ 。

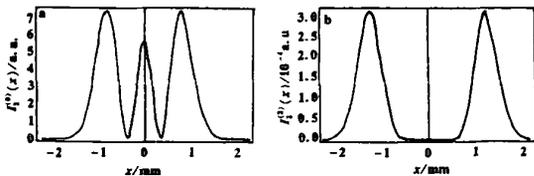


Fig. 1 Intensity distributions of a non-paraxial Hermite-Gaussian beam of $n = 2$ propagating in free space. a - zeroth-order term $I_2^{(0)}(x)$ b - second-order term $I_2^{(2)}(x)$, the calculation parameters are $l_0 = 10\text{mm}$, $f = 100\text{mm}$, $z = 50\text{mm}$, $w_0 = 23\mu\text{m}$, $\theta_0 = 14\text{mrad}$

当束腰宽度 $w_0 = 23\mu\text{m}$, 发散角 $\theta_0 = 14\text{mrad}$ 时,由 $\theta = w_0 \theta_0$ 知道,光束束腰宽度 w_0 约为 λ 的 22.7 倍。计算所得零阶项、2 阶修正项的强度分布如图 1 所示。零阶项强度分布有两个极大值,主极大值在轴上,次极大值离轴距离为 0.78 mm, 2 阶修正项强度分布极大值离轴距离为 1.23mm, 2 阶修正项强度比零阶项强度低了 4 个数量级。计算还表明, 4 阶修正项、6 阶修正项强度分别比零阶项强度低了 8 个、11 个数量级,说明当束腰宽度 w_0 远大于波长 λ 时,零阶项起主要作用,其它高阶修正项可以忽略。考虑

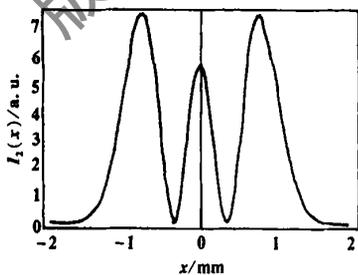


Fig. 2 Intensity distributions of a non-paraxial Hermite-Gaussian beam of $n = 2$ propagating in free space in consideration of the first 40 term corrections, the calculation parameters are the same as those in Fig. 1

前 40 阶 ($s = 20$) 修正,计算所得光束强度分布如图 2 所示,它与用零阶项计算所得的结果差别很小。

取束腰宽度 $w_0 = 5\lambda = 1.61\mu\text{m}$, 发散角 $\theta_0 = (200/\lambda)\text{mrad}$ 的计算结果如图 3 所示。计算表明, 2 阶修正项强度比零阶项强度高一个数量级,零阶项强度分布次极大值离轴距离为 3.49mm, 2 阶修正项强度分布极大值离轴距离为 5.59mm, 它们均比上面情况大了许多,小束宽光束非傍轴传输现象非常明显。此外, 4 阶修正项、6 阶修正项强度分别比零阶项强度高了 2 个、4 个数量级,以后高阶修正项增长速度更快,如 20 阶修正项强度比零阶项强度高了 21 个数量级。因此,当束腰宽度 w_0 较小(几个波长 λ) 时, (2) 式是发散的,它不能很好地描述小束宽非傍轴厄米-高斯光束的传输。

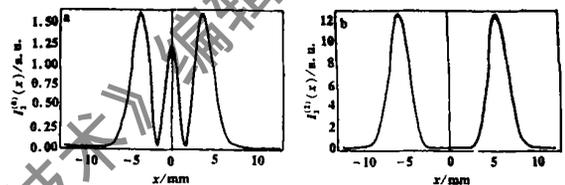


Fig. 3 Intensity distributions of a non-paraxial Hermite-Gaussian beam propagating in free space. a - zeroth-order term $I_2^{(0)}(x)$ b - second-order term $I_2^{(2)}(x)$, the calculation parameters are $l_0 = 10\text{mm}$, $f = 100\text{mm}$, $z = 50\text{mm}$, $w_0 = 1.61\mu\text{m}$, $\theta_0 = 63.66\text{mrad}$

Table 1 A summary of calculation results for $|M_{HGn}^{(2s)}(x)|^2$

correction order	waist width w_0						
	14	12	10	8	6	4	2
	magnitude of the correction order						
0	2	2	2	2	2	1	1
2	-1	1	1	1	2	3	5
4	-3	-2	1	1	3	5	10
6	-4	-3	-1	1	4	8	15
10	-7	-5	-2	2	7	14	26
20	-12	-7	-1	7	17	31	55
30	-15	-7	2	14	29	50	86

表 1 为 (2) 式中 $n = 2$ 时厄米-高斯光束在自由空间 $z = 50\text{mm}$ 处, 当束腰宽度 w_0 取不同值时, 各阶修正项强度的数量级, 波长 $\lambda = 1.012\mu\text{m}$ 。由表 1 可以看出, 在束腰宽度 w_0 大于 10 个波长 λ 时, (2) 式的高阶修正项强度较小。当束腰宽度 w_0 继续减小时, 零阶项强度相对有所减小, 高阶修正项强度明显增强, 说明光束傍轴成分有所减少, 非傍轴成分开始增加, 但高阶修正项出现发散现象。对由 (1) 式、(2) 式取得的基模高斯光束 ($n = 0$) 在 $z = 50\text{mm}$ 处也作了类似的计算, 结果总结于表 2 中, 由表 2 也可

