

文章编号: 1001-3806(2003)02-0150-03

用傅里叶级数展开法研究光束的传输特性*

陶向阳 周南润 吕百达

(江西师范大学物理与通信电子学院,南昌,330027)

摘要: 用傅里叶级数展开法研究了平顶高斯光束通过有光阑限制的近轴 $ABCD$ 光学系统的传输特性,导出了光阑透射率为 $T(x) = \cos(x)$ 时的近似解析传输公式,硬边光阑的情况可作为 $\alpha = 0$ 的特例得到。并给出了数值例。研究表明,用 Collins 公式直接数值积分与已推出的近似解析公式的结果在误差范围内一致。

关键词: 平顶高斯光束;傅里叶级数展开;光阑;场分布

中图分类号: O438.2 **文献标识码:** A

Study on beam propagation characteristics by means of the Fourier series expansion

Tao Xiangyang, Zhou Nanrun, Lü Baida

(College of Physics & Communication Electronics Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027)

Abstract: By means of the Fourier series expansion, an approximate analytical propagation equation of flattened Gaussian beams (FCBs) passing through an apertured paraxial $ABCD$ optical system is derived, and illustrated with numerical examples, when the transmissivity of the aperture is $T(x) = \cos(x)$. The hard-edged aperture can be regarded as a special case of $\alpha = 0$. Numerical calculations results obtained by the straightforward integration of the Collins formula and our analytical equation are given, showing a good consistency within a small error range.

Key words: flattened Gaussian beam; Fourier series expansion; aperture; field distribution

引 言

自 1994 年 Gori^[1]提出平顶高斯光束的概念以来,引起了国内外许多专家学者的广泛重视。平顶高斯光束的主要优点是可以展开成有限个拉盖尔-高斯光束(柱坐标系中)或厄米-高斯光束(直角坐标系中)之和,而拉盖尔-高斯光束和厄米-高斯光束在一阶光学系统中的传输遵从熟知的 Kogelnik 公式,即 $ABCD$ 定律。对平顶高斯光束的传输特性,已有学者进行了计算分析和实验研究^[2~5]。笔者采用一种新的方法,即傅里叶级数展开法,对受光阑限制的平顶高斯光束的传输特性进行研究,导出了光阑透射率为 $T(x) = \cos(x)$ 时光场分布的近似解析式,并与直接对 Collins 公式作数值积分的结果作了比较。而硬边光阑可令 $\alpha = 0$ 作为研究特例得出。

文中的研究方法不仅对实际的强度分布近似为平顶的光束有应用意义,并可用于研究其它类型光束的传输变换特性。

1 平顶高斯光束经有限孔径光学系统的传输

在直角坐标系下 $z = 0$ 平面上平顶高斯光束的场分布为^[1]:

$$E(x, 0) = A_0 \exp\left[-\frac{(N+1)}{w_0^2} x^2\right] \times \prod_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)}{w_0^2} x^2\right]^n \quad (1)$$

式中, A_0 为场在 $x = z = 0$ 处的振幅, N 为平顶高斯光束的阶数, w_0 为光腰宽度。

当该光束通过近轴有限孔径 $ABCD$ 光学系统时,由 Collins 公式可得传输距离为 z 时场的分布,即:

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{B}} \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax^2 - 2xx + Dx^2)\right] \int_{-a}^a E_0(x_0) \cdot T(x) \times \quad (2)$$

式中, k , λ , a 分别为光束的波数、波长和光阑半径, $T(x)$ 为光阑透射率函数,为确定起见,设为:

* 江西省自然科学基金和国家高技术光束控制重点实验室基金资助项目。

作者简介:陶向阳,男,1965年5月出生。教授。现从事激光传输与变换的研究。

收稿日期:2001-11-13;收到修改稿日期:2002-02-25

$$T(x) = \cos(x) \quad (3)$$

为一参数,由(2)式可得光强分布为:

$$I(x, z) = |E(x, z)|^2 \quad (4)$$

现在将平顶高斯光束在 $z=0$ 平面的场分布 $E(x, 0)$ 用傅里叶级数展开式表示,即:

$$E(x, 0) = \left\{ c_0 + \sum_{n=1} \left[c_n \cos(n x) + d_n \sin(n x) \right] \right\} \times \text{rect}\left(\frac{x}{T}\right) = \left[\sum_{n=0} c_n \cos(n x) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{T}\right) \quad (5)$$

