

文章编号: 1001-3806(2003)01-0078-03

分数域啁啾滤波及其在数字图像处理中的应用*

张怡霄 杜惊雷 高福华 姚 军 曾阳素 郭永康

(四川大学物理系,成都,610064)

摘要: 讨论了分数域啁啾滤波的基本原理,同时将光学中的分数傅里叶变换引入到数字图像处理中,提出了一种分数域滤波去除影响数字图片质量之啁啾噪声的新方法,比较了分数域啁啾滤波和常规傅里叶频谱面上的滤波,获得了满意的模拟结果。

关键词: 分数傅里叶变换(FRT);啁啾滤波;图像处理

中图分类号: TN249;O438.2 **文献标识码:** A

Chirp filtering in fractional Fourier domain and its application in digital image processing

Zhang Yixiao, Du Jinglei, Gao Fuhua, Yao Jun, Zeng Yangsu, Guo Yongkang

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu, 610064)

Abstract: The principles of chirp filtering in fractional Fourier domain are discussed in this paper. After introducing optical fractional Fourier transform into digital image processing, we present a new method to eliminate chirp noise of digital images by filtering in the fractional Fourier domain. The filtering effects of this method and conventional Fourier domain filtering are compared and satisfying simulation results are obtained.

Key words: fractional Fourier transform (FRT); chirp filtering; image processing

引言

分数傅里叶变换(fractional Fourier transform, 即 FRT)是更广义的傅里叶变换,它与菲涅耳衍射、Wigner 分布函数、啁啾(chirp)变换、小波(wavelet)变换等有密切的联系,使人们可以从一个全新的角度来考察成像及光束传输等问题^[1~3]。由于引入了分数傅里叶变换,在信号处理、图像识别等方面可以借助于分数域上的操作来实现常规傅里叶变换难以处理的问题^[4]。

分数傅里叶变换可作为广义空间滤波的基础^[2],它扩展了光学信息处理的内容和方式。通常的滤波系统是在傅里叶频谱面上引入滤波器,故仅局限于线性空不变系统的操作,例如输入函数与一个空不变脉冲响应的卷积。分数傅里叶变换本身是空变的,因此,通过在不同的分数傅里叶变换面上引入不同的滤波器,可以实现更多的操作。对于一些

高频噪声,例如啁啾噪声,由于是平移变化(空变)的噪声,滤波器需要很高的分辨率和很大的带宽,常规的傅里叶变换滤波很难实现。这时若采用分数傅里叶变换滤波则很容易滤掉它。

基于啁啾函数的分数傅里叶特性^[5],作者讨论了分数域啁啾滤波,并将光学中的分数傅里叶变换引入到数字图像处理中,提出了一种分数域滤波去除影响数字图片质量之啁啾噪声的新方法。通过计算机模拟比较了分数域啁啾滤波和常规傅里叶频谱面上的滤波,获得了满意的结果。

1 分数傅里叶变换

Namias 最初提出的分数傅里叶变换是从纯数学的角度,通过算符的本征方程,结合傅里叶变换引入的。他将常规傅里叶变换视作分数傅里叶变换的一个特例。

设输入函数为 $f(x)$, 则其 P 阶分数傅里叶变换定义为^[6]:

$$\mathbf{F}^P[f(x)] = \int f(x) B_P(x, u) dx \quad (1)$$

式中, $B_P(x, u)$ 为核函数:

* 教育部博士点基金和国家自然科学基金资助项目。

作者简介:张怡霄,女,1975 年出生。助教。现从事工艺光学、波前工程、微光学等方面研究工作。

收稿日期:2002-04-02;收到修改稿日期:2002-06-21

$$B_P(x, u) = \frac{\exp[-i(\frac{x^2}{4} - \frac{u^2}{2})]}{|\sin \frac{1}{2}|^{1/2}} \exp[i \times (x^2 \cot \frac{1}{2} - 2xucsc \frac{1}{2} + u^2 \cot \frac{1}{2})] \quad (2)$$

式中, $\frac{1}{2} = P/2, \wedge = \text{sgn}(\sin \frac{1}{2}), P$ 为分数阶。

2 分数域啁啾滤波的基本原理

分数傅里叶变换与菲涅耳衍射、Wigner 分布函数、啁啾变换、小波变换等有密切的关系^[1], 而 Wigner 分布函数又与啁啾函数、函数、纯谐函数有非常特殊的关系。在 Wigner 域中 $\frac{1}{2}$ 的旋转操作就是通过一系列的啁啾函数将一个脉冲函数变为一个纯谐函数^[7]。由于分数傅里叶变换对应于 Wigner 分布的旋转, 故谐函数、函数、啁啾函数实际可看作同一函数在不同分数傅里叶域中的表示。

