

文章编号: 1001-3806(2003)01-0047-03

## 失调周期光学系统的等效变换\*

张廷蓉<sup>1,2</sup> 吕百达<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>四川大学激光物理与化学研究所, 成都, 610064) (<sup>2</sup>四川师范大学物理系, 成都, 610066)

摘要: 使用矩阵光学方法和  $3 \times 3$  Sylvester 定理, 研究了失调周期光学系统的变换矩阵的分解和等效问题。研究表明, 失调周期光学系统可以简化为两个薄棱镜和一个非失调薄透镜组成的等效系统。

关键词: 失调周期光学系统; 矩阵分解; 等效变换

中图分类号: TN012 文献标识码: A

## Equivalent transformation of periodic misaligned optical systems

Zhang Tingrong<sup>1,2</sup>, Lü Baida<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064)

(<sup>2</sup> Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, 610066)

**Abstract:** The matrix factorization and equivalent transformation of periodic misaligned optical systems are studied by using the matrix method in optics and generalized Sylvester theorem. It is shown that the periodic misaligned systems can be simplified to a combination of a thin aligned lens and two thin prisms.

**Key words:** periodic misaligned optical system; matrix factorization; equivalent transformation

### 引言

光学系统的合成与等效变换是激光光学中的一个基本问题。研究激光光束通过复杂光学系统的传输以及分析多元件谐振腔模式时常需作等效变换以使问题简化。而对系统变换矩阵的分解是实现系统合成与等效的关键<sup>[1]</sup>。迄今, 对于描述对称光学系统的  $2 \times 2 ABCD$  光线变换矩阵的分解问题已作了深入研究。Casperson<sup>[2]</sup>证明了任何非简并  $2 \times 2$  矩阵可以用不超过 4 个基本矩阵  $\alpha, \beta, \gamma$  的有序乘积表示。Arsenault<sup>[3]</sup>将系统  $2 \times 2$  变换矩阵分解为两个上三角矩阵和一个反对角矩阵的乘积(前者代表自由空间传输, 后者为焦平面矩阵), 并进一步将此方法用于对称周期光学系统变换矩阵的分解研究。近年来, Tovar 和 Casperson 导出了描述失调光学系统  $3 \times 3 ABCDEF$  光线矩阵的 Sylvester 定理<sup>[4]</sup>, 将  $2 \times 2 ABCD$  光束矩阵推广到描述复元素失调光学系统的  $3 \times 3 ABCDGH$  光束矩阵<sup>[5]</sup>, 用类似文献<sup>[2]</sup>中

的方法研究了  $3 \times 3 ABCDGH$  光束矩阵的分解及系统合成等问题<sup>[6]</sup>, 在  $B \neq 0$  情况下, 导出了么模变换矩阵的 6 种分解式。迄今为止, 未见有对失调周期光学系统的等效变换问题的研究报道。笔者应用 Sylvester 定理和矩阵光学方法研究了此类系统的变换矩阵的分解, 导出了一般分解公式, 并以失调多程反射室和失调薄透镜序列为例说明其应用。

### 1 失调光学系统的矩阵分解

设失调光学系统的增广矩阵(光线变换矩阵)为

$$M = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A, B, C, D \text{ 为理想(非失} \text{调)对称光学系统的矩阵元, } E, F \text{ 为失调矩阵元}^{[7]}。$$

不难证明, 可以把  $M$  矩阵按以下两种情况进行分解。

(1)  $B \neq 0$  的分解

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (BF - DE)/B \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A/C & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1/C & 0 \\ 1 & D/C & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & E/B \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

\* 激光技术国家重点实验室和国家高技术激光技术主题项目。

作者简介: 张廷蓉, 女, 1962 年 5 月出生。副教授。现从事激光与现代光学的科研及教学工作。

收稿日期: 2002-02-05; 收到修改稿日期: 2002-04-23

上式的物理意义显而易见,第 1、第 5 两个矩阵分别表示折射率为  $n$ 、顶角分别为  $\theta_1 = \frac{BF-DE}{B(n-1)}$ ,  $\theta_2 = \frac{E}{B(n-1)}$  的薄棱镜变换矩阵;第 2~第 4 个矩阵为非失调光学系统将  $2 \times 2$  UAU 分解法<sup>[3]</sup>推广后对应的矩阵,分别代表长度  $d_1 = A/C$  的自由空间传输矩阵,透镜( $f = -1/C$ )的焦平面矩阵以及自由空间( $d_2 = D/C$ )传输矩阵。

(2)  $B = 0$  的分解

若系统的矩阵为  $M = \begin{pmatrix} A & 0 & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则(1)式失效,可将增广矩阵展开为:

$$M = \begin{pmatrix} A & -A\alpha & E \\ C & D - C\alpha & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - C\alpha & -D\alpha & E - F\alpha \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

上面两式中  $\alpha$  均取某一不为 0 的确定值,代表自由空间传输距离。显然,(2)式中第 1 个矩阵、(3)式中第 2 个矩阵可按与上类似的方法进行分解。