式中,参数 T 由平顶高斯光束的腰宽和光阑孔径的大小共同决定, $\text{rect}(x/T)$ 为门函数:

$$\text{rect}(x/T) = \begin{cases} 1 & -T/2 < x < T/2 \\ 0 & x \text{ 为其它值} \end{cases} \quad (6)$$

$$= 2/T \quad (7)$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(x, 0) dx \quad (8)$$

$$E(x, z) = \sum_{n=0}^M \frac{c_n}{8\sqrt{A}} \exp\left\{ -i \left(AD - 1 \right) k^2 x^2 + 2Bk(n + \dots) x - B^2(n - \dots)^2 \right\} \cdot \sum_{j=1}^2 \left\{ \exp\left[\frac{2i[Bn + kx(n + \dots)]}{Ak} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(ax + (-1)^j aA) + B(n + \dots)]}{\sqrt{2ABk}} \right] + \exp\left[\frac{2i x}{A} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(aA + (-1)^j x) - (-1)^j B(n - \dots)]}{\sqrt{2ABk}} \right] + \exp\left[\frac{2i n x}{A} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(ax + (-1)^j aA) + B(n - \dots)]}{\sqrt{2ABk}} \right] + \exp\left[\frac{2i n z}{Ak} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(aA + (-1)^j x) - (-1)^j B(n + \dots)]}{\sqrt{2ABk}} \right] \right\} \quad (11)$$

例如,考虑自由空间中的传输时,在(11)式中令 $A = D = 1, B = z$,得:

$$E(x, z) = \sum_{n=0}^M \frac{c_n}{8} \exp\left\{ \frac{i}{2} \left[\frac{(n - \dots)^2 z}{k} - 2(n + \dots) x \right] \right\} \cdot \sum_{j=1}^2 \left\{ \exp\left[\frac{2i[n + kx(n + \dots)]}{k} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(a + (-1)^j x) + (-1)^j (n + \dots) z]}{\sqrt{2kz}} \right] + \exp[2i x] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(a + (-1)^j x) - (-1)^j (n - \dots) z]}{\sqrt{2kz}} \right] + \exp[2i n x] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(a + (-1)^j x) + (-1)^j (n - \dots) z]}{\sqrt{2kz}} \right] + \exp\left[\frac{2i n z}{k} \right] \cdot \text{erf}\left[\frac{\exp[i/4][k(a + (-1)^j x) - (-1)^j (n + \dots) z]}{\sqrt{2kz}} \right] \right\} \quad (12)$$

式中,误差函数:

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt \quad (13)$$

作简单的变换后,(13)式可用不完全 Γ 函数表示为:

$$\text{erf}(y) = 1 - (1/2, y^2) / \sqrt{\pi} \quad (14)$$

2 数值结果与分析

对平顶高斯光束传输特性作了大量的数值计

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(x, 0) \cos(n x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

对于任意给定 N 值,通过(7)~(9)式可求出(5)式的系数。实际计算中对(5)式可用有限项来逼近,即:

$$E(x, 0) \approx \sum_{n=0}^M c_n \cos(n x) \cdot \text{rect}(x/T) \quad (10)$$

M 为有限项数,其取值视误差要求而定, M 越大误差越小。 N 值不同, M 的取值也不一定相同,但总可以找到一个相应的 M 值使误差满足要求。

(10)式表示,初始场分布可以用带门函数 $\text{rect}(x/T)$ 的 $\cos(n x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 级数的有限项叠加来逼近。分别考虑这些分量通过 $ABCD$ 光学系统的变换,就可得到总的输出场的分布。这样,将(10)式代入(2)式得:

算,证实了(12)式是个实用的近似公式。典型例示于图1~图3,在计算中取 $N = 10, \lambda = 1.06\mu\text{m}, a = 1\text{mm}, w_0 = 1\text{mm}, T = 4a$ 。

图1a给出了(5)式在参数 M 取不同值时的场分布。由图知,随 M 的增大, $E(x, 0)$ 越来越接近由(1)式所描述的平顶高斯光束。由图1b知,当 $M = 10$ 时,(10)式与(1)式数值结果的绝对误差不超过 0.003,近似效果很好。

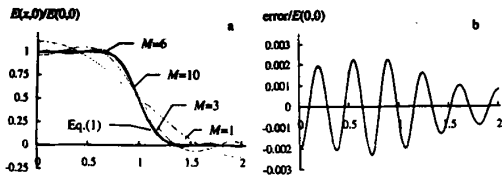


Fig.1 a - field distributions $E(x,0)$ of a flattened Gaussian beam of $N = 10$, and its Fourier series expansion with $M = 1, 3, 6$ and 10 b - the calculation error (x : mm)