啁啾噪声在信号处理中是一种常见的空变高频噪声, 采用常规的傅里叶变换滤波系统很难处理。啁啾函数 $f(x) = \exp[-i2(b_2 x^2/2 + b_1 x + b_0)]$ 的 Wigner 分布为与 x 轴成 $= \tan^{-1} b_2$ 角度的线状函数^[5], 即: $b_2 = \tan(P/2)$ (3)

式中, P 为对应的分数傅里叶变换阶数。

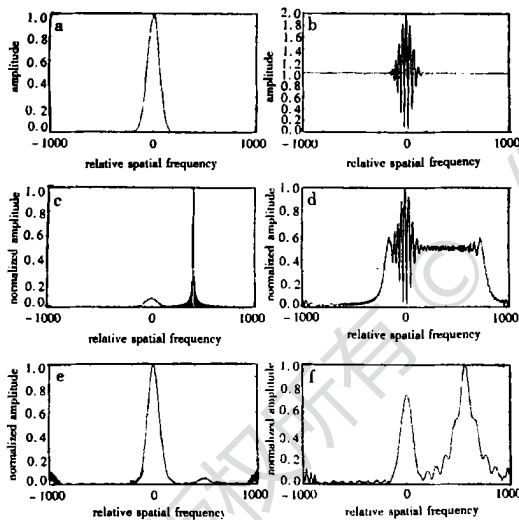


Fig. 1 The simulation results of chirp filtering in fractional Fourier domain

a - the original function: 1-D Gaussian function b - the input function: the Gaussian function with added chirp noise c - the distribution of the Gaussian function with added chirp noise in 0.5 fractional Fourier domain d - the Fourier spectrum of the Gaussian function with added chirp noise e - the output function of filtering in fractional Fourier domain f - the output function of filtering in Fourier frequency plane

由于分数傅里叶变换对应着 Wigner 分布函数的旋转, 因此, 该啁啾函数在对应的 P 阶分数域中为一个能量高度集中的函数, 这时采用简单的滤波器就能较好地除去该噪声。

利用一种分数傅里叶变换的快速算法^[8], 对带有啁啾噪声的一维高斯函数进行了滤波的模拟计算, 模拟结果如图 1 所示。其中输入函数 $f(x) = e^{-x^2} + e^{-i(x^2 - 8x)}$, 为高斯函数 $g(x) = e^{-x^2}$ 与啁啾噪声 $h(x) = e^{-i(x^2 - 8x)}$ 的叠加。

根据 (3) 式, 该啁啾噪声在 0.5 阶分数域上为一函数, 因此, 对带有噪声的高斯函数作 0.5 阶的分数傅里叶变换, 得到图 1c 所示的分数谱。可以看出, 啁啾噪声变成了一个函数, 噪声与信号已经分离。经滤波操作和逆变换以后, 得到如图 1e 所示的输出函数, 输出函数与原始函数基本相同, 啁啾噪声已被滤除。而由图 1d、图 1f 可知, 在傅里叶频谱面上, 信号与噪声的频谱是混叠在一起的, 很难进行滤波操作。勉强滤波后得到的输出函数仍然含有噪声项, 且强度与原函数相比有衰减。

3 分数域啁啾滤波在数字图像处理中的应用

人们在用 CCD 拍摄图片的时候, 镜头上附着的灰尘会使拍得的图片中带有一些噪声, 影响图片的质量。这些噪声是由灰尘颗粒的衍射产生的, 与啁啾噪声类似。为了去掉这些噪声, 通常采用的是频谱面上的滤波。由上一节的模拟结果可以看出, 分数域啁啾滤波在对空变高频噪声的处理上优于传统的频域滤波。作者将光学中的分数域啁啾滤波引入到数字图像处理中, 提出一种新的改善图像质量的手段, 它能有效地除去图像中的高频噪声 (啁啾噪声), 而图像的高频信息损失很少, 能复原得到清晰的原始图像。

对图 2a 所示的原始图像, 假设它受到一个加性啁啾噪声:

$$f(x, y) = \exp[-i(x^2 + y^2 - 10x + 10y)] \quad (4)$$

的影响, 导致图像质量下降, 如图 2b。由 (3) 式可知, 该啁啾在 0.5 阶分数域上为一函数。

对含有啁啾噪声的图像作 0.5 阶分数傅里叶变换, 得到其 0.5 阶的分数谱, 见图 2c。可以看到, 在该分数域上, 图像的谱与啁啾噪声的谱是分开的。滤掉噪声的谱以后, 再作 -0.5 阶的分数傅里叶变换, 得到去掉噪声后的图像, 见图 2e。还原的图像很清晰, 图像的高频信息基本没有损失。