2 失调周期光学系统的等效

在激光束传输研究中常涉及周期光学系统的应用,如薄透镜序列、多程反射室。为简单起见,文献中通常将其视为理想无失调光学系统。然而,在实际应用中,往往会因为调节误差而导致系统失调。

设系统由  $s$  个相同的失调子系统组成,其增广矩阵可表示为:

$$T_s = \begin{pmatrix} A_s & B_s & E_s \\ C_s & D_s & F_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^s \quad (4)$$

采用  $3 \times 3$  Sylvester 定理<sup>[4]</sup>以及上述矩阵分解方法,即可找到与之对应的等效系统,从而使变换问题得到简化。

2.1 失调薄透镜系列

设有  $s$  个相距  $d$ 、焦距为  $f$ 、失调线位移为  $\varepsilon$  的薄透镜周期序列,如图 1 所示。其子系统的增广矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & \varepsilon/f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

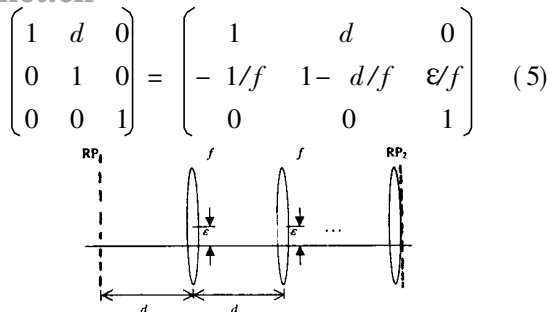


Fig. 1 Misaligned periodic sequence of identical lenses

由  $3 \times 3$  Sylvester 定理可以计算得到如下矩阵元:

$$A_s = \frac{\sin s\theta - \sin(s-1)\theta}{\sin \theta} \quad (6)$$

$$B_s = d \sin s\theta / \sin \theta \quad (7)$$

$$C_s = -\sin s\theta / f \sin \theta \quad (8)$$

$$D_s = \frac{(1 - d/f) \sin \theta - \sin(s-1)\theta}{\sin \theta} \quad (9)$$

$$E_s = \frac{d\varepsilon/f [\sin s\theta - \sin(s-1)\theta - \sin \theta]}{2 \sin \theta (\cos \theta - 1)} \quad (10)$$

$$F_s = \frac{-(d\varepsilon/f^2) \sin s\theta}{2 \sin \theta (\cos \theta - 1)} \quad (11)$$

式中,  $\cos \theta = 1 - d/2f$ 。

进而将  $T_s$  按(1)式进行分解后可得到如下等效系统:薄棱镜 1 → 薄透镜 → 薄棱镜 2。对应参数为:

$$\text{薄棱镜 1 的顶角 } \alpha_1 = \frac{\varepsilon [\sin s\theta - \sin(s-1)\theta - \sin \theta]}{2(n-1)f \sin \theta (\cos \theta - 1)},$$

$$\text{等效透镜的焦距 } f' = \frac{f \sin \theta}{\sin s\theta}, \text{薄棱镜 2 的顶角 } \alpha_2 =$$

$$-d\varepsilon \sin s\theta / [2f^2(n-1) \sin \theta (\cos \theta - 1)] - [(1 - d/f) \sin s\theta - \sin(s-1)\theta] \alpha_1 / \sin \theta,$$

$$\text{薄棱镜 1 到等效透镜前焦点的距离 } l_1 = d + \frac{f}{\sin s\theta} [\sin(s-1)\theta - \sin s\theta],$$

$$\text{薄棱镜 2 到等效透镜后焦点的距离 } l_2 = \frac{f}{\sin s\theta} [\sin(s-1)\theta - \sin s\theta],$$

如图 2 所示。若采用类似方法还可以分析光线在透镜波导中的传输特性。

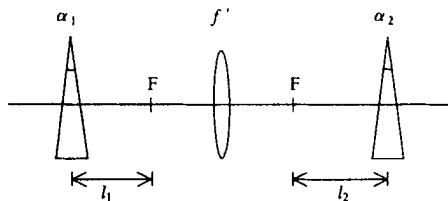


Fig. 2 The equivalent optical system

2.2 失调多程反射室

多程反射室可视为球面反射镜上开有入孔和出孔的干涉仪,一般作为光学延迟系统、喇曼增益室等应用于激光光学和高分辨激光光谱学中。通常用矩阵光学方法分析反射室中光线的往返传输行为,根

据  $2 \times 2$  Sylvester 定理, 可得到经  $s$  次反射后系统的变换矩阵。然而, 若反射镜失调, 则需用  $3 \times 3$  增广矩阵描述光学系统的变换作用。设球面镜 1 和球面镜 2 的曲率半径均为  $R$ , 镜间距离为  $L$ , 镜 1 失调而镜 2 不失调, 且镜 1 的失调角位移为  $\epsilon'$ , 如图 3 所示。若以镜 1 为参考, 则往返矩阵为:

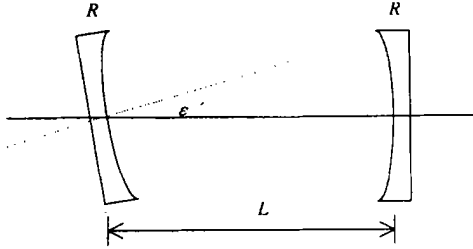


Fig. 3 Misaligned multi pass reflected cell

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R & 1 & 2\epsilon' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2L/R & 2L(R-L)/R & 0 \\ 4(L-R)/R^2 & (4L^2-6RL+R^2)/R^2 & 2\epsilon' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

由  $3 \times 3$  Sylvester 定理可以计算得到经  $s$  次往返后失调多程反射室的变换矩阵元为:

$$A_s = \frac{(1-2L/R)\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi}{\sin\varphi} \quad (13)$$

$$B_s = 2L(1-L/R)\sin s\varphi/\sin\varphi \quad (14)$$

$$C_s = (4/R)(L/R-1)\sin s\varphi/\sin\varphi \quad (15)$$

$$D_s = \frac{(4L^2-6RL+R^2)/R^2\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi}{\sin\varphi} \quad (16)$$

$$E_s = \frac{2L\epsilon'(1-L/R)[\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi - \sin\varphi]}{\sin\varphi(\cos\varphi-1)} \quad (17)$$

$$F_s = \frac{2\epsilon'L/R[(2L/R-3)\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi - \sin\varphi]}{\sin\varphi(\cos\varphi-1)} \quad (18)$$

式中,  $\cos\varphi = 1 - 4L/R + 2L^2/R$ 。

同样可将  $T_s$  按 (1) 式进行分解后得到等效系统: 薄棱镜 1  $\rightarrow$  薄透镜  $\rightarrow$  薄棱镜 2。有关结果为: 薄棱镜 1 顶角  $\alpha_1 = \frac{\epsilon'[\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi - \sin\varphi]}{(n-1)\sin\varphi(\cos\varphi-1)}$ , 等效透镜焦距  $f' = \frac{R\sin\varphi}{4(L/R-1)\sin s\varphi}$ , 薄棱镜 2 顶角

$$\alpha_2 = \frac{2\epsilon'L/R[(2L/R-3)\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi - \sin\varphi]}{(n-1)\sin\varphi(\cos\varphi-1)} - \frac{(4L^2-6RL+R^2)/R^2\sin s\varphi - \sin(s-1)\varphi}{\sin\varphi} \alpha_1$$

薄棱镜 1 到等效透镜前焦点的距离  $l_1 = \frac{(R^2-6RL+4L^2)\sin s\varphi - R^2\sin(s-1)\varphi}{4(L-R)\sin\varphi}$ , 薄棱镜 1

到等效透镜后焦点的距离  $l_2 = \frac{(R^2-2RL)\sin s\varphi - R^2\sin(s-1)\varphi}{4(L-R)\sin\varphi}$ , 如图 2 所示。

若在实际应用中, 多程反射室的镜 1 和镜 2 均有失调, 设失调角分别为  $\epsilon'_1$  和  $\epsilon'_2$ , 以镜 1 为参考, 可得到光线往返传输矩阵:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R & 1 & 2\epsilon'_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R & 2\epsilon'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2L/R & 2L(R-L)/R & 2L\epsilon'_2 \\ \frac{4(L-R)}{R^2} & \frac{4L^2-6RL+R^2}{R^2} & 2\left[\epsilon'_2 - \frac{2L\epsilon'_1}{R} + \epsilon'_1\right] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

采用类似方法可以得到经  $s$  次往返后系统矩阵的分解式, 受篇幅所限, 具体表示式从略。

### 3 结 论

在矩阵光学理论基础上, 采用  $3 \times 3$  Sylvester 定理研究了失调周期光学系统变换矩阵的分解问题, 给出了一般分解公式。并将失调周期光学系统简化为薄棱镜 1  $\rightarrow$  薄透镜  $\rightarrow$  薄棱镜 2 等效系统。进一步讨论了实际应用中遇到的失调薄透镜序列和失调多程反射室的等效变换, 得到了有意义的计算结果。该方法对光学系统的设计具有实际价值。

#### 参 考 文 献

- [1] 吕百达. 激光光学——激光束的传输变换和光束质量控制. 2 版, 成都: 四川大学出版社, 1992.
- [2] Casperson L W. Appl Opt, 1983, 20(13): 2243~ 2249.
- [3] Arsenault H H, Macukow B. J O S A, 1983, 73(10): 1350~ 1359.
- [4] Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1995, 12(3): 578~ 590.
- [5] Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1995, 12(7): 1522~ 1533.
- [6] Tovar A A, Casperson L W. J O S A, 1997, 14(4): 882~ 893.
- [7] Gerrard A, Burch J M. Introduction to matrix methods in optics. New York: John Wiley and Sons, 1975: 286~ 291.