分别将(2)式、(12)式代入(4)式求出光强分布和计算误差,在传输距离 z 、透射率参数 Ω 取不同值时随 x 的变化示于图 2。图中由(2)式所得光强用实线表示,由(12)式所得光强用虚线表示。当 $\Omega = 0$ 时,即为硬边光阑情况。可见,两式所得光强数值结果相差不超过 0.004。故采用有限项傅里叶级数的方法研究平顶高斯光束横向光强分布是可行的。

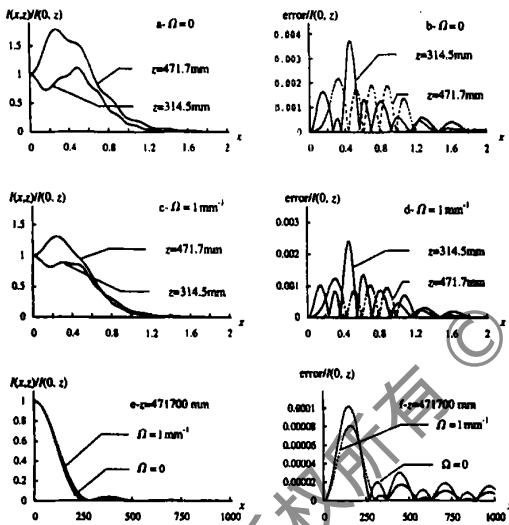


Fig.2 Normalized transverse intensity distributions $I(x,z)/I(x,0)$ of a flattened Gaussian beam of $N = 10$, and the corresponding calculation error
“.....” of a, c, e using Eq. (2), “.....” of a, c, e using Eq. (12) (x : mm)

图 3 给出了 Ω 取不同值时,轴上光强分布及(2)式和(12)式之间的误差随 z (mm) 的变化,图中横轴采用了对数坐标。由图可见,轴上光强分布出现波动现象,当传输距离增大到一定程度以后这种波动现象消失;适当选择 Ω 可以使波动幅度削弱,

当 $\Omega = (2n + 1) / 2a$ 时效果尤为明显(见图 3e),但仅调节 Ω 的大小不能完全消除这种现象;由图 3b、图 3d、图 3f 可见,使用(12)式时计算误差很小,因此,(12)式在研究轴上光强分布时仍然是可行的。

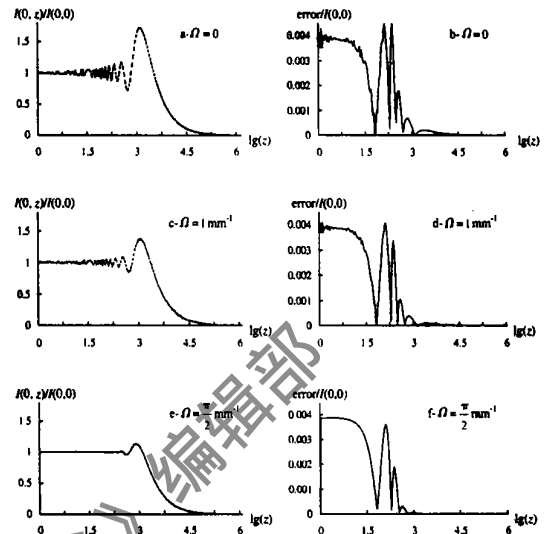


Fig.3 Axial intensity distributions $I(0,z)$ of a flattened Gaussian beam of $N = 10$ and the corresponding calculation error using Eq. (2), “.....” using Eq. (12) (z : mm)

3 结论

用对平顶高斯光束场分布作傅里叶级数展开的方法,推导出了平顶高斯光束通过光阑透射率为 $T(x) = \cos(x)$ 时的近轴 ABCD 光学系统的近似解析传输公式,并用此公式对平顶高斯光束传输特性作了详细的数值计算和分析。结果表明:平顶高斯光束的横向光强分布随传输距离而变化,其轴上光强分布出现振荡现象,当 $\Omega = (2n + 1) / 2a$ 时,轴上光强振荡现象会减弱。该方法同样适用于研究其它类型光束的传输特性,有关结果将另文报道。

参考文献

[1] Gori F. Opt Commun, 1994, 107: 335 ~ 341.
 [2] Lü B D, Luo S R, Zhang B. Opt Commun, 1999, 164(6): 1 ~ 6.
 [3] Ibnchaikh M, Belathal A. Opt Commun, 2001, 15(6): 73 ~ 79.
 [4] 罗时荣, 吕百达, 张彬. 物理学报, 1999, 48(8): 1446 ~ 1451.
 [5] Sheppard C J R, Saghafi S. Opt Commun, 1996, 132(5): 144 ~ 149.