为了比较滤波的效果, 同时对傅里叶频谱面上的滤波进行了模拟。图 2d 为含有噪声的图像的傅里叶频谱, 图 2f 为频谱面上滤波后还原得到的图

像。比较图 2c,图 2d 和图 2e,图 2f 可以看出,在 0.5 阶分数域上,虽然噪声的高频成分与图像的分数谱有重叠,但去掉噪声的分数谱的主要部分,对图像的高频成分基本没有影响,故滤波后仍然可以得到比较清晰的图像。而在傅里叶频谱面上,虽然图像的频谱比较集中,但是其高频成分与噪声的频谱有重叠,要想滤去噪声,必然会损失一部分物的高频信息,致使最后还原的图像变得模糊不清。

由模拟结果可知,采用分数域上的滤波,确实能有效地除去图像中的啁啾噪声,还原出清晰的图像。

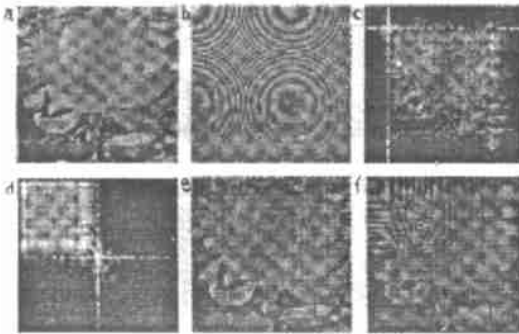


Fig. 2 The simulation results of chirp filtering in fractional Fourier domain applied in digital image processing

a - the original image b - the image being disturbed by a chirp noise c - the distribution of the image and noise in 0.5 fractional Fourier domain d - the Fourier spectrum of the image and noise e - the output image of filtering in fractional Fourier domain f - the output image of filtering in Fourier frequency plane

(上接第 77 页)

将沿复平面上过原点与 x 轴成 θ 角度的直线变化,此时出射光一般为非正椭圆偏振光。这在图 1 中也可以看出。特殊情况为 $\theta = k \times (\pi/2)$ 时, k 为整数,这种情况下出射光或沿实轴变化,或沿虚轴变化,比如若取 $\theta = \pi/2$,即延迟器为 $1/2$ 波片的情况,根据以上结论可以得出出射光沿虚轴的负半轴变化。由 (9) 式可以得出出射光与入射光相反: $o = -i$,这表明出射光仍为线偏光,但其振动方向与 x 轴成 $(\pi/2 - \theta)$ 角。

3 讨论

实验中采用的是旋转起偏镜而使波片保持不动。同样也可以让起偏镜保持不动,而使波片旋转,但要注意快轴 (x 轴) 是与波片一起旋转的。在复平

4 结束语

分数傅里叶变换在光学中的引入,大大扩展了光学信息处理的内容和方式,同时由于它在处理高频空变噪声问题上的优越性,使得分数域啁啾滤波的效果大大优于传统的频域滤波。将光学中的分数域啁啾滤波引入到数字图像处理中,提出了一种新的改善数字图像质量的手段。模拟结果与实验结果表明,这种方法能有效地除去图像中的高频噪声(啁啾噪声),而图像的高频信息损失很少,能复原得到清晰的原始图像。

参考文献

- [1] Bernardo L M, Soares O D D. J O S A, 1994, A11 (10) : 2622 ~ 2626.
- [2] Mendlovic D, Ozaktas H M. J O S A, 1993, A10 (9) : 1875 ~ 1881.
- [3] Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1993, A10 (12) : 2522 ~ 2531.
- [4] Mendlovic D, Ozaktas H M, Lohmann A W. Appl Opt, 1995, 34 (2) : 303 ~ 309.
- [5] Dorsch R G, Lohmann A W, Bitran Y *et al.* Appl Opt, 1994, 33 (32) : 7599 ~ 7602.
- [6] Ozaktas H M, Mendlovic D. J O S A, 1995, A12 (4) : 743 ~ 751.
- [7] Lohmann A W. J O S A, 1993, A10 (10) : 2181 ~ 2186.
- [8] Ozaktas H M, Arikan O, Kutay M A *et al.* IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44 (9) : 2141 ~ 2150.

面上经过类似的分析,也能得出上述结果。通过以上的论述,可以得出:在复平面中讨论偏振光态势的变换问题,具有直观明了、运算简化等特点,其最主要的优点是它能将所有的全偏振光都表示在一个复平面之内,并且很容易得出出射光随入射光和相位延迟器延迟角 θ 变换的规律。因此,这种复平面法能够作为一种新的研究偏振态问题的工具。

参考文献

- [1] 尚世铤. 近代物理实验(). 北京:高等教育出版社, 1993: 163 ~ 165.
- [2] 阿查姆 R M A, 巴夏拉 N M 著. 椭圆偏振测量术和偏振光. 北京:科学出版社, 1986: 18 ~ 20, 55 ~ 60.
- [3] 金国藩, 李景镇. 激光测量学. 北京:科学出版社, 1998: 211 ~ 247.
- [4] 竺庆春, 陈时胜译. 矩阵光学导论. 上海:上海科学技术文献出版社, 1991: 207.