得出相同的结论。

Table 2 A summary of calculation results for $|M_{HG0}^{(2)}(x)|^2$

correction order	waist width w_0						
	14	12	10	8	6	4	2
	magnitude of the correction order						
0	2	2	2	2	2	2	1
2	-2	-2	-1	1	0	2	4
4	-5	-4	-3	-1	1	3	8
6	-7	-6	-4	-1	1	6	12
10	-10	-8	-5	-1	4	11	23
20	-16	-10	-4	3	13	27	51
30	-19	-11	-1	10	25	46	82

小束宽时(2)式的发散由(1)式中存在的高斯函数导数的发散所引起。为说明这点,以(2)式中基模 $M_{HG0}(x, z)$ 的 2 阶修正 $M_{HG0}^{(2)}$ 为例讨论高斯函数对 $M_{HG0}^{(2)}$ 的影响,将 $M_{HG0}^{(2)}$ 写为如下形式:

$$M_{HG0}^{(2)} = {}_0^{(2)}(w_0, z,) \frac{d^4}{dx^4} \exp(-x^2/w_0^2) = 4 {}_0^{(2)}(w_0, z,) \exp(-x^2/w_0^2) [4x^4 \times (x/w_0^2)^4 - 12x^2(x/w_0^2)^3 - 3(x/w_0^2)^2] \quad (4)$$

式中, ${}_0^{(2)}(w_0, z,) = \frac{1}{16} (2/\lambda)^{1/4} \frac{w_0^2}{w_0 k} \quad (5)$
 由(4)式可知,当 w_0 较小时,(4)式可能出现较大值。

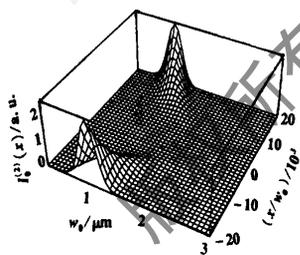


Fig. 4 $I_0^{(2)}(x)$ versus w_0 and $x/w_0, z = 50\text{mm}$

图 4 是取 $z = 50\text{mm}, \lambda = 1.012\mu\text{m}$ 时, $M_{HG0}^{(2)}$ 的

(上接第 154 页)

直接观察的功率密度值降低了 1.893×10^4 倍,此值是安全的。

4 结 语

常用的 He-Ne 激光直射眼睛有伤害,即便是使用小功率的激光器也应严禁直射,以免损伤眼睛;皮肤一般有危害但不会损伤。经常长时间连续受激光的照射和辐射,对神经系统也有伤害,具体表现为头

强度分布 $I_0^{(2)}$ 随束腰宽度 w_0 和 x/w_0 变化的 3 维图,由图可以看出, $I_0^{(2)}(x, z)$ 存在极大值点,这是由(4)式中高斯函数的 4 阶导数引起的。现令:

$$G(x, z) = \frac{d^4}{dx^4} \exp(-x^2/w_0^2) \quad (6)$$

图 5 是取 $z = 50\text{mm}, \lambda = 1.012\mu\text{m}$ 时, $|G(x)|^2$ 随束腰宽度 w_0 和 x/w_0 变化的 3 维图,由图可知, $|G(x)|^2$ 存在极大值点。由于 $M_{HGn}(x, z)$ 的修正项中都含有 x/w_0^2 的多项式,故修正公式在小束宽时,具有发散性是由式中高斯函数导数所引起。

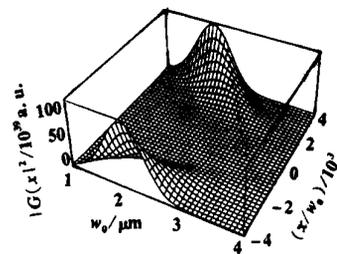


Fig. 5 $|G(x)|^2$ versus w_0 and $x/w_0, z = 50\text{mm}$

3 小 结

用厄米-高斯光束传输的非傍轴修正公式对非傍轴厄米-高斯光束通过自由空间的传输特性作了详细的数值计算分析。结果表明,在束腰宽度接近 20 个波长时,零阶修正起主要作用,当束腰宽度可与波长相比拟时非傍轴厄米-高斯光束修正公式是发散的。分析发现,修正公式对于小束宽光束发散的原因是由于式中高斯函数的高阶导数所引起的。这时,修正公式不能有效地描述小束宽非傍轴光束的传输,对此需作进一步研究,有关结果将另文发表。

参 考 文 献

- [1] Lax M, Louisell W H, Mc Knight W B. Phys Rev A, 1975, 11: 1365 ~ 1370.
- [2] Nemoto S. Appl Opt, 1990, 29: 1940 ~ 1946.
- [3] Varga P, Török P. Opt Commun, 1998, 152: 108 ~ 118.
- [4] Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O. J O S A, 1985, 2: 826 ~ 829.
- [5] Laabs H. Opt Commun, 1998, 147: 1 ~ 4.

晕脑胀、烦躁和抑郁、易怒等症状,建议在 8h 工作日内连续使用激光照射或辐射的时间不宜过长,避免影响身心健康。

参 考 文 献

- [1] 史宏敏. 激光医学基础. 广州: 华南理工大学出版社, 1990: 128.
- [2] 国家科委激光安全防护标准研究协作组. 应用激光, 1986, 6 (3): 135 ~ 140.
- [3] 周炳琨, 高以智, 陈家骅 et al. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 1995: 53.
- [4] 母国光, 战元令. 光学. 北京: 人民教育出版社, 1979: 134.